УДК 512.8

# НЕЧЕТКИЕ СИСТЕМЫ ВОЛЬТЕРРА

С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин

*Липецкий государственный технический университет*

Предложен подход к учету нечеткости окрестностей по состоянию дискретно-временных систем и рассмотрено его согласование с исследованиями дискретных систем Вольтерра и нечетких систем.

## ВВЕДЕНИЕ

Понятие нечеткой системы может быть введено уже в контексте общей теории систем [1] как нечеткое соответствие между нечеткими входным и выходным объектами, причем функционализация такой системы приводит к нечетким внутреннему объекту и реакции. В контексте аргументно-алфавитных систем [2], детализирующих общие системы, элементами объектов являются сигналы — входы, выходы и состояния, зависящие от некоторого аргумента и принимающие значения, как и параметры системы, в некоторых алфавитах, нечеткими могут быть как множество значений аргумента, так и алфавиты. Трактовка последних как нечетких множеств более популярна, так как связана с естественной нечеткостью измерений значений сигналов в системе и ее параметров (см., например, работы [3, 4]).

Представляет интерес и вопрос об учете нечеткостей, возникающих в множестве значений аргумента системы. Постановка этого вопроса естественна в классе окрестностных систем, для которых множество значений аргумента наделено некоторой окрестностной структурой. В случае дискретного аргумента, наиболее важном для большинства современных приложений, эта структура, вообще говоря, отличается от топологической. Разнообразные примеры таких структур и соответствующих систем рассматриваются в теории дискретно-аргументных систем [5—7]. Класс дискретных окрестностных систем и моделей формализован в работах [8, 9].

Во многих прикладных задачах окрестности, как подмножества множества значений аргумента, оказываются нечеткими. Уже в случае простейших дискретно-временных и близких к ним систем это приводит, вообще говоря, к необходимости [10] учета зависимости текущего состояния не стандартно от одного или фиксированного числа непосредственно предшествующих состояний, а от всей предыстории, т. е. от состояний из временного промежутка от начального до текущего момента времени, иначе говоря — к системам с нефиксированным последействием, представителями которых являются дискретные системы Вольтерра [11—14].

Нечеткие множества и системы представляют собой широкую область интенсивных исследований в рамках проблематики искусственного интеллекта, в частности, принятия решений в условиях неопределенности. Большинство из этих исследований находят отражение в публикациях журнала именно с таким названием — “Fuzzy Sets and Systems” (см., например, работы [3, 4] и наиболее “свежие” на данный момент работы [15, 16]), а также в большом числе других изданий близкой тематики, в том числе отечественных (см., например, журналы “Автоматика и телемеханика”, “Теория и системы управления” и др., библиографию в работах [17, 18]).

Цель данной работы — предложить подход к учету нечеткости окрестностей по состоянию дискретно-временных систем и согласовать этот подход как с исследованиями дискретных систем Вольтерра, так и с исследованиями нечетких систем, выполняющимися в связи с решением задач искусственного интеллекта.

## 1. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ ВОЛЬТЕРРА

Приведем краткие сведения об этом классе систем, используемые в дальнейшем изложении, следуя работе [11]. Дискретная система Вольтерра описывается уравнением

$$x[t] = f(t, x\,[t-1], \ldots, x[0]), \qquad (1)$$

где $t \in N = \{0, 1, \ldots\}$ — дискретное время, $x[t] \in R^n$ — вектор состояния системы, $f$: $N \times \Xi \to R^n$ — некоторая функция, $\Xi$ — пространство последовательностей $\xi$, элементами которых являются векторы из $R^n$. При этом для любого $t \in N$ значение функции $f(t; \xi)$ определяется только компонентами $x[0]$, ... $x[t-1]$ последовательности $\xi$ и не зависит от $x[\tau]$, $\tau < 0$ и $\tau > t-1$. Поэтому эволюция системы (1) полностью определяется заданием одного начального состояния x [0] или набора начальных состояний ($x[0]$, $x[1]$, ..., $x[r]$). Часто предполагается выполненным условие $f(t; 0, ..., 0) \equiv 0$. Иногда, чтобы подчеркнуть зависимость решения $x[t]$ уравнения (1) от начальных состояний, оно обозначается $x[t; (x[0], ..., x[r])]$.

В описании дискретной системы Вольтерра использована максимальная для данной ситуации окрестность $T = MNX[t] = \{t - 1, ..., 0\}$ текущего состояния $x[t]$, и уравнение (1) можно записать в виде

$$x[t] = f(t; \{x[\tau], \tau \in T\}). \quad (2)$$

При стандартной окрестности $SNX[t] = \{t - 1\}$ получаем стандартную одношаговую дискретно-временную систему

$$x[t] = f(t; x[t - 1]), \quad (3)$$

а при фиксированной (одно и то же $k$ для всех $t$) окрестности $KNX[t] = \{t - 1, ..., t - k\}$ — стандартную дискретно-временную систему с $k$-шаговым запаздыванием

$$x[t] = f(t; \{[t - 1], ..., x[t - k]\}). \quad (4)$$

В работах [11, 12] развит подход к исследованию устойчивости дискретных систем Вольтерра, предусматривающий, в отличие от систем с конечным фиксированным последействием, применение не функций Ляпунова, зависящих от конечного числа аргументов, а функционалов Ляпунова, зависящих от всей траектории процесса от начального до текущего моментов времени. Построена формальная процедура, приводящая к явной форме таких функционалов, а, следовательно, и условий устойчивости для различных подклассов дискретных систем Вольтерра. Приведем следующий простейший *пример* из работы [12]. Пусть

$$x[t] = \sum_{\tau = 0}^{t-1} a[t; \tau]x[\tau] = \sum_{\tau \in T} a[t; \tau]x[\tau] \quad (5)$$

— скалярная линейная нестационарная дискретная система Вольтерра. Тогда условие ее устойчивости можно записать в виде $\alpha_0 \leqslant 1$, а условие асимптотической устойчивости — в виде $\alpha_0 < 1$, где

$$\alpha_0 = \sup_{t \geq 0} \sum_{\tau = 0}^{\infty} |a[[t; \tau]|.$$

Частным случаем системы (4) является простейшая линейная стационарная система

$$x[t] = ax[t - 1], \quad (6)$$

для которой $\alpha_0 = a$.

В работе [14] показано, что дискретные системы Вольтерра допускают трактовку как динамические благодаря выполнению для них фундаментального в математической теории систем [1] полугруппового свойства или свойства композиции переходов состояний, которое в простейшем случае системы (6) является следствием соотношения $a^{t+s} = a^t a^s$, а в общем случае системы (1) обосновывается следующим образом. Пусть $r < s < t$ — некоторые моменты времени; пусть задан набор ($x[0]$, ..., $x[r]$); он определяет решение дискретной системы Вольтерра на интервале $[0, \infty)$:

$$\varphi_{[0, \infty)}(x[0], ..., x[r]) = (x[0], ..., x[r]),$$

$$x[r + 1] = x[r + 1; (x[0], ..., x[r])] = f(r + 1; x[r], ..., x[0]),$$

$$x[r + 2] = x[r + 2; (x[0], ..., x[r])] = f(r + 2; f(r + 1; x[r], ..., x[0]), x[r], ..., x[0]), ...,$$

$x[s] = x[s; (x[0], ..., x[r])]$, ..., $x[t] = x[t; (x[0], ..., x[r])]$, ..., сужение которого на временные отрезки $[0, s]$, $[0, t]$ определяет отображения $\varphi_{sr} = \varphi_{sr}(x[0], ..., x[r])$, $\varphi_{tr} = \varphi_{tr}(x[0], ..., x[r])$; аналогично определяется отображение $\varphi_{ts} = \varphi_{ts}(x[0], ..., x[s])$. Непосредственно проверяется, что для динамической системы с переходной функцией, заданной этим семейством отображений, выполняется свойство композиции переходов состояний в виде $\varphi_{ts} = \varphi_{ts}\varphi_{sr}$.

Внимание полугрупповому свойству уделено в связи с тем, что оно служит "проверочным" на право системе считаться динамической; это в полной мере относится к рассматриваемым далее нечетким системам.

## 2. НЕЧЕТКИЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ ВОЛЬТЕРРА

Реализацию предлагаемого подхода к учету нечеткости окрестностей по состоянию начнем со следующего замечания. Используемая в системах (3) и (6) стандартная окрестность $SNX[t]$, как четкое подмножество максимальной окрестности $T = MNX[t]$, полностью описывается своей характеристической функцией $\chi_{SNX[t]}[\tau] = 1$ при $\tau = t - 1$ и $\chi_{SNX[t]}[\tau] = 0$ при $\tau = t - 2, ..., 0$, которая, благодаря принимаемым ею лишь двум значениям 0 и 1, может считаться неявно присутствующей в этих уравнениях; подобным же образом характеристическая функция $\chi_{MNX[t]}[\tau] \equiv 1$, $\tau = t - 1, ..., 0$, неявно присутствует в уравнениях (1), (2) и (5), а характеристическая функция $\chi_{KNX[t]}[\tau] = 1$ при $\tau = t - 1, ..., t - k$ и $\chi_{KNX[t]}[\tau] = 0$ при $\tau = t - k - 1, ..., 0$ — в уравнении (4).

При переходе к нечеткому окрестностному аналогу системы (6) представляется естественным вместо неявно входящих в уравнение системы характеристических функций четких окрестностей явно ввести в это уравнение функции принадлежности нечетких окрестностей, значения которых принадлежат не множеству $\{0, 1\}$, а промежутку $[0, 1]$. При этом следует учитывать, что сама максимальная окрестность текущего состояния $x[t]$ может быть нечеткой, обозначаемой $FMNX[t]$, с функцией принадлежности $\mu_{FMNX[t]}[\tau] \in [0, 1]$, $\tau \in MNX[t]$; нечеткая стандартная окрестность $FSNX[t]$, как нечеткое подмножество максимальной $FMNX[t]$, описывается функцией принадлежности $\mu_{FSNX[t]}[\tau] \in \mu_{FMNX[t]}[\tau] \in [0, 1]$, причем в общем случае $\mu_{FSNX[t]}[\tau] \leqslant \mu_{FMNX[t]}[\tau]$ для всех $\tau \in MNX[t]$. То же относится и к другим нечетким подмножествам максимальной окрестности: их функции принадлежности в общем случае заданы на всем множестве $FMNX[t]$ и в общем случае не превосходят его функцию принадлежности. Введем в явном виде такую функцию принадлежности в (для простоты скалярные) уравнения (1) и (2), обозначив ее для краткости через $\mu[t; \tau]$, $\tau = t - 1, ..., 0$. Получим уравнение скалярной нечеткой нелинейной дискретной системы Вольтерра [19]

$$x[t] = f(t; x[t-1], \mu[t; t-1]; ...; x[1], \mu[t; 1]; x[0], \mu[t; 0]).$$

Применение к его правой части разложения в дискретный функциональный ряд Вольтерра [20] до членов второй суммарной степени по $x$ и $\mu$ включительно приводит к описанию так введенной скалярной нечеткой нелинейной дискретной системы Вольтерра в виде

$$x[t] = a_0[t] + \Big(\sum_{\tau \in T} a_{1x}[t; \tau]x[\tau] + \sum_{\tau \in T} a_{1\mu}[t; \tau]\mu_t[\tau]\Big) + \\ + \Big(\sum_{\tau_1 \in T}\sum_{\tau_2 \in T} a_{2xx}[t; \tau_1, \tau_2]x[\tau_1]x[\tau_2] + \\ + \sum_{\tau_1 \in T}\sum_{\tau_2 \in T} a_{2\mu\mu}[t; \tau_1, \tau_2]\mu[t; \tau_1]\mu[t; \tau_2] + \\ + \Big\{\sum_{\tau_1 \in T}\sum_{\tau_2 \in T} a_{2\mu x}[t; \tau_1, \tau_2]\mu[t; \tau_1]x[\tau_2]\Big\}\Big) + ...$$

В работе [10] рассмотрен простейший модельный пример скалярной нечеткой линейной по состояниям дискретной системы Вольтерра, уравнение которой является весьма специальным случаем полученного выше описания, а именно — диагональным членом двойной суммы в фигурных скобках. При этом значения функции принадлежности естественным образом входят в коэффициенты уравнения. Для концентрации в дальнейшем изложении внимания на основном рассматриваемом здесь вопросе — учете нечеткости окрестностей по состоянию дискретно-временных систем — положим $a_{2\mu x}[t; \tau_1, \tau_2] = 1$. Тогда скалярная нечеткая линейная по состояниям дискретная система типа Вольтерра опишется уравнением

$$x[t] = \sum_{\tau=0}^{t-1} \mu[t; \tau]x[\tau] = \sum_{\tau \in T} \mu[t; \tau]x[\tau], \qquad (7)$$

вполне сопоставимым с уравнением (5) скалярной линейной нестационарной дискретной системы Вольтерра.

Таким образом, учет нечеткости окрестностей по состоянию даже стандартных одношаговых дискретно-временных систем приводит к системам типа Вольтерра, т. е. с нефиксированным последействием. Как только что показано, в случае линейных систем возможный естественный подход к учету указанной нечеткости состоит во введении функций принадлежности непосредственно в коэффициенты уравнения системы. Полученная система линейна по состояниям, но билинейна по совокупности состояний и функций принадлежности; это подчеркивается в связи с тем, что в некоторых приложениях функции принадлежности допускают трактовку как входные воздействия системы, что может представлять интерес при решении проблем управления нечеткими системами, а также при исследовании выполнимости для них полугруппового свойства. Отметим, что дискретные системы Вольтерра (1) рассматриваются в работах [11—14] как автономные, т. е. без учета входных воздействий.

В описании (7) нечеткая линейная дискретная система типа Вольтерра, как и система (5), удовлетворяет полугрупповому свойству, установленному в работе [14] для более общей системы (1). В то же время из содержательного смысла систем (7) как нечетких окрестностных следует, что выполнение для них полугруппового свойства может потребовать подчинения функций принадлежности определенным условиям. Так, расчет реакции системы (7) уже на втором шаге приводит к соотношению вида (приняты более подробные обозначения функций принадлежности) $\mu_{FSNX[0, 2]}[0] + \mu_{FSNX[0, 2]}[1]\mu_{FSNX[0, 1]}[0] = \mu_{FSNX[1, 2]}[1]\mu_{FSNX[0, 1]}[0]$; одноточечные множества естественно рассматривать как четкие; тогда условие, которому должна подчиняться функция принадлежности двухточечного множества, принимает вид, достаточно естественно интерпретируемый как с точки зрения теории систем, так и с точки зрения теории нечетких множеств: $\mu_{FSNX[0, 2]}[0] + \mu_{FSNX[0, 2]}[1] = 1$. Дальнейший расчет реакции системы приводит к разветвляющейся совокупности условий подобного рода и к нетрадиционной трактовке нечеткой динамики.

Объяснение особенности, проиллюстрированной приведенным примером, состоит в том, что характеристика дискретных систем Вольтерра как систем с нефиксированным последействием (в отличие от стандартных систем с конечным фиксированным последействием) позволяет расширить класс этих систем до более общего, чем в работах [13, 14], класса систем с изменяющейся структурой, текущее состояние которых зависит не стандартно от одного или фиксированного числа непосредственно предшествующих состояний, но и не от всей предыстории, т. е. не от всех состояний из временного промежутка от начального до текущего момента времени, а лишь от некоторого подмножества этих состояний, определяемого, вообще говоря, текущим состоянием, причем в общем случае неоднозначно. Некоторые условия выполнимости полугруппового свойства для этого более общего класса систем представлены в работе [21].

Обоснованное в работе [14] выполнение полугруппового свойства для рассмотренных там четких систем с изменяющейся структурой связано, среди прочего, с тем, что при замене функций принадлежности нечетких множеств характеристическими функциями четких последние при увеличении $t$ наращиваются без изменения их структуры. Функции же принадлежности могут изменять структуру при изменении $t$, что в общем случае приводит к системам с “более сильно” изменяющейся структурой, чем у рассмотренных в работах [13, 14], вследствие чего полугрупповое свойство для нечетких систем может нарушаться, если функции принадлежности не подчинить дополнительным требованиям, пример которых приведен ранее.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ранее неоднократно упоминалось имя итальянского математика Вито Вольтерра (1860—1940 гг.). Оно хорошо известно специалистам не только в фундаментальной математике, но и во многих прикладных областях [20]. В. Вольтерра является одним из создателей математической экологии. Широко известная математическая модель совместного существования двух биологических видов (популяций) — экосистемы "хищник — жертва", называемая моделью Вольтерра — Лотки, заложила фундамент математической теории биологических сообществ [22].

Дискретные аналоги первоначально непрерывных моделей, разрабатывавшихся Вольтерра, с появлением современных информационных технологий находят, подчас неожиданные, приложения в самых разнообразных областях. Ярким примером может служить исследование дискретных моделей Вольтерра—Лотки в связи с проблемами нелинейной динамики, синергетики, фракталов и хаоса [23]. Данная работа служит примером еще одного подтверждения сказанному.

Различные области применения четких дискретных систем Вольтерра указаны в работах [11—14]. В частности, в работе [13] показано, как с их помощью могут моделироваться вычислительные процессы. В этом смысле нечеткие дискретные системы типа Вольтерра могут применяться как модели "мягких" вычислительных процессов, оперирующих с нечеткими данными, которыми, как сейчас уже хорошо и широко понято, изобилуют техника, технологии, экономика, экология и другие прикладные области.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Месарович М., Такахара Я.* Общая теория систем: математические основы. — М.: Мир, 1978.
2. *Blyumin S.* Ceneralized argument-alphabet signal processing // Proc. 3rd Int. Conf. On Signal Processing. — Beijing, 1996. — P. 753 — 756.
3. *Fernandez F., Gutierrez J.* A Takagi-Sugeno model with fuzzy inputs viewed from multidimensional interval analysis // Fuzzy Sets and Systems. — 2003. — Vol. 135, No. 1. — P. 39 — 61.
4. *Bondia J., Pico J.* Analysis of linear systems with fuzzy parametric uncertainty // Fuzzy Sets and Systems. — 2003. — Vol. 135, No. 1. — P. 81—121.
5. *Блюмин С.Л.* Соотношения типа Кэли-Гамильтона в теории дискретно-аргументных систем // Автоматика и телемеханика. — 1981. — № 9. — С. 133—142.
6. *Блюмин С. Л., Фараджев Р. Г.* Линейные клеточные машины: подход пространства состояний (обзор) // Там же. — 1982. — № 2. — С. 125—163.
7. *Блюмин С. Л., Корнеев А. М.* Дискретно-аргументное моделирование систем обработки информации и управления. — Липецк: ЛГТУ, 1993.
8. *Блюмин С. Л., Шмырин А. М.* От систем на графах к окрестностным системам // Тр. Всеросс. конф. "Математическое моделирование систем. Методы, приложения и средства". — Воронеж: ВГУ, 1998. — С. 33—41.
9. *Блюмин С. Л., Шмырин А. М., Шмырин Д.А.* Новое направление в моделировании систем: окрестностные модели // Докл. Междунар. науч.-тех. конф. "Программное обеспечение автоматизированных систем управления". — Липецк: ЛГТУ, 2000. — С. 15—19.
10. *Блюмин С. Л., Шмырин А. М.* Нечеткие окрестностные системы: модельный пример // Современные проблемы информатизации в непромышленной сфере и экономике: Сб. тр. — Воронеж: ВГТУ, 2003. — Вып. 8. — С. 93—94.
11. *Колмановский В. Б., Родионов А. М.* Об устойчивости некоторых дискретных процессов Вольтерра // Автоматика и телемеханика. — 1995. — № 2. — С. 3—13.
12. *Колмановский В.Б.* О применении второго метода Ляпунова к разностным уравнениям Вольтерра // Там же. — 1995. — № 11. — С. 50—64.
13. *Гайшун И. В.* Дискретные уравнения с изменяющейся структурой и устойчивость их решений // Дифференциальные уравнения. — 1997. — Т. 33, № 12. — С. 1607—1614.
14. *Борухов В. Т., Гайшун И.В.* Вложимость нелинейных дискретных уравнений с изменяющейся структурой в линейные системы // Там же. — 1999. — Т. 35, № 9. — С. 1207—1215.
15. *Klement E., Mesiar R., Pap E.* Measure-based aggregation operators // Fuzzy Sets and Systems. — 2004. — Vol. 142, No. 1. — P. 3—14.
16. *Calvo T., Pradera A.* Double aggregation operators // Ibid. — 2004. — Vol. 142, No. 1. — P. 15—33.
17. *Блюмин С. Л., Шуйкова И. А.* Модели и методы принятия решений в условиях неопределенности. — Липецк: ЛЭГИ, 2001. — 139 с.
18. *Блюмин С. Л., Шуйкова И. А., Сараев П. В., Черпаков И. В.* Нечеткая логика: алгебраические основы и приложения. — Липецк: ЛЭГИ, 2002. — 111 с.
19. *Блюмин С. Л., Шмырин А. М.* Нечеткие окрестностные конечные системы // Современные методы теории краевых задач: Матер. Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения — XIV". — Воронеж: ВГУ, 2003. — С. 26.
20. *Блюмин С. Л., Шмырин А. М.* Дискретные математические модели Вольтерра в экологии и других областях // Экология ЦЧО РФ. — 2003. — № 2 (11). — С. 16—18.
21. *Блюмин С. Л.* Свойство композиции переходов состояний для специального класса дискретных систем // Современные методы теории краевых задач: Матер. Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения — XIV". — Воронеж: ВГУ, 2003. — С. 25—26.
22. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. — М.: Наука, 1976. — 345 с.
23. *Дискретная* система Вольтерра — Лотки // В кн.: Пайтген Х.-О., Рихтер П.Х. Красота фракталов. — М.: Мир, 1993. — 176 с.


☎ *(0742) 32-81-33*

*E-mail: amsh@lipetsk.ru* ❑