УДК 62-501.52

ОБ УСЛОВИЯХ ГРУБОСТИ НЕУСТОЙЧИВЫХ НЕАВТОНОМНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В СМЫСЛЕ СОХРАНЕНИЯ ХАРАКТЕРА УСТОЙЧИВОСТИ

В.П. Жуков

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Рассмотрены условия, при которых неустойчивость состояния равновесия неавтономных линейных динамических систем произвольного порядка переходит при определенного класса нелинейных возмущениях их правых частей в неустойчивость состояния равновесия соответствующих нелинейных возмущенных динамических систем (грубость неустойчивых неавтономных линейных систем в смысле сохранения характера устойчивости). Приведены достаточные условия такой грубости относительно некоторых классов нелинейных возмущений.

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Будем рассматривать грубость неавтономной линейной динамической системы произвольного порядка n

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j, \quad i = 1, ..., n, \tag{1}$$

или в векторном виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n,$$

где $\mathbf{A}(t)$ — квадратная матрица $n \times n$ с непрерывно зависящими от аргумента t вещественными элементами $a_{ij}(t)$, $i, j = 1, ..., n$, которые в общем случае отличны от констант. Точка $\mathbf{x} = 0$, очевидно, точка равновесия системы (1).

Наряду с исходной (невозмущенной) системой (1) будем рассматривать возмущенную систему

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \tag{2}$$

где возмущение описывается векторной функцией $\varphi(\mathbf{x}, t)$, $\varphi(0, t) = 0$, компоненты $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$, $\varphi_i(0, t) = 0$, $i = 1, ..., n$, которой определены на множестве $\mathbf{G}_p = \mathbf{G} \times \mathbf{R}^+ \subset \mathbf{R}^{n+1}$ ($\mathbf{R}^+ = [0, \infty)$ — положительная полуось аргумента t, $\mathbf{G} \subseteq \mathbf{R}^n$ — область, содержащая точку $\mathbf{x} = 0$) и непрерывны в $\mathbf{G}_p$ по совокупности переменных $x_1, ..., x_n, t$ вместе со своими первыми частными производными $\partial\varphi_i(\mathbf{x}, t)/\partial x_j$, $i, j = 1, ..., n$ ($\varphi_i(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{C}^1_{\mathbf{x}}$, $i = 1, ..., n$; $\mathbf{C}^1_{\mathbf{x}}$ — наиболее широкий класс непрерывно дифференцируемых по переменным $x_1, ..., x_n$ функций, включающий в себя как класс аналитических функций, так и класс всех неаналитических функций, непрерывно дифференцируемых по переменным $x_1, ..., x_n$ не менее одного раза). При указанных условиях на функции $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$, $i = 1, ..., n$, для любой точки $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \mathbf{G}_p$ существует [1] единственное решение системы (2), проходящее через эту точку и максимально продолженное по t в пределах множества $\mathbf{G}_p$. Пусть эти функции $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$ при любом $t \in \mathbf{R}^+$ удовлетворяют также условиям

$$\left.\frac{\partial\varphi_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}=0} = 0, \quad i, j = 1, ..., n. \tag{3}$$

Условия $\varphi_i(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{C}^1_{\mathbf{x}}$, $\varphi_i(0, t) = 0$, $i = 1, ..., n$, в совокупности с условиями (3) назовем основными условиями, наложенными на функции $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$. Основные условия обеспечивают при любом $t \in \mathbf{R}^+$ строгую нелинейность каждой функции $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$, не равной тождественно нулю, по переменным $x_1, ..., x_n$, т. е. обеспечивают ее нелинейность при отсутствии в ней линейной составляющей по этим переменным. Действительно, из условий $\varphi_i(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{C}^1_{\mathbf{x}}$, $i = 1, ..., n$, следует, что при любом $t \in \mathbf{R}^+$ приращение $\Delta\varphi_i(\mathbf{x}, t) = \varphi_i(\mathbf{x}, t) - \varphi_i(0, t) = \varphi_i(\mathbf{x}, t)$ каждой функции $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$ при переходе из точки $(0, t) \in \mathbf{G}_p$ в точку $(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{G}_p$ представимо в виде [2, 3]

$$\Delta\varphi_i(\mathbf{x}, t) = \varphi_i(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial\varphi_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j}\bigg|_{\mathbf{x}=0} + 0_i(\mathbf{x}, t),$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0} \frac{0_i(\mathbf{x}, t)}{|\mathbf{x}|} = 0, \quad i = 1, ..., n.$$

При условиях (3) первый член в правой части этого соотношения (главная линейная часть функции $\varphi_i(x, t) = \Delta\varphi_i(\mathbf{x}, t)$ в точке $\mathbf{x} = 0$) равен нулю, из чего следует, что

$$\varphi_i(\mathbf{x}, t) = 0_i(\mathbf{x}, t), \quad \lim_{\mathbf{x}\to 0} \frac{0_i(\mathbf{x}, t)}{|\mathbf{x}|} = 0, \quad i = 1, ..., n.$$

Это означает, что функции $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$ не содержат линейной составляющей и поэтому при любом $t \in \mathbf{R}^+$ действительно являются строго нелинейными по переменным $x_1, ..., x_n$.

Дополнительная характеристика рассматриваемых классов возмущающих функций $\varphi(\mathbf{x}, t)$ будет приведена в § 1 (пп. 1.1 и 1.2, где в виде двух теорем даются соответствующие двум рассматриваемым классам возмущений $\varphi(\mathbf{x}, t)$ условия грубости систем вида (1)).

Если некоторая невозмущенная динамическая система имеет точку равновесия $\mathbf{x} = 0$ одного из возможных характеров устойчивости (асимптотическая устойчивость, неасимптотическая устойчивость, неустойчивость) и нас интересуют лишь условия, при которых точка равновесия $\mathbf{x} = 0$ возмущенной системы будет иметь такой же характер устойчивости, то возникает понятие грубости невозмущенной системы в смысле сохранения характера устойчивости. При исследовании конкретных динамических систем чаще возникает вопрос именно о сохранении возмущенной системой характера устойчивости, а не о топологической эквивалентности фазовых портретов возмущенной и невозмущенной систем (т. е. о структурной устойчивости невозмущенной системы), требующей существования соответствующего гомеоморфизма, обеспечивающего указанную топологическую эквивалентность.

При исследовании условий грубости невозмущенных систем (1) будем исходить из следующего определения.

Определение. *Невозмущенную неавтономную линейную динамическую систему* (1) *будем называть грубой в смысле сохранения характера устойчивости по отношению к нелинейным возмущениям* $\varphi(\mathbf{x}, t)$ *рассматриваемого класса, если характер устойчивости точки равновесия* $\mathbf{x} = 0$ *возмущенной системы остается таким же, как и у точки равновесия* $\mathbf{x} = 0$ *невозмущенной системы.*♦

В определении имеется в виду лишь факт сохранения характера устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ (например, если точка $\mathbf{x} = 0$ системы (1) асимптотически устойчива или неустойчива, то и точка $\mathbf{x} = 0$ системы (2) соответственно асимптотически устойчива или неустойчива). При этом не предполагается существование гомеоморфизма, осуществляющего топологическую эквивалентность фазовых портретов невозмущенной и возмущенной систем, т. е. данное в определении понятие грубости не является определением грубости в смысле структурной устойчивости [4], исследование условий существования которой и их применение связаны с большими трудностями (примером могут служить условия, полученные А.А. Андроновым и Л.С. Понтрягиным для систем второго порядка [5, 6]).

Цель статьи состоит в том, чтобы указать свойства матрицы $\mathbf{A}(t)$, обеспечивающие условия грубости (в смысле данного определения) неустойчивых невозмущенных систем (1) по отношению к рассматриваемым классам нелинейных возмущений $\varphi(\mathbf{x}, t)$.

1. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ГРУБОСТИ НЕУСТОЙЧИВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ (1)

Рассмотрим условия грубости неустойчивых динамических систем (1) по отношению к двум классам возмущающих нелинейных функций $\varphi(\mathbf{x}, t)$.

Пусть оба эти класса (назовем их классами K_1 и K_2) удовлетворяют описанным во Введении основным условиям ($\varphi_i(\mathbf{x}, t) \in \mathbf{C}^1_{\mathbf{x}}$, $\varphi_i(0, t) = 0$, $i = 1, ..., n$; функции $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяют соотношению (3)); кроме того, каждый их этих классов удовлетворяет своему дополнительному условию, рассматриваемому далее в одном из пп. 1.1 и 1.2. В этих же подразделах в теоремах 1 и 2 в терминах свойств матрицы $\mathbf{A}(t)$ приводятся два достаточных условия грубости неустойчивых систем (1), соответствующие двум рассматриваемым классам возмущений $\varphi(\mathbf{x}, t)$.

1.1. Сначала укажем дополнительное условие, предъявляемое к нелинейным возмущениям $\varphi(\mathbf{x}, t)$ класса K_1. Оно заключается в том, что для функции $\varphi(\mathbf{x}, t)$ из класса K_1 можно указать такую непрерывную определенно отрицательную функцию $w(\mathbf{x})$ ($w(0) = 0$, $w(\mathbf{x}) < 0$ при $\mathbf{x} \neq 0$), что в некоторой окрестности ε точки $\mathbf{x} = 0$ при любом $t \in \mathbf{R}^+$ выполняется соотношение

$$\operatorname{div}\varphi(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \geqslant w(\mathbf{x}). \qquad (4)$$

Заметим, что из условия (3) следует $\operatorname{div}\varphi(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=0} = 0$ при любом $t \in \mathbf{R}^+$. Это определяет характер функции $\operatorname{div}\varphi(\mathbf{x}, t)$ в окрестности точки $\mathbf{x} = 0$: при любом фиксированном значении $t \in \mathbf{R}^+$ $\operatorname{div}\varphi(\mathbf{x}, t)$ как непрерывная функция аргумента $\mathbf{x}$ проходит в точке $\mathbf{x} = 0$ через нулевое значение. Заметим также, что $\operatorname{div}\mathbf{A}(t)\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t) = q(t)$ как след матрицы $\mathbf{A}(t)$ является непрерывной функцией лишь аргумента t.

Имеет место следующая теорема, дающая достаточные условия грубости неустойчивых неавтономных линейных систем (1) по отношению к нелинейным возмущениям $\varphi(\mathbf{x}, t)$ из класса K_1.

Теорема 1. *Если матрица* $\mathbf{A}(t)$*, соответствующая системе* (1)*, такова, что* $\operatorname{div}\mathbf{A}(t)\mathbf{x} = q(t)$ *как непрерывная функция аргумента* $t \in \mathbf{R}^+$ *ограничена снизу положительной константой* ($\operatorname{div}\mathbf{A}(t)\mathbf{x} = q(t) \geqslant C = \text{const} > 0$)*, то невозмущенная неавтономная линейная система* (1)*, имея неустойчивую точку равновесия* $\mathbf{x} = 0$*, является по отношению к возмущениям* $\varphi(\mathbf{x}, t)$ *из класса* K_1 *грубой в смысле сохранения характера устойчивости.*♦

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Рассмотрим пример применения теоремы 1. Пусть необходимо исследовать грубость в смысле сохранения характера устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ неавтономной линейной системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -4x_1(1 + e^{-t}) - 3x_2 + 7x_3,\\ \dot{x}_2 &= (5x_1 - 4x_2 + x_3)(1 + e^{-t}),\\ \dot{x}_3 &= 8x_1 + 7x_2 + 10x_3(1 + e^{-t}).\end{aligned} \qquad (5)$$

Так как для исследуемой системы уравнений имеем $q(t) = \operatorname{div}\mathbf{A}(t)\mathbf{x} = -4(1 + e^{-t}) - 4(1 + e^{-t}) + 10(1 + e^{-t}) = 2(1 + e^{-t}) > 2 > 0$, т. е. $q(t) > 2$ при любом $t \in \mathbf{R}^+$, то согласно теореме 1 рассматриваемая система, имея неустойчивую точку равновесия $\mathbf{x} = 0$, является по отношению к возмущениям $\varphi(\mathbf{x}, t)$ класса K_1 грубой в смысле сохранения характера устойчивости. Это, очевидно, позволяет утверждать, что точка равновесия $\mathbf{x} = 0$ любой нелинейной системы, полученной возмущением системы (5) нелинейной функцией $\varphi(\mathbf{x}, t)$, является неустойчивой, если эта функция принадлежит классу K_1. В связи с этим рассмотрим нелинейную систему

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -4x_1(1 + e^{-t}) - 3x_2 + 7x_3 - 3x_1x_2^2,\\ \dot{x}_2 &= (5x_1 - 4x_2 + x_3)(1 + e^{-t}) - 3x_1^2x_2,\\ \dot{x}_3 &= 8x_1 + 7x_2 + 10x_3(1 + e^{-t}) - x_3^3(1 + e^{-t}),\end{aligned} \qquad (6)$$

полученную возмущением системы (5) нелинейной функцией $\varphi(\mathbf{x}, t)$ с компонентами $\varphi_1(\mathbf{x}, t) = -3x_1x_2^2$, $\varphi_2(\mathbf{x}, t) = -3x_1^2x_2$, $\varphi_1(\mathbf{x}, t) = -x_3^3(1 + e^{-t})$. Эта функция удовлетворяет основным условиям. Проверим, принадлежит ли она классу K_1. Так как

$$\operatorname{div}\varphi(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} = -3x_2^2 - 3x_1^2 - 3x_3^2(1 + e^{-t}),$$

то функция $\varphi(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет дополнительному условию: при любом $t \in \mathbf{R}^+$ $\operatorname{div}\varphi(\mathbf{x}, t) \geqslant w(\mathbf{x}) = -3x_2^2 - 3x_1^2 - 6x_3^2$, где $w(\mathbf{x})$ — определенно отрицательная функция. Поэтому функция $\varphi(\mathbf{x}, t)$ принадлежит к классу K_1. Так как система (5) согласно теореме 1 неустойчива и груба в смысле сохранения характера устойчивости по отношению к возмущениям класса K_1, то, очевидно, неустойчивой будет и точка равновесия $\mathbf{x} = 0$ возмущенной системы (6).

1.2. Укажем теперь дополнительное условие, предъявляемое к возмущениям $\varphi(\mathbf{x}, t)$ класса K_2. Оно заключается в том, что для функции $\varphi(\mathbf{x}, t)$ из класса K_2 в некоторой окрестности ε точки $\mathbf{x} = 0$ при любом $t \in \mathbf{R}^+$ выполняется соотношение

$$\operatorname{div}\varphi(\mathbf{x}, t) \geqslant 0, \qquad (7)$$

включая тождественное равенство нулю. При этом $\operatorname{div}\varphi(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=0} = 0$ при любом $t \in \mathbf{R}^+$, что следует из условия (3).

Следующая теорема дает достаточное условие грубости неустойчивых неавтономных систем (1) по отношению к нелинейным возмущениям $\varphi(\mathbf{x}, t)$ из класса K_2.

Теорема 2. *Если матрица* $\mathbf{A}(t)$*, соответствующая системе* (1)*, такова, что* $\operatorname{div}\mathbf{A}(t)\mathbf{x} = q(t)$ *как непре-*

рывная функция аргумента $t \in \mathbf{R}^+$, не удовлетворяя[1] *условию теоремы 1* ($\mathrm{div}\mathbf{A}(t)\mathbf{x} = q(t) \geqslant C = \mathrm{const} > 0$)*, удовлетворяет условию*

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t q(\tau)d\tau = \infty, \qquad (8)$$

то невозмущенная неавтономная линейная система (1)*, имея неустойчивую точку равновесия* $\mathbf{x} = 0$*, является по отношению к возмущениям* $\varphi(\mathbf{x}, t)$ *из класса* K_2 *грубой в смысле сохранения характера устойчивости.*♦

Доказательство приведено в Приложении. Заметим, что при удовлетворении условию теоремы 2 функция $q(t)$ может принимать положительные значения не обязательно во всех точках множества $\mathbf{R}^+$, а лишь на некотором его подмножестве $\mathbf{M} \subset \mathbf{R}^+$; на множестве $\mathbf{R}^+/\mathbf{M}$ эта функция может принимать либо только нулевые значения, либо отрицательные и нулевые. При этом характер изменения непрерывной функции $q(t)$ при $t \to \infty$ может быть произвольным: она может как иметь обычный предел $\lim\limits_{t\to\infty} q(t)$, так и не иметь его, имея всегда [7] нижний предел

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} q(t) = \lim_{t\to\infty}\inf_{t\le\xi<\infty} q(\xi)$$

и верхний предел

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} q(t) = \lim_{t\to\infty}\sup_{t\le\xi<\infty} q(\xi).$$

Рассмотрим пример применения теоремы 2. Исследуем грубость в смысле сохранения характера устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ неавтономной нелинейной системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1\frac{2}{1+t} + 4x_2 + 5x_3,\\ \dot{x}_2 &= (6x_1 - x_2 + 8x_3)\frac{1}{1+t}, \qquad (9)\\ \dot{x}_3 &= 7x_1 + 3x_2 + x_3\frac{7}{1+t}.\end{aligned}$$

Для системы (9) имеем $q(t) = \mathrm{div}\mathbf{A}(t)\mathbf{x} = -2/(1 + t) - 1/(1 + t) + 7/(1 + t) = 4/(1 + t)$. Так как функция $q(t)$не удовлетворяет условию теоремы 1 (при любом $t \in \mathbf{R}^+$ $q(t) \geqslant C = \mathrm{const} > 0$) и удовлетворяет условию (8), ибо

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t q(\tau)d\tau = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \frac{4}{1+\tau}\tau = \infty,$$

то согласно теореме 2 система (9), имея неустойчивую точку равновесия $\mathbf{x} = 0$, является по отношению к возмущениям $\varphi(\mathbf{x}, t)$ класса K_2 грубой в смысле сохранения характера устойчивости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Указаны два непересекающихся класса неустойчивых неавтономных линейных систем (1), которые являются грубыми в смысле сохранения характера устойчивости относительно соответствующих классов K_1 и K_2 нелинейных возмущений $\varphi(\mathbf{x}, t)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Нужно доказать, что если $\mathbf{A}(t)$ — матрица, соответствующая невозмущенной системе (1), а функция $q(t) = \mathrm{div}\mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ удовлетворяет условию

$$q(t) \geqslant C = \mathrm{const} > 0, \qquad (\text{П}.1)$$

то система (1), имея неустойчивую точку равновесия $\mathbf{x} = 0$, является по отношению к возмущениям $\varphi(\mathbf{x}, t)$ класса K_1 грубой в смысле сохранения характера устойчивости, т. е. при всех возмущениях $\varphi(\mathbf{x}, t) \in K_1$ неустойчивой является также точка равновесия $\mathbf{x} = 0$ возмущенной системы (2).

Условие (П.1) означает [8], что точка равновесия $\mathbf{x} = 0$ системы (1) неустойчива (см. в работе [8] следствие теоремы 2.5 или теорему 2.8). С учетом этого условия, кроме того, имеем для дивергенции от правой части системы (2)

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x}, t)) &= \mathrm{div}\mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathrm{div}\varphi(\mathbf{x}, t) \geqslant\\ &\geqslant C + \mathrm{div}\varphi(\mathbf{x}, t), \qquad (\text{П}.2)\end{aligned}$$

где $\varphi(\mathbf{x}, t) \in K_1$. Согласно дополнительному условию к возмущениям $\varphi(\mathbf{x}, t) \in K_1$ в некоторой (соответствующей возмущению $\varphi(\mathbf{x}, t)$) окрестности ε точки $\mathbf{x} = 0$ при любом $t \in \mathbf{R}^+$ выполняется соотношение (4) $\mathrm{div}\varphi(\mathbf{x}, t) \geqslant w(\mathbf{x})$, где $w(\mathbf{x})$ — непрерывная в окрестности ε определенно отрицательная функция ($w(\mathbf{x}) = 0$ при $\mathbf{x} = 0$, $w(\mathbf{x}) < 0$ при $\mathbf{x} \ne 0$). Тогда из соотношения (П.2) получаем, что в окрестности ε при любом $t \in \mathbf{R}^+$

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x}, t)) &\geqslant C + \mathrm{div}\varphi(\mathbf{x}, t) \geqslant\\ &\geqslant C + w(\mathbf{x}) = w_1(\mathbf{x}), \qquad (\text{П}.3)\end{aligned}$$

где $w_1(\mathbf{x}) = C + w(\mathbf{x})$ — непрерывная в окрестности ε функция, причем $w_1(0) = C + w(0) = C > 0$. Значения функции $w_1(\mathbf{x})$ могут быть положительны не во всех точках $\mathbf{x} \in \varepsilon$. Но существует такая окрестность $\varepsilon_1 \subset \varepsilon$ точки $\mathbf{x} = 0$, что $w_1(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \in \varepsilon_1$, ибо функция $w_1(\mathbf{x})$ не-

---

[1] В теореме 2 условие $q(t) \geqslant C = \mathrm{const} > 0$, из которого, очевидно, соотношение (8) следует, исключено потому, что это условие уже использовано в теореме 1 для получения условия грубости по отношению к возмущениям $\varphi(\mathbf{x}, t)$ класса K_1, который шире класса K_2, используемого в теореме 2. Сказанное означает, что множества грубых систем (1), соответствующие теоремам 1 и 2, не пересекаются.

прерывна в окрестности ε и $w_1(0) = C > 0$. Соотношение (П.3), будучи справедливым при $\mathbf{x} \in \varepsilon$, очевидно, справедливо и при $\mathbf{x} \in \varepsilon_1 \subset \varepsilon$ и при этом в соотношении (П.3) $w_1(\mathbf{x}) > 0$. Таким образом, в окрестности ε_1 точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ возмущенной системы (2) дивергенция от правой части этой системы при любом $t \in \mathbf{R}^+$ не меньше положительной непрерывной функции $w_1(\mathbf{x})$. Согласно работе [8] точка равновесия $\mathbf{x} = 0$ этой возмущенной системы неустойчива. Итак, показано, что система (1), имея при условии (П.1) неустойчивую точку равновесия $\mathbf{x} = 0$, является по отношению к возмущениям $\varphi(\mathbf{x}, t)$ класса K_1 грубой в смысле сохранения характера устойчивости. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Необходимо показать, что если функция $q(t) = \mathrm{div}\mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ удовлетворяет условию (8) теоремы 2, то невозмущенная неавтономная линейная система (1), имея неустойчивую точку равновесия $\mathbf{x} = 0$, является по отношению к возмущениям $\varphi(\mathbf{x}, t)$ класса K_2 грубой в смысле сохранения характера устойчивости: при любом возмущении $\varphi(\mathbf{x}, t) \in K_2$ неустойчивой является и точка равновесия $\mathbf{x} = 0$ возмущенной системы (2).

Условие (8) означает, что точка равновесия $\mathbf{x} = 0$ невозмущенной системы (1) неустойчива (теорема 2.8 в работе [8]). Покажем, что тогда точка равновесия $\mathbf{x} = 0$ возмущенной системы (2) также будет неустойчивой при любом возмущении $\varphi(\mathbf{x}, t) \in K_2$. Для этого покажем, что дивергенция от правой части системы (2)

$$\mathrm{div}(\mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x}, t)) = \mathrm{div}\mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathrm{div}\varphi(\mathbf{x}, t) = \\ = q(t) + \mathrm{div}\varphi(\mathbf{x}, t)$$

удовлетворяет следующему соотношению

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \inf_{\mathbf{x}\in\mathbf{B}} (q(s) + \mathrm{div}\varphi(\mathbf{x}, s))ds = \infty, \qquad (\text{П}.4)$$

где $\mathbf{B}$ — любое компактное множество, которое содержит точку $\mathbf{x} = 0$ и принадлежит при этом окрестности ε этой точки (в окрестности ε при любом $t \in \mathbf{R}^+$ выполняется условие (7) $\mathrm{div}\varphi(\mathbf{x}, t) \geqslant 0$).

Так как при любом $t \in \mathbf{R}^+$ функция $q(t)$ не зависит от $\mathbf{x}$ и $\mathrm{div}\varphi(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=0} = 0$, а в окрестности ε $\mathrm{div}\varphi(\mathbf{x}, t) \geqslant 0$ при любом $t \in \mathbf{R}^+$, то тогда

$$\inf_{\mathbf{x}\in\mathbf{B}} (q(t) + \mathrm{div}\varphi(\mathbf{x}, t)) \geqslant \inf_{\mathbf{x}\in\mathbf{B}} q(t) = q(t), \quad t \in \mathbf{R}^+$$

и, следовательно, учитывая также условие (8) теоремы (2), получаем

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \inf_{\mathbf{x}\in\mathbf{B}} (q(s) + \mathrm{div}\varphi(\mathbf{x}, s))ds \geqslant \lim_{t\to\infty} \int_0^t q(s)ds = \infty.$$

Таким образом, соотношение (П.4) при условии теоремы 2 выполняется, что согласно теореме 2.7 из работы [8] означает неустойчивость точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ системы (2). Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1974.
2. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. — М.: Наука, 1968. — Т. 1.
3. *Шилов Г.Е.* Математический анализ (функции нескольких вещественных переменных). — М.: Наука, 1972.
4. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
5. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.
6. *Андронов А.А.* Собрание сочинений. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1956.
7. *Математическая* энциклопедия. — М.: Сов. энциклопедия, 1977. — Т. 1. — С. 670.
8. *Жуков В.П.* Полевые методы в исследовании нелинейных динамических систем. — М.: Наука, 1992.

☎ *(495) 334-89-61, e-mail: vpzhukov@ipu.ru*

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским. ❑

УКАЗ

ПРЕЗИДЕНТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

О награждении государственными наградами Российской Федерации

За заслуги в научной деятельности присвоить почетное звание

«ЗАСЛУЖЕННЫЙ ДЕЯТЕЛЬ НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

КУЛЬБЕ Владимиру Васильевичу — доктору технических наук, профессору, заведующему лабораторией Института проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук, город Москва.

Президент Российской Федерации
В. Путин

Москва, Кремль
3 апреля 2008 года

Поздравляем члена редколлегии нашего журнала Владимира Васильевича Кульбу с присвоением почетного звания. Желаем ему доброго здоровья и дальнейших творческих успехов.

Редколлегия
Редакция