УДК 517.929.4:517.977.54

КОНТРОЛИРУЮЩИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ В ЗАДАЧЕ СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ[1]

Н.О. Седова

Ульяновский государственный университет

Рассмотрена задача стабилизации управляемых систем, описываемых нелинейными функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего типа. Для построения стабилизирующего управления применяются так называемые контролирующие вспомогательные функционалы, свойства которых позволяют установить возможность стабилизации и в некоторых случаях построить стабилизирующие законы управления в явном виде. Обсуждены «обратная оптимальность» и робастность построенных управлений.

ВВЕДЕНИЕ

Построение законов управления с заданными свойствами представляет собой одну из наиболее трудных задач в нелинейном случае. Метод Ляпунова, широко применяемый для исследования устойчивости нелинейных систем, в последние годы получил новый импульс распространения в теории управления благодаря так называемой контролирующей функции Ляпунова (КЛФ — от англ. CLF — control Lyapunov function, см., например, работы [1—9]). Если существует КЛФ, то существует и непрерывный закон управления, такой, что положение равновесия управляемой системы глобально асимптотически устойчиво; при этом для линейной по управлению системы соответствующий закон можно в явном виде выразить через КЛФ. Кроме того, полученное управление оказывается оптимальным по отношению к некоторому функционалу качества, определяемому по данной КЛФ. Это свойство управления играет важную роль в установлении робастности замкнутой системы, что послужило поводом для рассмотрения так называемой *обратной задачи оптимального управления* [3, 6, 7], когда по заданному закону управления требуется определить минимизируемый на этом управлении функционал качества. Эта проблема рассматривалась отечественными авторами как составная часть задачи синтеза стабилизирующего управления, в том числе оптимального по отношению к некоторому функционалу либо гарантирующего его априорную оценку (см., например, работы [10—13]).

В данной работе рассматриваются особенности применения КЛФ к функционально-дифференциальным уравнениям с конечным запаздыванием, а также возможные пути развития этого метода в направлении ослабления требований к КЛФ. Полученные утверждения и формулы развивают и обобщают ряд результатов из работ [4—6, 14, 15].

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В работе используются следующие обозначения: R^n — действительное n-мерное пространство с нормой $|\cdot|$, $r > 0$ — фиксированная постоянная, $\mathbf{C}$ — пространство $C([-r, 0], R^n)$ функций φ с нормой $\|\varphi\| = \max\limits_{-r \le s \le 0} |\varphi(s)|$ и для $M > 0$ определяется шар $\mathbf{C}_M = \{\varphi \in \mathbf{C}: \|\varphi\| < M\}$. Если $a > 0$, $x \in C([-r, a), R^n)$ и $t \in [0, a)$, то $x_t \in \mathbf{C}$: $x_t(s) = x(t + s)$, $s \in [-r, 0]$. Непрерывная скалярная функция α принадлежит классу $\mathcal{K}$, если она строго возрастает и $\alpha(0) = 0$; α

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект N 05-01-00765, и программы «Ведущие научные школы», проект НШ-6667.2006.1.

принадлежит классу $\mathcal{K}_\infty$, если вдобавок $\alpha(u) \to \infty$ при $u \to \infty$.

Рассматривается нелинейная система с запаздыванием вида

$$\dot{x}(t) = f(x_t) + g(x_t)u, \qquad (1)$$

где функционалы $f, g \in C(\mathbf{C}, R^n)$ ограничены на ограниченных множествах, $u \in R$ — управление, и $f(0) = 0$, так что при отсутствии управления система допускает нулевое решение. Требуется построить управление в виде $u(t) = k(x_t)$ так, что решение $x = 0$ системы (1) (глобально) асимптотически устойчиво (такое управление будем называть стабилизирующим).

Для изложения идеи построения рассмотрим сначала систему без запаздывания:

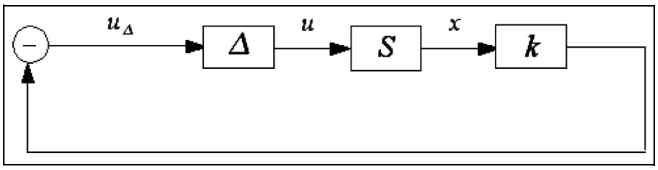
$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \qquad (1')$$

где $f, g \in C(R^n, R^n)$, $f(0) = 0$.

Пусть $V(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция со значениями в $R^+ = [0, +\infty)$, $V(x) \geqslant \beta(|x|)$ для некоторой $\beta \in \mathcal{K}_\infty$. Обозначим $L_fV = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T f$, $L_gV = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T g$ и предположим, что $\inf_{u \in R}\{L_fV + L_gVu\} < 0$ для всех $x \neq 0$. В этом случае $V(x)$ называется *контролирующей функцией Ляпунова* [1, 3, 9].

Определим управление в виде $k(x) = \underset{u \in R}{\operatorname{argmin}}\{|u|: L_fV + L_gVu \leqslant -\sigma(|x|)\}$ для некоторой $\sigma \in \mathcal{K}$. Тогда производная функции V в силу системы (1′) отрицательно определена, и нулевое решение системы (1′) (глобально) равномерно асимптотически устойчиво.

В зависимости от выбора «параметра» σ получаются различные законы управления. Известно, что каждой КЛФ соответствует какой-нибудь функционал качества, по отношению к которому она удовлетворяет уравнению Беллмана, а соответствующее управление $u = k(x)$ оптимально [3]. При этом управление $k(x)$ вычисляется непосредственно из функций V, f и g (уравнение Беллмана не используется). Это свойство получило название «обратной оптимальности» [3, 5, 7] и замечательно тем, во многих случаях гарантирует не только глобальную равномерную асимптотическую устойчивость для исследуемой системы, но и сохранение этого свойства в случае наличия неопределенности на входе системы, т. е. робастность управления. Понятие робастности по отношению к входным неопределенностям трактуется здесь следующим образом: пусть номинальная система S описывается уравнением (1′), рассмотрим систему с неопределенностью на входе (см. рисунок):



Структурная схема системы с неопределенностью Δ на входе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u, \\ u_\Delta &= -k(x), \\ \dot{z} &= p(t, z, u_\Delta), \\ u &= h(t, z, u_\Delta). \end{aligned} \qquad (1'')$$

Если стабилизирующее управление $u = -k(x)$ оптимально по отношению к функционалу качества вида $J = \int_0^\infty (q(x) + u^2)dt$, то устойчивость системы (1″) сохраняется для некоторого класса неопределенностей I. Этот класс включает в себя все неопределенности, удовлетворяющие неравенству $\dot{W}_\Delta(z) \leqslant u_\Delta u - \frac{1}{2}u_\Delta^2$ для некоторой неотрицательной функции $W_\Delta(z)$. В качестве простейших примеров неопределенностей класса I (неравенство выполняется при $W_\Delta \equiv 0$) можно привести следующие:

— неизвестный коэффициент при номинальном управлении $k \in (1/2, +\infty)$;

— будем говорить, что функция Φ: $R \times R^+ \to R$ принадлежит сектору (c_1, c_2), если $c_1s^2 < s\Phi(s, t) < c_2s^2$ для всех $s \neq 0$ и $t \geqslant 0$; тогда «статическая неопределенность», заданная соотношением $u = \Phi(u_\Delta, t)$, принадлежит классу I, если для нее $(c_1, c_2) \subset (1/2, +\infty)$.

2. КОНТРОЛИРУЮЩИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Для исследования устойчивости систем с запаздыванием применяются как функции Разумихина [16], так и функционалы Красовского [17] — отсюда получаем два различных варианта распространения изложенной идеи на управляемые системы с запаздыванием.

Здесь мы рассмотрим случай функционала V: $\mathbf{C} \to R^+$. Для вычисления производной функционала вдоль решений системы (1) используем понятие инвариантной производной [15]. Представим функцию $\varphi \in \mathbf{C}$ в виде пары $(\varphi(0), \psi)$, где $\psi(s) = \varphi(s)$ при $s \in [-r, 0)$. Эту пару мы можем рассматривать как элемент пространства $\hat{\mathbf{C}} = \{(x, \psi) \in$

$\in R^n \times C([-r, 0), R^n)$: $\psi(0-) = x\}$, изометричного **C**. Для простоты обозначений будем считать $\hat{\mathbf{C}}$ и **C** тождественными. Определим для функции $\varphi \in \mathbf{C}$ непрерывные продолжения вправо на $[0, \Delta)$: $\Phi(s) = \varphi(s)$, $s \in [-r, 0]$, $\Phi(s) \in C([0, \Delta), R^n)$, и пусть

$$\Psi_\Phi(z, y) = V(\varphi(0) + z, \psi_y),$$

где $z \in R^n$, $y > 0$, $\psi_y = \{\Phi(y + s), s \in [-r, 0)\}$.

Предположим теперь, что функционал $V(\varphi) \equiv V(\varphi(0), \psi)$ можно продолжить на множество $R^n \times Q([-r, 0), R^n)$, где $Q([-r, 0), R^n)$ — множество кусочно-непрерывных функций. Тогда для него можно определить n частных производных по $\varphi_i(0)$, образующих вектор $\dfrac{\partial V}{\partial\varphi(0)}$, и частную производную по функциональной составляющей $\partial_\psi V$:

$$\frac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi(0)} = \frac{\partial}{\partial z}\Psi_\Phi(0, +0),\ \partial_\psi V(\varphi) \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial y}\Psi_\Phi(0, +0).$$

Например, для $V(\varphi) = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\varphi_i^2(0) + \int\limits_{-r}^{0}\varphi_i^2(s)ds\right)$ имеем $\dfrac{\partial V}{\partial\varphi(0)} = (2\varphi_1(0), ..., 2\varphi_n(0))$, $\partial_\psi V = \sum\limits_{i=1}^{n}(\varphi_i^2(0) - \varphi_i^2(-r))$. Если функция Ψ непрерывна в нуле и предельное значение не зависит от продолжения Φ, то функционал V — инвариантно непрерывен, а если инвариантно непрерывны его частные производные, то он инвариантно дифференцируем [15].

Далее будем предполагать, что функционал V инвариантно дифференцируем во всем пространстве **C** (это предположение выполняется для большинства функционалов, традиционно используемых при исследовании устойчивости). В этом случае производная функционала V в силу системы (1) $\dot{V}_{(1)}(\varphi) = \left(\dfrac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi(0)}\right)^T(f(\varphi) + g(\varphi)u) + \partial_\psi V(\varphi)$. Положим $L_fV(\varphi) = \left(\dfrac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi(0)}\right)^T f(\varphi) + \partial_\psi V(\varphi)$, $L_gV(\varphi) = \left(\dfrac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi(0)}\right)^T g(\varphi)$.

Предположим теперь, что существует *контролирующий функционал Ляпунова—Красовского* (КЛКФ), согласно следующему определению.

Определение 1 [4]. Функционал V: $\mathbf{C} \to R^+$ является КЛКФ для системы (1), если существуют такие функции $\alpha \in \mathcal{K}$, β_1, $\beta_2 \in \mathcal{K}_\infty$, что для всех $\varphi \in \mathbf{C}$

$$\beta_1(|\varphi(0)|) \leqslant V(\varphi) \leqslant \beta_2(\|\varphi\|),$$
$$L_gV(\varphi) = 0 \Rightarrow L_fV(\varphi) \leqslant -\alpha(|\varphi(0)|).\blacklozenge$$

3. ПОСТРОЕНИЕ СТАБИЛИЗИРУЮЩИХ УПРАВЛЕНИЙ. ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Для обыкновенных дифференциальных уравнений с известной КЛФ существует ряд «универсальных формул» стабилизирующих управлений [7]. Некоторые из них применимы и к системам с запаздыванием. Например, аналог самой распространенной в литературе «универсальной формулы» [9] для системы (1) имеет вид [4]:

$$u_S(\varphi) = -K_S(\varphi)L_gV(\varphi), \qquad (2)$$

где
$$K_S(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{L_fV(\varphi) + \sqrt{(L_fV(\varphi))^2 + (L_gV(\varphi))^4}}{(L_gV(\varphi))^2}, \\ \qquad L_gV(\varphi) \neq 0; \\ 0, \qquad L_gV(\varphi) = 0. \end{cases}$$

Другая известная формула [2, 11] для системы (1) принимает вид [6]:

$$u_F(\varphi) = -K_F(\varphi)L_gV(\varphi), \qquad (3)$$

где
$$K_F(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{L_fV(\varphi) + \alpha(|\varphi(0)|)}{(L_gV(\varphi))^2}, \\ \qquad L_fV(\varphi) + \alpha(|\varphi(0)|) > 0; \\ 0, \quad L_fV(\varphi) + \alpha(|\varphi(0)|) \leq 0. \end{cases}$$

Заметим, что управление $u_S(\varphi)$ непрерывно, если V удовлетворяет *условию малого управления* [4, 9]: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $\varphi \in \mathbf{C}_\delta$ и некоторого u: $|u| < \varepsilon$ выполняется $L_fV + L_gVu < 0$. Если в формуле (2) заменить $(L_gV)^4$ на $(L_gV)^2$ (такая модификация часто используется), то управление $u_S(\varphi)$ может оказаться разрывным в нуле.

Третья известная формула имеет вид $u_D(\varphi) = -K_D(\varphi)L_gV(\varphi)$, где функция $K_D(\varphi) = \gamma(V(\varphi))$, $\gamma \in C(R^+, (0, +\infty))$ — такая, что $\lim\limits_{T\to\infty}\int\limits_0^T\gamma(s)ds = \infty$. Для того, чтобы управление u_D было стабилизирующим, нужно, чтобы $L_fV - \gamma(V)(L_gV)^2 < 0$. Существуют, однако, уравнения (в том числе и без запаздывания) и КЛФ такие, что это неравенство не может выполняться при всех значениях аргумента, независимо от выбора γ. Например, КЛФ $V(x) = x^2/2$ и уравнение $\dot{x}(t) = x^3(t) + x^2(t)u$. Чтобы избежать таких проблем, потребуем, чтобы для каждого $\Delta > 0$ выполнялось условие [4, 5]

$$\frac{L_f V}{(L_g V)^2} < c(\Delta) \text{ при } L_g V \neq 0,\ \varphi \in \mathbf{C}_\Delta. \qquad (4)$$

Для уравнения с запаздыванием характерна еще одна особенность: функционал $V(\varphi)$ может оставаться ограниченным при неограниченном возрастании нормы $\|\varphi\|$; это приводит к тому, что коэффициент $\gamma(V(\varphi))$ не обязательно гарантирует глобальную устойчивость. Например, для уравнения $\dot{x}(t) = x(t) + \frac{1}{1 + x^2(t-\tau)}u$ функционал $V(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi^2(0)$ является КЛКФ, но независимо от выбора коэффициента $\gamma(\cdot)$ производная $\dot{V}(\varphi) = \varphi^2(0) - \gamma(\varphi^2(0)) \times \times \frac{\varphi^2(0)}{(1 + \varphi^2(-\tau))^2}$ положительна при достаточно большом значении $|\varphi(-\tau)|$. Однако можно установить *полуглобальную асимптотическую устойчивость*, предположив, что начальные точки решений содержатся в шаре $\mathbf{C}_M$ для некоторого (произвольно большого) $M > 0$. В этом случае, если выполняется условие (4), то управление $u_D(\varphi)$ обеспечивает асимптотическую устойчивость нулевого решения для некоторой функции $\gamma(\cdot)$ (зависящей в общем случае от M) [4].

Рассмотрим теперь для законов управления, построенных по формулам (2) и (3), задачу «обратной оптимальности». Минимизируемый функционал будем искать в виде

$$J = \int_0^\infty (q(x_t) + p(x_t)u^2(t))dt, \qquad (5)$$

где функции $q(\varphi) \geqslant 0$ и $p(\varphi) > 0$ выражаются через заданный КЛКФ V и функционалы f и g.

Запишем уравнение Беллмана [15]:

$$0 = \min_{u \in R}\{q(\varphi) + p(\varphi)u^2 + L_f V(\varphi) + L_g V(\varphi)u\} =$$
$$= q(\varphi) + L_f V(\varphi) - \frac{(L_g V(\varphi))^2}{4p(\varphi)}. \qquad (6)$$

Если равенства (6) выполняются для некоторых $V(\varphi)$ и $u(\varphi)$, то управление $u(\varphi)$ — оптимальное по отношению к функционалу (5), а $V(\varphi)$ — функционал Беллмана, т. е. минимум функционала (5) вдоль решений системы (1) с начальной точкой φ (по всевозможным управлениям) равен $V(\varphi)$. На основе этих свойств доказываются следующие результаты (доказательства их довольно несложные и в целях уменьшения объема статьи опускаются).

Теорема 1. *Пусть* $V(\varphi)$ *— КЛКФ, функционалы* $K_S(\varphi)$ *и* $K_F(\varphi)$ *определяются соответственно формулами* (2) *и* (3)*. Тогда если выполняется условие* (4)*, то управление*

$$\hat{u}_S(\varphi) = -\hat{K}_S(\varphi)L_g V(\varphi) := -(c_0 + K_S(\varphi))L_g V(\varphi)$$
$$(c_0 \geqslant 0)$$

стабилизирует нулевое решение системы (1) *и минимизирует функционал* (5)*, в котором*

$$p_S(\varphi) = (2\hat{K}_S(\varphi))^{-1},$$
$$q_S(\varphi) = \frac{1}{2}(-L_f V(\varphi) + \sqrt{(L_f V(\varphi))^2 + (L_g V(\varphi))^4} +$$
$$+ c_0(L_g V(\varphi))^2),$$

а для управления $\hat{u}_F(\varphi) = -\hat{K}_F(\varphi)L_g V(\varphi) := -(c_0 + + 2K_F(\varphi))L_g V(\varphi)$ *функционалы с теми же свойствами определяются формулами*

$$p_F(\varphi) = 2(\hat{K}_F(\varphi))^{-1},$$
$$q_F(\varphi) = \max\{-L_f V(\varphi), \alpha(\varphi)\} + \frac{1}{2}c_0(L_g V(\varphi))^2. \blacklozenge$$

Заметим, что модификации формул (2) и (3), а также требование (4), связаны с необходимостью гарантировать ограниченность и неотрицательность функций $p(\varphi)$ и $q(\varphi)$.

Теорема 2. *Предположим, что:*

1) $u(\varphi) = -\frac{1}{2p(\varphi)}L_g V(\varphi)$ *— глобально стабилизирующее для системы* (1) *управление, оптимальное относительно функционала* (5)*, где* V *— КЛКФ для системы* (1);

2) *функционал* $1/p(\varphi)$ *ограничен на множествах* $\mathbf{C}_a$ *для всех* $a > 0$;

3) *функция* $\gamma \in C(R^+, (0, +\infty))$ *удовлетворяет неравенству* $\gamma(V(\varphi)) \geqslant 1/p(\varphi)$.

Тогда управление $\hat{u}_D(\varphi) = -\frac{1}{2}\gamma(V(\varphi))L_g V(\varphi)$ *является стабилизирующим и оптимальным по отношению к функционалу вида* (5)*, в котором*

$$p_D(\varphi) = 1,$$
$$q_D(\varphi) = \gamma(V(\varphi))\Big(\frac{1}{4}\gamma(V(\varphi))(L_g V(\varphi))^2 - L_f V(\varphi)\Big),$$

при этом функционал Беллмана равен $\bar{V}(\varphi) = = \int_0^{V(\varphi)} \gamma(s)ds. \blacklozenge$

Заметим, что при условии (4) управление $\hat{u}_D(\varphi)$ будет оптимальным и стабилизирующим с областью притяжения $\mathbf{C}_a$ также и для коэффициента $\gamma(\cdot) \geqslant 2(2c+1)$, где $c = c(a)$ — оценка из условия (4).

На основе представленных законов управления можно рассмотреть также и «прямую» задачу оптимальной стабилизации, т. е. построения стабилизирующего управления, минимизирующего функционал вида (5) с заданными функциями $q(\varphi) \geqslant 0$ и $p(\varphi) > 0$.

Рассмотрим закон управления $u_{qp}(\varphi) = -K_{qp}(\varphi)L_g V(\varphi)$, где

$$K_{qp}(\varphi) = \begin{cases} \dfrac{L_f V(\varphi) + \sqrt{(L_f V(\varphi))^2 + \dfrac{q(\varphi)}{p(\varphi)}(L_g V(\varphi))^2}}{(L_g V(\varphi))^2}, \\ \qquad L_g V(\varphi) \neq 0; \\ 0, \quad L_g V(\varphi) = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Нетрудно убедиться, что если функционал $u_{qp}(\varphi)$ непрерывен, то данный закон управления — глобально стабилизирующий. Кроме того, справедлива

Теорема 3. *Предположим, что* $V(\varphi)$ *— КЛКФ для системы* (1)*,* $\bar{V}(\varphi)$ *— функционал Беллмана для функционала* (5) *(т. е. удовлетворяет уравнению* (6)*). Тогда если для некоторой функции* $\beta \in \mathcal{K}$ *справедливо* $V = \beta(\bar{V})$*, то* $u_{qp}(\varphi)$ *— оптимальное относительно функционала* (5).♦

Нетрудно получить также следующий результат о робастности:

Теорема 4. *Управление* $u^r(t, \varphi) = \Phi(u(t, \varphi), t)$ *является стабилизирующим для системы* (1)*, если управление* $u(t, \varphi)$ *совпадает с любым из управлений* u_S, $\hat{u}_S$ *или* u_{qp}*, а функция* Φ *принадлежит сектору* $(1/2, +\infty)$. *Управление* $u^r_F(t, \varphi) = \Phi(u_F(t, \varphi), t)$ *является стабилизирующим для системы* (1)*, если функция* Φ *принадлежит сектору* $(1, +\infty)$.♦

Приведенные результаты обобщаются на случай $u \in R^m$, $1 < m \leqslant n$: в этом случае $L_g V$ есть вектор-столбец размерности m, а $p(\varphi)$ в интеграле (5) — матрица размера $m \times m$.

Пример 1. Рассмотрим линейную систему с квадратичным критерием качества:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_r x(t-r) + \int_{-r}^{0} G(s)x(t+s)ds + Bu,$$

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)u(t))dt,$$

где $x \in R^n$ и $u \in R^m$ (матрица Q предполагается положительно определенной). Нетрудно проверить, что если решения P, $D(s)$ и $R(s, v)$, $s, v \in [-r, 0]$, обобщенных уравнений Риккати [15] таковы, что функционал

$$V(\varphi) = \varphi^T(0)P\varphi(0) + 2\varphi^T(0)\int_{-r}^{0} D(s)\varphi(s)ds + \int_{-r}^{0}\int_{-r}^{0} \varphi^T(s)R(s, v)\varphi(v)dsdv$$

положительно определен, то он является КЛКФ, и формула (7) совпадает с формулой оптимального глобально стабилизирующего управления для линейной системы [15]: $u(\varphi) = -B^T(P\varphi(0) + \int_{-r}^{0} D(s)\varphi(s)ds)$.♦

4. ВОЗМОЖНЫЕ ОБОБЩЕНИЯ

В определении 1 свойства функционалов V и $L_f V$ определяются, исходя из классической теоремы Красовского об асимптотической устойчивости [17]. Обобщения условий этой теоремы можно применять и к контролирующим функционалам. В частности, можно использовать знакопостоянный функционал со знакопостоянной производной для построения (локально) стабилизирующего управления системой (1).

Это осуществляется на основе соответствующего результата об асимптотической устойчивости. Рассмотрим неуправляемую систему с запаздыванием:

$$\dot{x}(t) = f(x_t) \tag{8}$$

с непрерывным функционалом f: $\mathbf{C} \to R^n$, удовлетворяющим локальному условию Липшица и равенству $f(0) = 0$.

Решение $x = 0$ системы (8) назовем притягивающим относительно множества $\Lambda \subset \mathbf{C}$, если существует $\Delta > 0$, такое, что из $\varphi \in \Lambda \cap \bar{\mathbf{C}}_\Delta$ следует $x(t; \varphi) \to 0$ при $t \to +\infty$, где $x(t; \varphi)$ — решение уравнения (8) с начальной точкой $x_0(\varphi) = \varphi$.

Сформулируем теперь результат об асимптотической устойчивости:

Лемма [14]. Пусть для некоторого $M > 0$ на множестве $\mathbf{C}_M$ существует функционал V: $\mathbf{C}_M \to R$ такой, что:

1) $V(\varphi) \geqslant 0$, $V(0) = 0$, $\dot{V}_{(8)} \leqslant 0$;

2) $x = 0$ — точка притяжения решений системы (8) относительно множества $\{\varphi: V(\varphi) = 0\}$, и множество $\{\varphi: V(\varphi) > 0,\ \dot V_{(8)}(\varphi) = 0\}$ не содержит положительных полутраекторий системы (8).

Тогда нулевое решение системы (8) асимптотически устойчиво.♦

Изменив определение КЛКФ в соответствии с приведенным результатом, можно таким образом расширить возможности выбора КЛКФ:

Теорема 5. *Пусть* $V(\varphi)$: $C \to R^+$ *— функционал, удовлетворяющий условиям* $V(0) = 0$, $L_fV(\varphi) \leqslant 0$ *для всех* φ*, для которых* $L_gV(\varphi) = 0$ *(такой функционал назовем V вырожденным КЛКФ). Если управление* $u_S(t, \varphi)$ $(\hat u_S(t, \varphi))$ $(u_{qp}(t, \varphi))$ *непрерывно и для замкнутой системы* (1) *выполняется условие 2 леммы, то: 1) оно является стабилизирующим; 2) соответствующее управление* $u_r = \Phi(u, t)$ *также является стабилизирующим, если функция* Φ *принадлежит сектору* $(1/2, +\infty)$.♦

(Доказательство теоремы 5 непосредственно следует из леммы.)

Такое расширение определения V может значительно упростить поиск КЛКФ.

Однако отметим два очевидных недостатка вырожденного КЛКФ. Прежде всего, знакопостоянный функционал не гарантирует *глобальной* асимптотической устойчивости нулевого решения без дополнительного требования ограниченности всех решений системы. Так что использование вырожденного КЛКФ в общем случае позволяет построить лишь *локально* стабилизирующее управление. Далее, отсутствие знакоопределенности L_fV может привести к разрыву управления u_S на множестве $\{\varphi: L_gV(\varphi) = 0\}$ (как отмечено выше, в случае КЛКФ, удовлетворяющего определению 1, $u_S(\varphi)$ непрерывно всюду, кроме нуля, а если выполняется условие малого управления, то и в нуле). Заметим, что условие малого управления можно записать в виде $\limsup\limits_{\|\varphi\| \to 0} \dfrac{L_fV(\varphi)}{|L_gV(\varphi)|} \leqslant 0$. Модификация этого условия может обеспечить непрерывность управления u_S, построенного на основе вырожденного КЛКФ:

Теорема 6. *Если V — вырожденный КЛКФ и выполняется условие*

$$\limsup_{|L_gV(\varphi)| \to 0} \frac{L_fV(\varphi)}{|L_gV(\varphi)|} \leqslant 0,$$

то управление $u_S(\varphi)$ *непрерывно во всем пространстве* **C**.♦

Если неравенство в теореме 6 не выполняется, то управление u_S может оказаться разрывным на множестве, где $L_fV(\varphi)$ и $L_gV(\varphi)$ одновременно обращаются в ноль (см. далее пример 2). В этом случае непрерывный закон управления можно построить, исходя, например, из условия $\tilde u_S(\varphi)\mathrm{sign}(L_gV(\varphi)) \leqslant -\hat K_S(\varphi)|L_gV(\varphi)|$. Очевидно, что управление, удовлетворяющее такой оценке, является (локально) стабилизирующим. В частности, можно выбрать управление $\tilde u_S(\varphi) = -\tilde k_S L_gV(\varphi)$ с постоянным коэффициентом $\tilde k_S = \max\limits_{\varphi \in \mathbf{C}_a} \hat K_S(\varphi)$, $a > 0$ (в случае невырожденного функционала $\mathbf{C}_a$ при этом содержится в области притяжения). Однако такое управление необязательно оптимально по отношению к функционалу вида (5).

Пример 2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot x_1(t) = x_1(t)x_1^2(t-r)f_1(x_t) + x_1(t-r)u, \\ \dot x_2(t) = f_2(x_t) - x_2(t), \end{cases} \tag{9}$$

где $x_t = ((x_1)_t, (x_2)_t)$, $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ непрерывны на **C**, $f_2(0, \varphi_2) = 0$. Рассмотрим знакопостоянный функционал $V(\varphi) = \varphi_1^2(0)/2$. Если $L_gV(\varphi) = \varphi_1(0)\varphi_1(-r) = 0$, то $L_fV(\varphi) = 0$. Итак, V является вырожденным КЛКФ, и формула (2) для $\varphi_1(0)\varphi_1(-r) \equiv 0$ задает функционал

$$u_S(\varphi) = -\varphi_1(0)\varphi_1(-r)[f_1(\varphi) + \sqrt{(f_1(\varphi))^2 + 1}\,], \tag{10}$$

который, очевидно, непрерывен на множестве $\{\varphi: \varphi(0)\varphi(-r) = 0\}$. Используя результаты § 3, можно убедиться, что управление (10) минимизирует функционал $J = \int\limits_0^{+\infty} [x_1^2(t)x_1^2(t-r) + u^2(t)]f(x_t)dt$, где $f(\varphi) = (2(\sqrt{(f_1(\varphi))^2 + 1} + f_1(\varphi)))^{-1}$. Нетрудно проверить, что условие 2 леммы также выполняется, таким образом, нулевое решение системы (9) при управлении (10) асимптотически устойчиво. Асимптотическая устойчивость (локальная) нулевого решения достигается также при управлениях $\tilde u_S(\varphi) = -\tilde k_S\varphi_1(0)\varphi_1(-r)$ и $u_S^r(\varphi) = -k_S^r\varphi_1(0)\varphi_1(-r)$ с постоянными коэффициентами $\tilde k_S \geqslant f_M = \max\limits_{\varphi \in \mathbf{C}_a} 1/2f(\varphi)$, $k_S^r \geqslant f_M/2$. Однако даже если f_M не зависит от a, глобальная асимптотическая устойчивость в общем случае не имеет места. Например, пусть

$f_2(x_t) = x_1(t)x_2^2(t)$. Заметим, что решение $x_1(t)$ замкнутой системы не меняет знак, если сохраняет знак на $[-r, 0]$ начальная функция φ_{10}. Решение второго уравнения системы с начальной точкой $(\varphi_{10}, \varphi_{20})$ имеет вид $x_2(t) = \dfrac{e^{-t}}{1/\varphi_{20}(0) - \int_0^t e^{-s}x_1(s)ds}$, и для достаточно большого значения $\varphi_{20}(0) > 0$ и положительного $x_1(t)$ знаменатель этой дроби обращается в ноль в конечный момент времени.

Если добавить в правую часть первого уравнения слагаемое $-x_1(t)$ и предположить, что $f_1(\varphi) \geqslant \varepsilon > 0$, то управление $u_{qp}(\varphi) = -2\varphi_1(0)\varphi_1(-r)f_1(\varphi)$будет стабилизирующим и оптимальным по отношению к функционалу (5) с $q(\varphi) = \varphi_1^2(0)$, $p(\varphi) = 1/(4f_1(\varphi))$.

Если же в правую часть первого уравнения добавить, например, слагаемое $x_1(t - r)$, то V и для такой системы является вырожденным КЛКФ, однако неравенство из теоремы 6 уже не выполняется: $\limsup\limits_{|L_gV(\varphi)| \to 0} \dfrac{L_fV(\varphi)}{|L_gV(\varphi)|} = 1 > 0$. Формула для управления u_S в этом случае имеет вид

$$u_S(\varphi) = -1 - \varphi_1(0)\varphi_1(-r)f_1(\varphi) - $$
$$- \operatorname{sign}(\varphi_1(0)\varphi_1(-r)) \times$$
$$\times \sqrt{(\varphi_1(0)\varphi_1(-r)f_1(\varphi) + 1)^2 + \varphi_1^2(0)\varphi_1^2(-r)}$$

для $\varphi_1(0)\varphi_1(-r) \neq 0$, т. е. на множестве $\{\varphi: \varphi(0)\varphi(-r) = 0\}$ управление разрывно.

Заметим, что без дополнительных предположений о функционале $f_2(\varphi)$ невозможно построить КЛКФ, удовлетворяющий первоначальному определению.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены особенности применения контролирующих функций для решения задачи стабилизации систем с запаздыванием. Приведены явные формулы стабилизирующих робастных законов управления для линейных по управлению систем, исследован вид функционалов качества, которые достигают минимума на этих управлениях; рассмотрена прямая задача оптимального управления с функционалом качества специального вида; изучаются некоторые пути развития рассмотренного метода на основе обобщения достаточных условий асимптотической устойчивости, анализируются преимущества такого обобщения, а также возможные проблемы и варианты их решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бобцов А.А., Ефимов Д.В., Сергеев К.А.* К задаче стабилизации нелинейных афинных систем // Навигация и управление движением / Материалы 3-й конф. молодых ученых. СПб.: ГНЦ РФ ЦНИИ «Электроприбор», 2001. — С. 113—122.
2. *Freeman R.A., Kokotovic P.V.* Robust Control of nonlinear systems. — Birkhauser, Boston, 1996.
3. *Freeman R.A., Primbs J.A.* Control Lyapunov functions: new ideas from an old source // Proc. of the 35th IEEE Conf. on Decision and Control, Kobe, Japan, 1996. — P. 3926—3931.
4. *Jankovic M.* Extension of control Lyapunov functions to time-delay systems // Proc. of the CDC, Sydney, Australia, 2000. — P. 4403—4408.
5. *Jankovic M.* Control Lyapunov-Razumikhin functions and robust stabilization of time delay systems // IEEE Trans. on Automatic Control. — 2001. — Vol. 46. — P. 1048—1060.
6. *Jankovic M.* Control of nonlinear systems with time delay // Proc. of the 42nd IEEE Conf. on Decision and Control, Maui, Hawaii USA, 2003. — P. 4545—4550.
7. *Jankovic M., Sepulchre R., Kokotovic P.V.* CLF based designs with robustness to dynamic input uncertainties // Systems and Control Letters. — 1999. — Vol. 37. — P. 45—54.
8. *Threshold* policies control for predator-prey systems using a control Liapunov function approach / M.E.M. Meza, A. Bhaya, E. Kaszkurewicz, M.I. Costa // Theor. Popul. Biol. — 2005. — Vol. 67, N 4. — P. 273—284.
9. *Sontag E.D.* A universal construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization // Systems & Control Letters. — 1989. — Vol. 13. — P. 117—123.
10. *Андреев А.С., Безгласный С.П.* О стабилизации управляемых систем с гарантированной оценкой качества управления // Прикладная математика и механика. — 1997. — Т. 61, вып. 1. — С. 44—51.
11. *Кунцевич В.М., Лычак М.М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. — М.: Наука, 1977. — 400 с.
12. *Румянцев В.В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем // Прикладная математика и механика. — 1970. — Т. 34, вып. 3. — С. 440—456.
13. *Румянцев В.В., Озиранер А.*С. Устойчивость и стабилизация по отношению к части переменных. — М.: Наука, 1987. — 253 с.
14. *Андреев А.С., Павликов С.В.* Незнакоопределенные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием // Механика твердого тела. — 2004. — Вып. 34. — С. 112—118.
15. *Ким А.В.* *i*-гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. — Екатеринбург: УрО РАН, 1996. — 234 с.
16. *Разумихин Б.С.* Устойчивость эредитарных систем. — М.: Наука, 1988. — 112 с.
17. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959. — 211 с.

☎/🖹 *(8422) 32-20-22, e-mail: sedovano@ulsu.ru*

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским. ❑