

# УКЛОНЕНИЕ ПОДВИЖНЫХ ОБЪЕКТОВ ОТ ОБНАРУЖЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Т.Г. Абрамянц, Е.П. Маслов, В.П. Яхно

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва*

Дан обзор результатов решения задач оптимизации траекторий уклонения одиночной и групповой целей на плоскости и в пространстве от обнаружения преследователем, снабженным ограниченной зоной наблюдения. Законы уклонения определяются в результате решения задач в оптимизационных (в случае одиночной цели) и игровых (в случае групповой цели) постановках.

## ВВЕДЕНИЕ

Вопросы поиска-уклонения подвижного объекта (далее — цели или уклоняющегося) от преследователя, снабженного ограниченной областью обнаружения, рассматривались в ряде монографий [1–5] и многочисленных статьях. Задачи поиска-уклонения решались как самостоятельно, так и в рамках более общей задачи преследования-уклонения.

Вначале решались задачи поиска-уклонения одиночной цели.

В результате решения задач определялись оптимальные законы уклонения и вид зоны захвата — подвижной области в пространстве поиска, прилегающей к области обнаружения преследователя и обладающей тем свойством, что из точек этой области уклонение невозможно [2, 6].

Решенные задачи поиска-уклонения одиночной цели отличаются предположениями о:

- размерности пространства поиска — на прямой [6, 7], на плоскости [2, 3, 8] и в трехмерном пространстве [9];
- размерах области поиска — в ограниченной [3, 4] и неограниченной [5, 8] областях;
- классах стратегий поиска-уклонения — в чистых [1–5] и смешанных стратегиях [7, 8];
- видах поисковых траекторий [2, 3, 5, 8, 10];
- числе поисковых систем [2, 3, 5, 6].

Дальнейшее развитие теории поиска-уклонения получила в связи с применением уклоняющимся ложных целей [11–18].

Наличие ложных целей приводит к информационной дискриминированности преследователя, поскольку ему до момента классификации неизвестно, какую же из целей он обнаружил — ложную или истинную. Соответственно, преследователь должен затратить определенные ресурсы для обнаружения, классификации и, в случае обнаружения ложной цели, последующего поиска (догона) истинной цели. Это обстоятельство позволяет коалиции согласованно действующих целей сократить размеры области захвата истинной цели, избежать обнаружения истинной цели, увеличить время до обнаружения истинной цели и др.

В настоящей статье приводится обзор результатов решения задач оптимизации траекторий уклонения одиночной и групповой целей на плоскости и в пространстве от обнаружения преследователем, обладающим ограниченной зоной наблюдения. Законы уклонения определяются в результате решения задач в оптимизационных (в случае одиночной цели) и игровых (в случае групповой цели) постановках в предположении о том, что на этапе поиска преследователь движется по прямолинейной траектории.

Широкое применение на практике прямолинейных поисковых траекторий обусловлено тем,



что они оптимальны в смысле минимума времени сближения с объектом (начальной точкой) поиска.

Задачи оптимизации законов уклонения при иных предположениях о видах поисковых траекторий решались в работах [1, 6, 10, 19].

## 1. УКЛОНЕНИЕ НА ПЛОСКОСТИ

### 1.1. Уклонение одиночной цели

Два объекта — преследователь  $P$  и цель  $E$ , обладающая ограниченными скоростями, перемещаются по плоскости, имея возможность в каждый момент времени произвольно изменять направления своих движений («простые движения», по терминологии работы [20]). Преследователь снабжен зоной обнаружения в виде круга радиусом  $R$  (или кругового сектора с параметрами  $(R, 2\alpha)$ ), центр которого совпадает с его текущим положением (рис. 1). Цель обнаруживается при попадании ее на границу зоны.

Вводится неподвижная прямоугольная система координат  $XOY$ , начало которой совмещено с исходным положением преследователя  $P^0$ , а положительное направление оси абсцисс совпадает с вектором его скорости.

Уравнение относительного движения цели

$$\dot{w} = v - u, \quad w(0) = w^0, \quad (1)$$

где  $w = w(t)$  — двумерный вектор, направленный от преследователя  $P$  к цели  $E$  в момент времени  $t$ . Временной масштаб выбран так, что максимальная скорость преследователя равна единичной,  $u = (1; 0)$ . Двумерный вектор  $v$  управления (скорости) цели подчинен ограничению  $\|v\| \leq \beta < 1$ ; физически величина  $\beta$  есть отношение максимальных скоростей цели и преследователя. Верхний индекс здесь и далее обозначает момент времени; символ  $0$  — нулевой вектор,  $\|\cdot\|$  — евклидова норма.

Управление цели определяется из условия максимизации минимального по времени расстояния между нею и преследователем:

$$G = \min_t \|w(t)\| \rightarrow \max_v. \quad (2)$$

Решение задачи (1), (2) состоит в следующем [1, 4, 6]. Цель уклоняется от обнаружения на максимальной скорости  $\beta$ . Независимо от начального расположения цели, оптимальной траекторией ее уклонения является прямая линия, составляющая с осью абсцисс угол  $\psi^* = \gamma$ ;  $\cos \gamma = \beta$  (оптимальные величины будем обозначать «звездочками»). Зона захвата имеет вид криволинейного треугольника  $ABCD$  (см. рис. 1).

Уравнения прямолинейных границ зоны захвата:

$$\text{при } \alpha < \gamma \quad y = \frac{R \cos(\alpha - \gamma)}{\sin \gamma} \pm x \operatorname{ctg} \gamma; \quad (3)$$

$$\text{при } \alpha \geq \gamma \quad y = \frac{R}{\sin \gamma} \pm x \operatorname{ctg} \gamma. \quad (4)$$

При  $\alpha \geq \arccos \beta$  прямолинейные отрезки касаются окружности, при  $\alpha < \arccos \beta$  — кончатся в угловых точках сектора.

Знак минус соответствует границе в верхней полуплоскости, знак плюс — в нижней.

Из формул (3) и (4) следует, что при фиксированной поисковой траектории наклон прямолинейных границ зоны захвата не зависит от начального расположения цели и размера центрального угла сектора. Наибольший размер зоны захвата достигается при  $\alpha = \gamma$ . Дальнейшее увеличение угла  $\alpha$  не приводит к расширению зоны захвата.

Функция  $y = \cos x$  четная, поэтому цель имеет две траектории уклонения, оптимальные в смысле критерия (2); они перпендикулярны прямолинейным границам зоны захвата. Обе траектории дос-

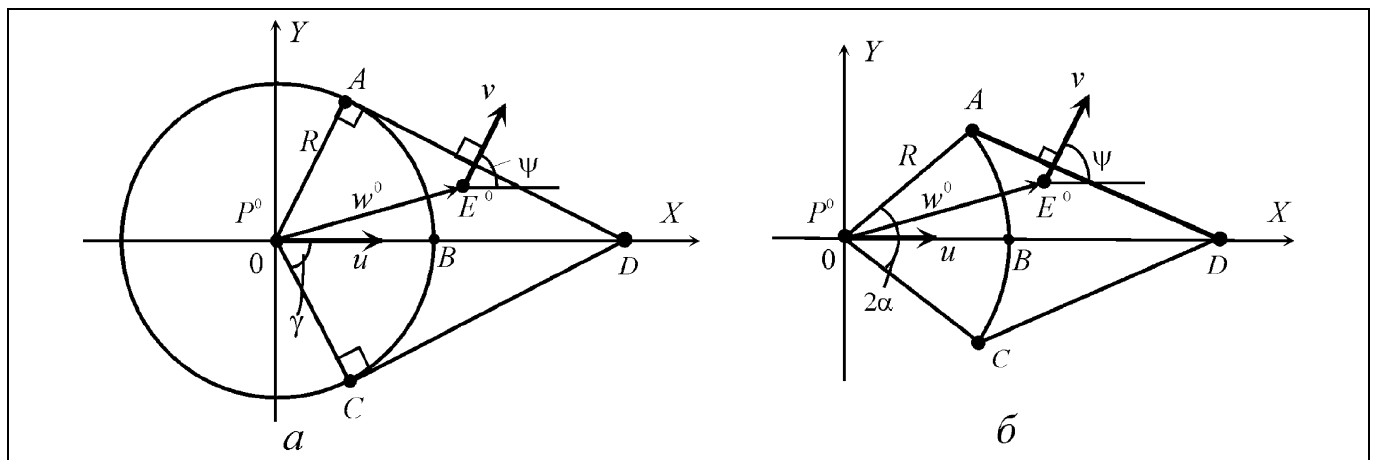


Рис. 1. Плоскостные зоны захвата одиночной цели при круговой (а) и секторной (б) зонах обнаружения

тавляют максимум критерию (2), но максимумы не равны. Глобальный максимум соответствует движению цели в той же полуплоскости, где находится ее начальное положение.

Уклонение цели из точек, лежащих внутри треугольника  $ABCD$ , невозможно. Для сокращения размера зоны захвата используется ложная цель.

### 1.2. Уклонение групповой цели

Три объекта — преследователь  $P$ , истинная  $E_1$  и ложная  $E_2$  цели перемещаются по плоскости с ограниченными скоростями, имея возможность в каждый момент времени произвольно изменять направления своих движений.

Как уже отмечалось, преследователь снабжен круговой зоной обнаружения радиусом  $R$ , центр которой совпадает с его текущим положением, и цель обнаруживается при попадании ее на границу этой зоны. До момента обнаружения какой-либо из целей преследователь движется по прямолинейной поисковой траектории с максимальной скоростью. После обнаружения цели — по траектории, соответствующей минимуму времени до классификации обнаруженной цели. Классификация цели осуществляется преследователем с расстояния  $r \leq R$ .

В неподвижной (исходной) прямоугольной системе координат  $XOY$  (см. рис. 1, *a*), начало которой совмещено с исходным положением  $P^0$  преследователя, а положительное направление оси абсцисс совпадает с вектором скорости преследователя при  $t=0$ , прямолинейной поисковой траектории соответствует зона захвата в виде симметричного криволинейного треугольника, ограниченного дугой окружности и двумя касательными к окружности, пересекающимися в точке с координатами  $(R/\beta_1, 0)$ , где  $\beta_1$  — отношение скоростей истинной цели и преследователя.

В начальный момент времени обе цели находятся в одной точке  $E_1^0 = E_2^0 = E^0$  вне зоны обнаружения, но внутри области захвата.

Процесс противодействия преследователя и системы целей состоит из *этапа поиска* и *этапа отвлечения* (преследователя).

Уравнения относительного движения целей

$$\dot{w}_i = v_i - u; \quad i = 1, 2, \quad (5)$$

где  $w_i = w_i(t)$  — двумерный вектор, направленный от преследователя  $P$  к цели  $E_i$  в момент  $t$ ;  $u$ ,  $v_i$  — двумерные векторы управлений (скоростей) цели  $E_i$

$$\|u\| \leq 1, \quad \|v_i\| \leq \beta_i < 1. \quad (6)$$

Управление преследователя является программным на этапе поиска, позиционным — на этапе отвлечения до момента классификации обнаруженной цели и программным — после этого момента. Управления целей — позиционные.

Коалиция целей согласованно максимизирует минимальное по времени расстояние между преследователем и истинной целью:

$$G_1 = \min_t \|w_1(t)\| \rightarrow \max_{v_1, v_2}.$$

Преследователь минимизирует время от момента первичного обнаружения цели до момента ее классификации

$$G_2 = T - s \rightarrow \min_u,$$

где моменты  $s$  и  $T$  определяются соотношениями  $\|w_2(s)\| = R$ ,  $\|w_2(T)\| = r$ .

В том случае, когда обнаруженная цель — истинная, преследователь после ее классификации осуществляет точечную встречу с ней. В противном случае — продолжает движение в выбранном направлении.

Решаемая задача двухкритериальная и решается поэтапно. В соответствии с методом динамического программирования вначале находятся оптимальные управления для этапа отвлечения (этап 2), а затем — для этапа поиска (этап 1).

**Этап отвлечения.** Вводится вспомогательная неподвижная система координат  $X^s O^s Y^s$ , начало которой совпадает с положением  $P^s$  преследователя в момент  $s$  обнаружения ложной цели, а ось абсцисс проходит через положение  $E_2^s$  обнаруженной цели тот же момент (рис. 2). Момент  $s$  принимается в качестве нулевого и от него ведется отсчет времени на этапе преследования.

Постановка задачи синтеза оптимальных законов управления преследователя и целей на этапе отвлечения включает в себя:

— уравнения движения  $\dot{w}_i = v_i - u$ ;  $i = 1, 2$ ;

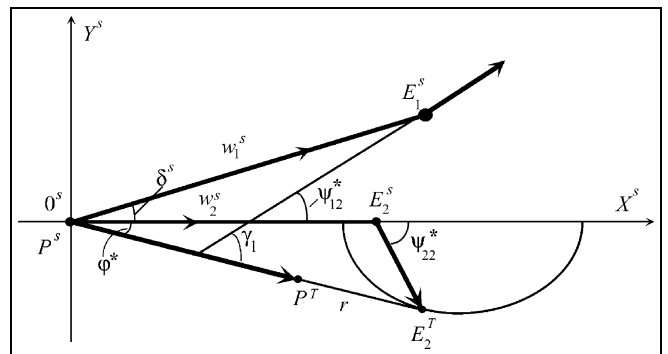


Рис. 2. Оптимальные траектории объектов на этапе отвлечения



- начальные условия  $w_i^s = w_i(s); i = 1, 2, \|w_2(s)\| = R;$
- критерии  $G_{1s} = \min_{t \geq s} \|w_1(t)\| \rightarrow \max, G_{2s} = T \rightarrow$   
 $\rightarrow \min_u;$
- условие классификации  $\|w_2(T)\| = r.$

Постановка и решение задачи иллюстрируются рис. 2, где для определенности принято, что угол между векторами  $w_1^s, w_2^s: \delta^s > 0.$  Здесь и далее положительным считается направление отсчета угла против часовой стрелки.

Решение задачи состоит в следующем [15].

- Преследователь реализует алгоритм параллельного сближения.
- Все объекты движутся по прямым с максимальными скоростями.
- Цели движутся в разные полуплоскости относительно оси абсцисс системы  $X^s O^s Y^s.$
- Геометрическое место точек  $r$  встречи преследователя и ложной цели — представляет собой овал Декарта с фокусами в точках  $P^s$  и  $E_2^s.$

В полярной системе координат с полюсом в точке  $P^s$  и полярной осью, совпадающей с  $O^s X^s,$  овал описывается уравнением [21]:

$$(1 - \beta_2^2)\rho^2 + 2(\beta_2^2 r - R \cos \varphi)\rho + R^2 - \beta_2^2 r^2 = 0$$

где  $\rho$  — радиус-вектор точки овала,  $\varphi$  — угол между траекторией преследователя и осью абсцисс.

- Углы, образованные прямой  $P^s E_2^s$  и оптимальными траекториями объектов, определяются соотношениями:
  - для ложной цели  $E_2: \cos \psi_{22}^* = \beta_2^2 \sigma, \text{sign} \psi_{22}^* = -\text{sign} \delta^s;$
  - для преследователя:  $\cos \varphi^* = \beta_2^2 \sigma + \sqrt{(1 - \beta_2^2)(1 - \beta_2^2 \sigma^2)}, \text{sign} \varphi^* = -\text{sign} \delta^s;$
  - для истинной цели  $E_1:$

$$\psi_{12}^* = \gamma_1 + \varphi^*, \text{sign} \psi_{12}^* = \text{sign} \delta^s, \quad (7)$$

где  $\sigma = r/R; \cos \gamma_1 = \beta_1.$

Здесь и далее первая цифра двузначного индекса в законе управления указывает номер цели, вторая — номер этапа.

Из формулы (7) и рис. 2 следует, что оптимальная траектория уклонения истинной цели  $E_1$  перпендикулярна границе зоны захвата, которая соответствует траектории преследователя на этапе отвлечения.

- Минимальное расстояние между преследователем и истинной целью

$$G_{1s}^* = \|w_1^s\| \cos(|\psi_{12}^*| - |\delta^s|)$$

достигается в момент

$$\tau = \|w_1^s\| (1 - \beta_1^2)^{-1/2} \sin(|\psi_{12}^*| - |\delta^s|).$$

- Классификация обнаруженной (ложной) цели происходит в момент

$$T = R \sqrt{(1 - \beta_2^2 \sigma^2)(1 - \beta_2^2)^{-1}} - r.$$

Напомним, что время отсчитывается от момента  $s$  и скорость преследователя принята равной единичной.

- В зависимости от скоростных характеристик целей и реализовавшихся в момент  $s$  положений векторов  $w_1^s$  и  $w_2^s$  возможны два случая:
  - найдется, по крайней мере, одно управление ложной цели, при котором  $|\psi_{12}^*| - |\delta^s| = |\gamma_1 + \varphi^*(\psi_{22})| - |\delta^s| = 0;$
  - даже при оптимальном управлении целей

$$|\psi_{12}^*| - |\delta^s| > 0.$$

В первом случае минимальное расстояние между преследователем и истинной целью достигается в момент начала этапа отвлечения, и  $G_{1s}^* = |w_1^s|.$

Во втором случае преследователь и истинная цель продолжают сближаться. Этот случай, соответствующий более тяжелым условиям уклонения истинной цели, рассматривается далее.

**Этап поиска.** Постановка задачи синтеза оптимальных законов управления целями на этапе поиска включает в себя:

- уравнения движения (5) и (6); в исходной системе координат  $XOY,$  по предположению, управление преследователя на этапе поиска  $u = (1; 0);$
- терминальное условие  $\|w_2(s)\| = R;$
- критерий

$$G_{1s}^* = \|w_1^s\| \cos(|\psi_{12}^*| - |\delta^s|) \rightarrow \max_{v_1, v_2}. \quad (8)$$

В работе [15] показано, что на этапе поиска оптимальными траекториями целей служат прямые, по которым цели движутся с максимальными скоростями. Поэтому критерий (8) можно переписать в следующем виде:

$$G_{1s}^* = \|w_1^s\| \cos(|\psi_{12}^*| - |\delta^s|) \rightarrow \max_{\psi_{11}, \psi_{21}}, \quad 0 \leq t \leq s,$$

где  $\psi_{i1}, i = 1, 2$  — угол между траекторией цели  $E_i$  и осью абсцисс исходной системы  $XOY.$

Выполним ряд построений (рис. 3). Обозначим символом  $P^s$  точку, в которую преследователь пе-





Математическое описание телесной зоны обнаружения:

$$\Omega = (x, y, z): \begin{cases} \frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{z^2}{\operatorname{tg}^2 \delta} - x^2 < 0, & 0 \leq x \leq kD, \\ \frac{x^2}{D^2} + \frac{y^2}{n^2 D^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} + \frac{z^2}{n^2 D^2 \operatorname{tg}^2 \delta} - 1 < 0, \\ kD \leq x \leq D, \end{cases} \quad (13)$$

где  $n^2 = k^2/(1 - k^2)$  [9].

Цель считается необнаруженной, если  $w(t) \notin \Omega$ ,  $t \geq 0$ .

Вводится качественный критерий  $G$ , принимающий значение 1, если  $w(t) \notin \Omega$ ,  $0 \leq t < \infty$ , и 0 — в противном случае. Тогда задача оптимизации траектории уклонения сводится к задаче  $G \rightarrow \max_v$ .

Проведем плоскость, перпендикулярную к оси абсцисс и проходящую через точку  $x = h$ ;  $0 \leq h \leq D$ . Обозначим получившееся сечение зоны обнаружения  $\Omega$  символом  $S(h) = S_h$ . Этим же символом будем обозначать и плоскость, в которой расположено сечение. Границей сечения служит эллипс  $\partial S_h$ :

$$\frac{y^2}{a_h^2} + \frac{z^2}{b_h^2} = 1;$$

нижний индекс указывает на зависимость параметров эллипса от координат сечения. В соответствии с выражением (13) эллипсы  $\partial S_h$ , отвечающие различным значениям  $h$ , подобны, и  $a_h/b_h = \operatorname{tg} \alpha / \operatorname{tg} \delta$ . Пусть  $\alpha > \delta$ , так что  $a_h > b_h$ ,  $0 < h < D$ .

Обозначим символом  $C_h$  эллиптический цилиндр с основанием  $S_h$ :

$$C_h = \left\{ (x, y, z): \frac{y^2(T)}{a_h^2} + \frac{z^2(T)}{b_h^2} - 1 = 0 \right\}, \\ 0 \leq h \leq D.$$

Обозначим символом  $\Delta(w^0)$  область захвата. Она принадлежит внутренности эллиптического цилиндра  $C_{kD}$ . Из исходных позиций  $w^0$ , принадлежащих боковой поверхности и внешности цилиндра  $C_{kD}$ , задача уклонения решается, например, управлением  $v = (-\beta, 0, 0)$ .

Задача о построении закона уклонения решается в два этапа [9]. Вначале ставится и решается задача об уклонении в пространстве от плоской фигуры — ограниченного эллипсом сечения  $S_h$  телесной зоны обнаружения плоскостью, перпендикулярной направлению движения преследователя. Затем, на основе полученных результатов, нахо-

дится решение задачи об уклонении в пространстве от телесной зоны  $\Omega$ .

**Уклонение в пространстве от плоской зоны обнаружения.** Уклонение цели от сечения  $S_h$  состоит, если в момент  $T$  попадания точки  $w(T)$  на боковую поверхность цилиндра  $C_h$  выполняется неравенство  $x(T) \geq h$ .

Поэтому задача оптимизации траектории уклонения цели от обнаружения сечением  $S_h$  сводится к задаче оптимального управления с уравнением движения (12), критерием  $G = x(T) \rightarrow \max_v$  и терминальным условием

$$\frac{y^2(T)}{a_h^2} + \frac{z^2(T)}{b_h^2} - 1 = 0. \quad (14)$$

С помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина показывается, что решение задачи состоит в следующем [9].

Для цели оптимальна прямолинейная траектория уклонения, по которой она движется с максимальной скоростью  $\beta$ . Пусть  $\psi_x$  — угол, который составляет траектория (вектор скорости  $v$ ) цели с осью абсцисс неподвижной системы координат,  $\psi_y$  — угол, который составляет с осью  $OY$  проекция  $v_{YZ}$  вектора  $v$  на плоскость  $YOZ$  (рис. 6). На оптимальной траектории уклонения

$$\cos \psi_x^* = \beta, \quad (15)$$

$$\operatorname{ctg} \psi_y^* = \frac{b_h^2}{a_h^2} \cdot \frac{y(T)}{z(T)}. \quad (16)$$

Поясим геометрическую интерпретацию соотношения (16). Пусть  $w(T) = [x(T), y(T), z(T)]$  — позиция цели в подвижной системе координат в момент ее выхода на боковую поверхность ци-

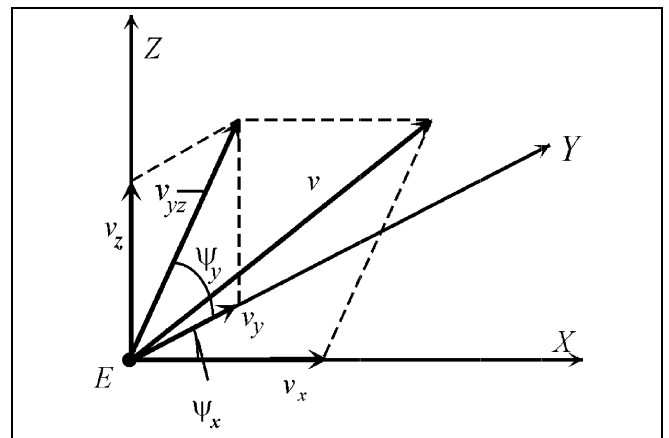


Рис. 6. Пространственная диаграмма скоростей



линдра  $C_h$ . Пара  $[y(T), z(T)]$  удовлетворяет уравнению эллипса (14). Уравнение нормали к эллипсу, проходящей через точку  $[y(T), z(T)]$ ,  $z(T) \neq 0$ , имеет вид [21]:

$$y = \frac{b_h^2}{a_h^2} \cdot \frac{y(T)}{z(T)} z + e^2 y(T), \quad (17)$$

где  $e^2 = (a_h^2 - b_h^2)/a_h^2$ ,  $e$  — эксцентриситет эллипса. Из выражений (16) и (17) вытекает следующее утверждение.

При движении цели по оптимальной траектории уклонения проекция  $E_{S(h)}$  текущей позиции цели  $E$  на плоскость  $S_h$  перемещается из начального положения  $[y(0), z(0)]$  вдоль нормали к эллипсу  $\partial S_h$ . Скорость движения текущей позиции проекции  $E_x$  на ось  $OX$  неподвижной системы постоянна и равна  $\beta^2$ , скорость движения текущей позиции проекции  $E_{S(h)}$  постоянна и равна  $\beta\sqrt{1-\beta^2}$ .

Соотношение (17) задает плоскость, в которой происходит уклонение цели. В неподвижной системе координат соотношение (15) определяет угол, который составляет лежащий в этой плоскости вектор скорости  $E$  с направлением движения преследователя (осью абсцисс). Из формулы (15) следует, что размер угла  $\psi_x^*$  зависит от отношения  $\beta$  скоростей объектов, но не зависит от ориентации плоскости, в которой происходит уклонение. Это согласуется с результатами, полученными при оптимизации траектории уклонения в двумерном случае. Увеличение размерности пространства сказывается, таким образом, на выборе плоскости, в которой происходит уклонение.

Формула (18) упрощается, если сечением  $S_h$  служит круг,  $a_h = b_h$ . В этом случае  $\text{ctg} \psi_x^* = y(0)/z(0)$ , т. е. цель уклоняется таким образом, что проекция  $E_{S(h)}$  движется из исходной позиции по радиусу.

Перейдем к построению области захвата  $\Delta_S(w^0)$  для сечения  $S_h$ . В силу симметрии сечения  $S_h$  относительно осей  $OY$  и  $OZ$  достаточно построить область захвата для четверти сечения  $S_h$ , соответствующей первому квадранту плоскости  $YOZ$ . Пусть  $\Delta_S(t, w^0)$  — подмножество начальных позиций цели, из которых обнаружение происходит при  $t > 0$ . Граница множества  $\Delta_S(t, w^0)$  — обозначим ее  $W_S$  — находится в результате решения относительно  $w^0$  уравнения  $G^* = x(T^*, w^0) = h$ , где звездочка указывает на то, что цель уклоняется от обнаружения по оптимальной траектории.

Из изложенного следует, что оптимальные траектории относительного движения цели обладают следующими свойствами:

- они прямолинейны;
- их проекции на плоскость  $S_h$  совпадают с нормальными к эллипсу  $\partial S_h$ ,
- для всех начальных позиций  $w^0$ , проекции  $E_{S(h)}$  которых лежат на общей нормали к эллипсу  $\partial S_h$ , оптимальные законы управления совпадают.

Поэтому все начальные позиции цели  $w^0 = [x(0), y(0), z(0)]$ , которым соответствует одна и та же терминальная точка  $[y(T^*), z(T^*)]$  эллипса (14), лежат на одной прямой — общей оптимальной траектории относительного движения цели:

$$\frac{h-x(0)}{\beta^2-1} = \frac{y(T^*)-y(0)}{\beta\sqrt{1-\beta^2}\cos\psi_y^*} = \frac{z(T^*)-z(0)}{\beta\sqrt{1-\beta^2}\sin\psi_y^*}. \quad (18)$$

Система (18) есть по координатное выражение для интервала времени, в течение которого цель  $E$  переходит из точки  $w^0$  в точку  $w(T^*)$ .

Из системы (21) следует, что граница  $W_S$  области захвата  $\Delta_S(t, w^0)$  представляет собой линейчатую поверхность [18]. Она образуется при движении прямой по направляющему эллипсу  $\partial S_h$ ; характер движения прямой в пространстве таков, что проекция ее на плоскость  $S(h)$  совпадает с нормалью к направляющему эллипсу.

Точки линейчатой поверхности  $w^0 = [x(0), y(0), z(0)]$  удовлетворяют следующему условию: время движения проекции  $E_{S(h)}$  вдоль нормали к эллипсу  $\partial S_h$  со скоростью  $\beta\sqrt{1-\beta^2}$  от начальной точки  $[y(0), z(0)]$  до соответствующей точки на эллипсе совпадает со временем перемещения проекции  $E_x$  по траектории относительного движения от точки  $x(0) > h$  до точки  $x(T^*) = h$  со скоростью  $(1-\beta^2)$ .

Формализация этого условия позволяет записать уравнение линейчатой поверхности в параметрической форме:

$$\begin{cases} y(0) = \frac{b_h}{a_h} z(0) \text{ctg} m + a_h e^2 \cos m, \\ [x(0) - h]^2 \text{ctg}^2 \gamma = [y(0) - a_h \cos m]^2 + \\ \quad + [z(0) - b_h \sin m]^2, \end{cases}$$

где  $m > 0$  — параметр,  $\cos \gamma = \beta$  и использовано параметрическое представление координат точек эллипса  $\partial S_h$ :  $y = y(T) = a_h \cos m$ ,  $z = z(T) = b_h \sin m$ ,  $a_h > b_h$ .



Обозначим через  $L_S$  кривую, которая образуется при пересечении линейчатой поверхности  $W_S$  и плоскости  $XOY$ . Координаты точек  $w^0 \in L_S$  удовлетворяют тому же условию, что и все точки линейчатой поверхности; кроме того, кривая  $L_S$  проходит через точку  $w^0 = (h, a_h, 0)$  пересечения эллипса  $S_h$  и его большой полуоси (напомним, что область захвата строится для первой четверти сечения  $S_h$ ).

В работе [9] показано, что кривая  $L_S$  состоит из двух участков — криволинейного и прямолинейного.

Уравнение криволинейного участка

$$\frac{[x(0) - h]^2}{b_h^2 \operatorname{tg}^2 \gamma} + \frac{y^2(0)}{a_h^2 - b_h^2} = 1, \quad \cos \gamma = \beta. \quad (19)$$

Уравнение (19) определяет эллипс, который имеет общий центр с эллипсом  $\partial S_h$  и проходит через его фокусы.

Уравнение прямолинейного участка

$$x(0) - h = [a_h - y(0)] \operatorname{tg} \gamma. \quad (20)$$

Прямая (20) является касательной к эллипсу (19) в точке  $w^0 = [h + a_h(1 - e^2) \operatorname{tg} \gamma, a_h e^2, 0]$ .

Эллипс (19) пересекает ось  $OX$  в точке  $x = h + b_h \operatorname{tg} \gamma$ . Обозначим символом  $L(h)$  прямую, по которой пересекаются плоскость  $S_h$  и  $XOY$ . На рис. 7

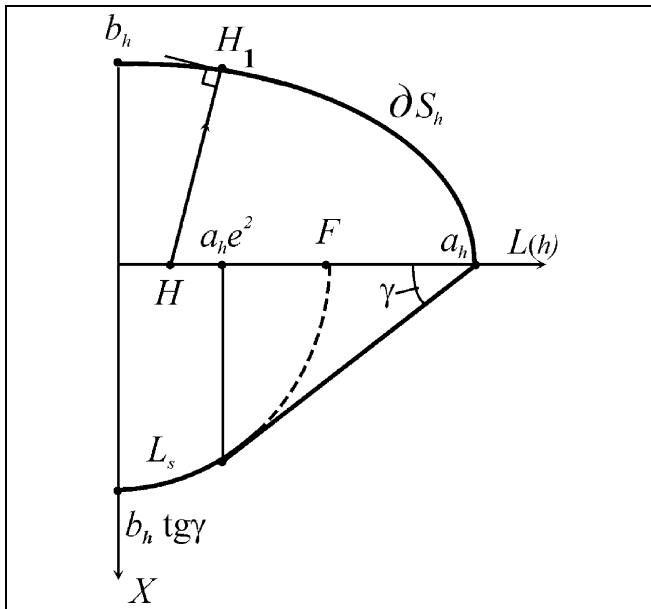


Рис. 7. Плоскостная проекция зоны обнаружения и границы области захвата одиночной цели в пространстве

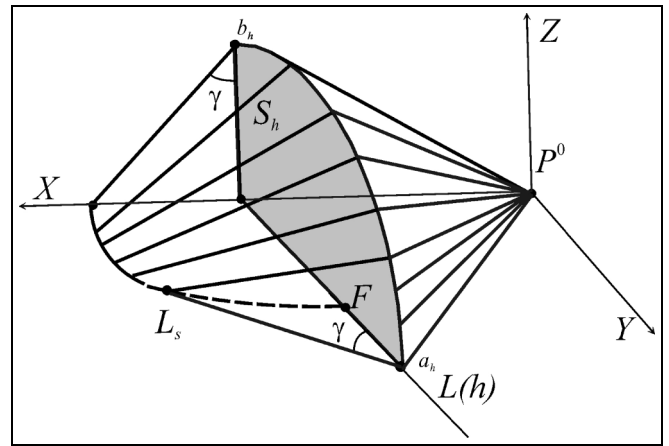


Рис. 8. Зона захвата одиночной цели в пространстве

изображена четверть сечения  $S_h$  и повернутый на  $90^\circ$  фрагмент плоскости  $XOY$  с кривой  $L_S$ . Через  $F$  обозначено положение фокуса эллипса  $\partial S_h$ ,  $y_F > a_h e^2$ . Отрезок  $HH_1$  есть проекция на плоскость  $S_h$  оптимальной траектории относительного движения цели из некоторой начальной точки, лежащей на кривой  $L_S$ .

На рис. 8 изображена аксонометрическая проекция четверти пространственной зоны обнаружения  $\Omega$  и соответствующий ей фрагмент области захвата  $\Delta_S(t, w^0)$ . Показаны прямолинейные образующие линейчатой поверхности  $W_S$  и сечение  $S_h$  (затемненная фигура),  $0 \leq h \leq kD$ .

Линейчатая поверхность  $W_S$  может рассматриваться как «крыша», поставленная на основание — эллипс  $\partial S_h$ . Прямые (18) служат «стропилами» этой крыши, а кривая  $L_S$  — «коньком» крыши, лежащим в плоскости  $XOY$ .

Для частного случая кругового сечения  $S_h$ ; ( $a_h = b_h = r$ ,  $\alpha = \delta$ ) уравнение поверхности  $W_S$  находится в явном виде. Направления оптимального движения цели задаются формулами (15) и (19) — из начального положения  $w^0 = [x(0), y(0), z(0)]$  проекция позиции цели движется по плоскости  $E_{S(h)}$  вдоль радиуса круга  $S_h$ . Уравнение поверхности  $W_S$ :

$$[x(0) - h - r \operatorname{tg} \gamma]^2 = [y^2(0) + z^2(0)] \operatorname{tg}^2 \gamma. \quad (21)$$

Соотношение (21) задает круговой конус (точнее, коническую поверхность), координаты вершины которого  $(h + r \operatorname{tg} \gamma, 0, 0)$ .

**Уклонение в пространстве от телесной зоны обнаружения.** В соответствии с выражением (13) ук-



лонение от телесной зоны обнаружения есть уклонение от эллипсоида

$$\frac{x^2}{D^2} + \frac{y^2}{n^2 D^2 \operatorname{tg} \alpha} + \frac{z^2}{n^2 D^2 \operatorname{tg} \delta} - 1 < 0,$$

$$kD \leq x \leq D, \quad n^2 = k^2 / (1 - k^2), \quad 0 < k < 1.$$

Решение задачи об уклонении опирается на построение областей достижимости цели  $E$  в подвижной системе координат.

Из начальной позиции  $w^0 = [x(0), y(0), z(0)]$  уклонение состоится, если найдется хотя бы одна траектория относительного движения цели  $E$ , имеющая с границей зоны обнаружения  $\Omega$  не более одной общей точки. Управление  $\{\|v\| = \beta, \psi_x = \arccos \beta, \psi_y = \text{const}\}$  реализует траекторию относительного движения  $E$ , обладающую тем свойством, что в момент попадания позиции цели  $E$  на произвольную (но фиксированную) плоскость  $S(h)$  отстояние проекции  $E_{S(h)}$  от точки  $[y(0), z(0)]$  максимально. При фиксированном  $h$  границей области достижимости для точек проекций  $E_{S(h)}$  является окружность

$$[x(0) - h]^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma = [y - y(0)]^2 + [z - z(0)]^2. \quad (22)$$

Изменяя  $h$  в уравнении (22), получаем уравнение конической поверхности — границы множества в трехмерном пространстве, в пределах которого лежат все относительные траектории цели  $E$ . Вершина конуса совпадает с точкой  $[x(0), y(0), z(0)]$ ; угол между осью симметрии конуса и образующей равен  $\pi/2 - \gamma$ ,  $\gamma = \arccos \beta$ .

Условия существования точки, в которой окружность, лежащая в плоскости  $L_S$ , касается изнутри эллипса  $\partial S_h$ , имеют вид

$$y(0) = \frac{b_h}{a_h} z(0) \operatorname{ctg} m + a_h e^2 \cos m,$$

$$x(0) = h + \operatorname{tg} \gamma \sqrt{[y(0) - a_h \cos m]^2 + [z(0) - b_h \sin m]^2}. \quad (23)$$

При фиксированных параметрах  $\{h, y(0), z(0)\}$  система (23) определяет положение точки  $w^0$  с минимальной абсциссой  $x(0)$ , из которой возможно уклонение цели  $E$  от сечения  $S(h)$ , и ориентацию плоскости, проходящую через ось  $OX$ , в которой лежит траектория уклонения (значение параметра  $m = m(h)$ ).

Алгоритм построения границ зоны захвата  $\Delta(w^0)$  для телесной зоны обнаружения приведен в работе [9]. Для частного случая, когда зона обнаружения  $\Omega$  есть пересечение кругового конуса и шара (вершина конуса и центр шара совпадают ( $\alpha = \delta$ ;

$k = \cos \alpha$ ), область захвата  $\Delta(w^0)$  удастся построить в явном виде). В этом случае зона  $\Omega$  представляет собой объединение двух фрагментов:

— конуса  $K_\alpha = \{(x, y, z): y^2 + z^2 - x^2 \operatorname{tg} \alpha < 0; 0 \leq x \leq D \cos \alpha\}$ ;

— шарового сегмента  $\Omega_\alpha = \{(x, y, z): x^2 + y^2 + z^2 - D^2 < 0; D \cos \alpha \leq x \leq D\}$ .

Сечение зоны обнаружения  $\Omega$  любой плоскостью, перпендикулярной оси абсцисс, есть круг. Ему отвечает коническая зона захвата.

При «узкой» зоне обнаружения,  $\alpha \leq \gamma$ ,  $\cos \gamma = \beta$ , уравнение границы конической зоны захвата имеет вид

$$\left[ x(0) - D \frac{\cos(\gamma - \alpha)}{\cos \gamma} \right]^2 = [y^2(0) + z^2(0)] \operatorname{tg}^2 \gamma. \quad (24)$$

Координаты вершины конической поверхности — точки  $C: \left( D \frac{\cos(\gamma - \alpha)}{\cos \gamma}, 0, 0 \right)$ .

На рис. 9 изображено сечение зоны обнаружения и зоны захвата произвольной плоскостью, проходящей через ось  $OX$ . Здесь  $P^0$  — начальное положение преследователя; прямая  $AB$  — проекция плоскости пресечения конического и шарового фрагментов зоны обнаружения. Зона захвата есть часть пространства, расположенная между сферической поверхностью и конической поверхностью (24).

В случае «широкой» зоны обнаружения,  $\alpha > \gamma$ , область захвата определяется следующим образом. В точке  $P^0$ , как в вершине, строится круговой конус  $K_\gamma$ , ось симметрии которого ориентирована по оси абсцисс, а угол при вершине  $\gamma = \arccos \beta$ . Эта коническая поверхность пересекается с шаровым сегментом по окружности радиуса  $r = D \sin \gamma$ . На этой окружности, как на основании, строится конус  $W_\gamma$ , образующие которого перпендикулярны образующим конуса  $K_\gamma$  (рис. 10). Точки  $A, A_1$  и  $C$ , лежащие в произвольной плоскости, проходящей

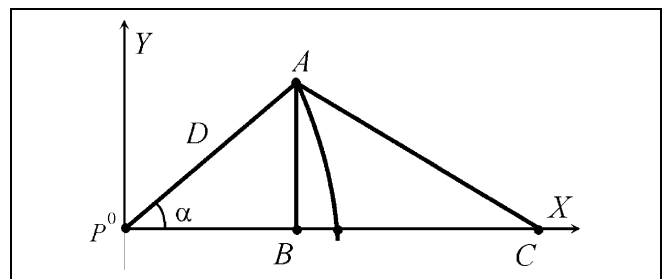


Рис. 9. Сечение «узкой» конической зоны захвата одиночной цели в пространстве

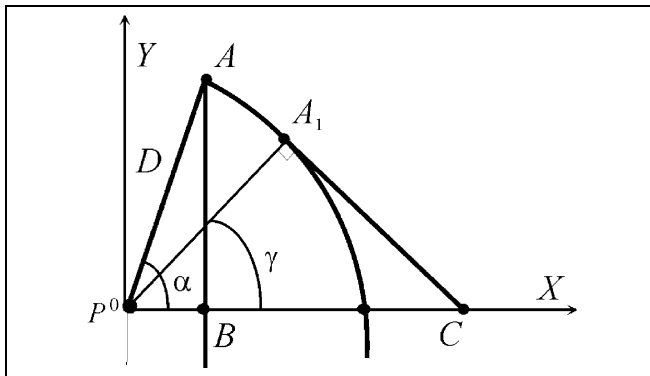


Рис. 10. Сечение «широкой» конической зоны захвата одиночной цели в пространстве

через ось абсцисс, соответствуют этому построению. Часть пространства, заключенная между шаровым сегментом и конусом  $W_\gamma$ , есть область захвата.

## 2.2. Уклонение групповой цели

Три объекта — преследователь  $P$ , истинная  $E_1$  и ложная  $E_2$  цели, обладая ограниченными скоростями, — перемещаются в пространстве, имея возможность в каждый момент времени произвольно изменять направления своих движений.

Преследователь снабжен сферической зоной обнаружения радиуса  $R$ , центр которой совпадает с его текущим положением. Обнаружение цели происходит при попадании ее на границу этой зоны. До момента обнаружения какой-либо из целей преследователь движется по прямолинейной траектории с максимальной скоростью. После обнаружения цели — движется по траектории, соответствующей минимуму времени до классификации обнаруженной цели. Классификация цели осуществляется преследователем с расстояния  $r < R$ .

Вводится неподвижная прямоугольная система координат  $OXYZ$ , начало которой совмещено с исходным положением преследователя  $P^0$ , а положительное направление оси абсцисс совпадает с вектором скорости преследователя на этапе поиска. Направления остальных координатных осей определены далее.

Прямолинейной поисковой траектории преследователя соответствует зона захвата в виде прямого кругового конуса [9] с углом полураствора при вершине  $\alpha = \arcsin \beta_1$ , где  $\beta_1$  — отношение максимальных скоростей истинной цели и преследователя; координаты вершины конуса  $(R/\beta_1, 0, 0)$ .

В начальный момент времени обе цели находятся в одной точке  $E_1^0 = E_2^0 = E^0$  вне зоны обнаружения, но внутри области захвата. Система координат  $OXYZ$  вводится таким образом, что

точка  $E^0$  лежит в плоскости  $XOY$  и ее координаты  $(x^0, y^0, 0)$ .

Как и в плоском случае, процесс противодействия преследователя и системы целей состоит из двух этапов: поиска цели (преследователем) и этапа отвлечения (преследователя).

Уравнения относительного движения  $\dot{w}_i = v_i - u$ ,  $i = 1, 2$ ,  $w_1(0) = w_2(0) = w^0$ , где  $w_i = w_i(t)$  — трехмерный вектор, направленный от преследователя  $P$  к цели  $E_i$  в момент  $t$ ,  $u$  и  $v_i$  — трехмерные векторы управлений (скоростей) преследователя  $P$  и цели  $E_i$ , соответственно.

Временной масштаб выбран так, что максимальная скорость преследователя равна единице; управления игроков подчинены ограничениям  $\|u\| \leq 1$ ;  $\|v_i\| \leq \beta_i < 1$ ,  $i = 1, 2$ .

Управление преследователя программное на этапе поиска и позиционное на этапе отвлечения.

Коалиция целей согласованно максимизирует минимальное по времени расстояние между преследователем и истинной целью:  $G_1 = \min_t \|w_1(t)\| \rightarrow$

$$\rightarrow \max_{v_1, v_2}$$

Преследователь минимизирует длительность интервала времени от момента обнаружения первой по порядку (ложной) цели до момента ее классификации:  $G_2 = T - s \rightarrow \min_u$ , где  $s$  и  $T$  — моменты обнаружения и классификации ложной цели, соответственно, определяемые соотношениями  $\|w_2(s)\| = R$ ;  $\|w_2(T)\| = r$ .

Решение задачи приведено в статьях [16, 18]. Показано, что при оптимальном поведении объектов уклонение групповой цели происходит в плоскости, содержащей векторы  $w_1^s$ ,  $w_2^s$  и  $w_0^s$ , соединяющие позицию преследователя  $P^s$  в момент  $s$  обнаружения цели с позициями  $E_1^s$  и  $E_2^s$  истинной и ложной целей в этот момент и начальной позицией целей  $E^0$ , соответственно (см. рис. 3).

Указанная плоскость неединственна. Множество плоскостей оптимального уклонения образует пучок, ось которого проходит через начальное положение целей  $E^0$  и положение преследователя  $P^s$  в момент обнаружения ложной цели. Неединственность плоскости оптимального уклонения позволяет синтезировать оптимальные законы управления целей с учетом ограничений, отличных от требований оптимальности — в частности, географических, тактических и др.

Все результаты, полученные для двумерного случая, справедливы и для случая уклонения в



пространстве, в частности, расположение границ зон захвата, сечения которых плоскостью уклонения изображены на рис. 4.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложены результаты решения задач об оптимизации траекторий уклонения подвижного объекта (истинной цели) от обнаружения поисковой системой (преследователем) на плоскости и в пространстве в оптимизационной и игровой постановках.

В предположении о том, что объекты обладают простыми движениями, а поисковая траектория прямолинейна, найдены исчерпывающие решения оптимизационных задач уклонения. В частности, определены оптимальные законы уклонения и получено описание зоны захвата — подвижной области в пространстве поиска, связанной с текущим положением преследователя и обладающая тем свойством, что из точек этой области уклонение одиночной (истинной) цели невозможно.

Для сокращения размеров зоны захвата используется ложная цель. Задачи об уклонении групповой цели на плоскости и в пространстве решены в игровой постановке. Определены оптимальные законы управления объектов, получено описание зоны захвата, из точек которой невозможно уклонение истинной цели даже при наличии ложной цели.

Показано, что использование ложной цели не только сокращает размеры области захвата, но и увеличивает число оптимальных маневров уклонения.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Петросян Л.А., Гарнаев А.Ю. Игры поиска. — СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992.
2. Абчук В.А., Суздаль В.Г. Поиск объектов. — М.: Сов. радио, 1977. — 334 с.
3. Черноусько Ф.Л., Меликян А.А. Игровые задачи управления и поиска. — М.: Наука, 1978.
4. Ким Д.П. Методы поиска и преследования подвижных объектов. — М.: Наука, 1989.
5. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А. Оптимальный поиск в условиях конфликта. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1987.

6. Чхатишвили А.Г., Шикин Е.В. Динамический поиск объектов. Геометрический взгляд на проблему // Фундаментальная и прикладная математика. — 1995. — Т. 1, вып. 4. — С. 827—862.
7. Железнов В.С., Кряковский Б.С., Маслов Е.П. Простейшая дифференциальная игра с выбором момента времени в смешанных стратегиях // Автоматика и телемеханика. — 1987. — № 8. — С. 46—55.
8. Ермолов А.Н., Кряковский Б.С., Маслов Е.П. Об одной дифференциальной игре в смешанных стратегиях // Там же. — 1986. — № 10. — С. 32—45.
9. Об одной задаче уклонения в пространстве / В.С. Железнов, М.Н. Иванов, Э.А. Курский, Е.П. Маслов // Там же. — 1992. — № 8. — С. 11—22.
10. Зенкевич Н.А., Петросян Л.А. Динамические модели поиска в условиях конфликта // Управление в динамических системах. Вопросы механики и процессов управления. — Л.: Изд-во ЛГУ. — 1984. — Вып. 7.
11. Иванов М.Н., Маслов Е.П. Об одной задаче уклонения // Автоматика и телемеханика. — 1984. — № 8. — С. 52—62.
12. Boyell R.L. Counterweapon Aiming for defense of a moving target // IEEE Trans. Aerospace Electron. Syst. — 1980. — Vol. 22. — P. 402—408.
13. Маслов Е.П., Рубинович Е.Я. Дифференциальные игры преследования-уклонения с групповой целью // Итоги науки и техники: Техническая кибернетика. — 1991. — Т. 23. — С. 32—58.
14. Shevchenko I.I. Successive Pursuit with a Bounded Detection Domain // Journal of Opt. Theory and Appl. — 1997. — Vol. 95. — N 1. — P. 25—48.
15. Об одной задаче уклонения от обнаружения / Т.Г. Абрамяни, М.Н. Иванов, Е.П. Маслов, В.П. Яхно // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 10. — С. 3—12.
16. Абрамяни Т.Г., Маслов Е.П., Яхно В.П. Об одной игровой задаче уклонения групповой цели в трехмерном пространстве // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2005. — № 5. — С. 62—65.
17. Абрамяни Т.Г., Маслов Е.П., Рубинович Е.Я. Управление подвижными объектами в условиях искусственно организованной неполноты информации // Проблемы управления. — 2005. — № 4. — С. 75—81.
18. Абрамяни Т.Г., Маслов Е.П., Яхно В.П. Уклонение от обнаружения в трехмерном пространстве // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2007. — № 5. — С. 6—11.
19. Иванов М.Н., Маслов Е.П. Уклонение от вращающейся зоны обнаружения // Автоматика и телемеханика. — 1992. — № 6. — С. 30—37.
20. Айзекс Р. Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967. — 415 с.
21. Савелов А.А. Плоские кривые. — М.: Физматгиз, 1960.

☎ (495) 334-91-81; e-mail: maslovep@ipu.ru

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Г. Воликом. □

## Новая книга

**Бурков В.Н., Новиков Д.А., Щепкин А.В. Механизмы управления эколого-экономическими системами / Под ред. академика С.Н. Васильева. — М.: Изд-во физико-математической литературы, 2008. — 244 с.**

Изложены результаты разработки и исследований комплекса оптимизационных, теоретико-игровых и имитационных моделей механизмов управления эколого-экономическими системами, включая механизмы: комплексного оценивания интегрального риска и ущерба, штрафов, платы за риск, финансирования снижения уровня риска, компенсации затрат на снижение уровня риска, продажи квот на уровень риска, аудита, снижения ожидаемого ущерба, экономической мотивации, оптимизации региональных программ, согласования интересов органов управления.

Для студентов, аспирантов и специалистов по математическому моделированию и управлению эколого-экономическими, социально-экономическими и организационными системами.