УДК 621.452.3-52

ЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ СОБСТВЕННЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

Р. Л. Лейбов

Московский государственный строительный университет

Предложен метод оценивания параметров линейной модели нелинейного объекта во временной области. Рассмотрена многомерная линейная модель с неопределенными собственными значениями. Показано, что неопределенность собственных значений позволяет уменьшить расхождение между линейной и нелинейной моделями. Приведены результаты применения метода для оценивания параметров линейной модели современного авиационного двухконтурного газотурбинного двигателя.

ВВЕДЕНИЕ

Оценивание неопределенных параметров многомерной линейной модели нелинейного объекта управления необходимо для разработки алгоритмов робастного управления и алгоритмов обнаружения, локализации и парирования отказов датчиков и исполнительных устройств создаваемых цифровых систем автоматического управления. Большое количество публикаций, посвященных оцениванию параметров линейных моделей авиационных газотурбинных двигателей (ГТД) было представлено в известном обзоре [1]. Отметим также применение нелинейного программирования для оценивания матричных параметров линейной модели летательного аппарата в пространстве состояний [2]. В последнее время оцениваются, как правило, не только параметры номинальной линейной модели объекта управления, но и границы неопределенности этих параметров [3], для чего по-прежнему применяются модификации метода наименьших квадратов, которые позволяют осуществлять оценивание во временной области при наличии неопределенности [4, 5].

Оценивание матричных параметров и собственных значений многомерной линейной модели современного авиационного ГТД, а также оценивание границ неопределенных элементов соответствующих матриц и границ вещественных и мнимых частей их неопределенных собственных значений методами линейного и нелинейного программирования были описаны автором в работах [6—10]. Заметим, что речь идет о непрерывном описании неопределенности во временной области. Подобное описание неопределенности универсально, так как оно соответствует совокупности аддитивной и мультипликативной неопределенностей линейной модели по входу и по выходу в частотной области.

Цель данной работы состоит в модификации метода оценивания неопределенных собственных значений путем решения набора задач квадратичного программирования методами нелинейного программирования. При этом удается уменьшить число искомых переменных, т. е. размерность этих задач. В работе на конкретном примере показано, что расхождение между линейной и нелинейной моделями авиационного ГТД удается существенно уменьшить благодаря использованию неопределенных собственных значений.

1. НЕЛИНЕЙНЫЕ И ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ГТД

Нелинейную модель двухвального двухконтурного турбореактивного ГТД можно представить следующим образом:

$$\dot{\mathbf{x}}^a = \mathbf{f}(\mathbf{x}^a, \mathbf{u}^a, \mathbf{w}^a),$$

где $\mathbf{x}^a$ — вектор состояния, $\mathbf{u}^a$ — вектор управления, $\mathbf{w}^a$ — вектор внешних воздействий, а $\mathbf{f}$ — нелинейная вещественная векторная функция. Компоненты этих векторов представляют собой различные физические величины. Это могут быть, например, температуры, давления, частоты вращения роторов, расходы топлива, воздуха и газа в различных сечениях проточной части двигателя, его геометрические характеристики, высота и скорость полета. Такие модели используются для исследования переходных процессов ГТД как в разомкнутой, так и в замкнутой системе управления. Три переменные, входящие в вектор внешних воздействий, — угол отклонения рычага управления двигателем, высота и скорость полета — определяют установившийся режим работы или рабочую точку двигателя, которой соответствуют векторы установившихся значений ${}_s\mathbf{x}^a$ и ${}_s\mathbf{u}^a$.

Будем считать, что в небольшой окрестности установившегося режима двигатель можно приближенно описать с помощью линейной модели с постоянными коэффициентами и с постоянными собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ матрицы $\mathbf{A}$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \quad (1)$$

и более точно с помощью линейной модели с неопределенными собственными значениями $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, ..., \tilde{\lambda}_n$ матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$

$$\dot{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}.$$

Здесь $\mathbf{x}$ — n-мерный нормированный вектор состояния, а $\mathbf{u}$ — m-мерный нормированный вектор управления в отклонениях от установившихся значений, соответствующих выбранной рабочей точке $x_i = (x_i^a - {}_s x_a^i)/\max|{}_s x_a^i|$, $i = 1, ..., n$, $u_i = (u_i^a - {}_s u_a^i)/\max|{}_s u_a^i|$, $i = 1, ..., m$.

Для оценивания неизвестных параметров линейных моделей можно использовать переходные процессы нелинейной модели двигателя — наборы значений нормированного вектора состояния в отклонениях от установившихся значений ${}^{\text{нл}}\mathbf{x}(t_k)$, $k = 0, ..., N$ и нормированного вектора управления в отклонениях от установившихся значений ${}^{\text{нл}}\mathbf{u}(t_k)$, $k = 0, ..., N$. Здесь $k = 0, ..., N$ соответствуют моментам времени $t_0, ..., t_N$, причем $t_{k+1} = t_k + \Delta t$, где Δt — шаг дискретности. При этом расхождение между линейной и нелинейной моделями равно

$$\sum_{k=1}^{N} [\mathbf{x}(t_k) - {}^{\text{нл}}\mathbf{x}(t_k)]^T \mathbf{W}(t_k)[\mathbf{x}(t_k) - {}^{\text{нл}}\mathbf{x}(t_k)],$$

где $\mathbf{W}(t_k)$, $k = 1, ..., N$ — симметрические положительно определенные весовые матрицы, а переходные процессы линейной модели $\mathbf{x}(t_k)$, $k = 1, ..., N$ соответствуют векторам ${}^{\text{нл}}\mathbf{u}(t_k)$, $k = 0, ..., N - 1$.

Ставится задача: оценить границы вещественных и мнимых частей неопределенных собственных значений $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, ..., \tilde{\lambda}_n$ матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$ линейной модели двигателя, используя для этого переходные процессы нелинейной модели двигателя ${}^{\text{нл}}\mathbf{u}(t_k)$, ${}^{\text{нл}}\mathbf{x}(t_k)$, $k = 0, ..., N$. При этом матрица $\tilde{\mathbf{A}}$ должна оставаться вещественной.

2. ОЦЕНИВАНИЕ ПОСТОЯННЫХ ПАРАМЕТРОВ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ

Для того чтобы можно было оценить элементы матриц статической и динамической линейных моделей двигателя, переходные процессы нелинейной модели двигателя в разомкнутой системе ${}^{\text{нл}}\mathbf{x}(t_k)$, $k = 0, ..., N$ должны быть получены при условии, что управление ${}^{\text{нл}}\mathbf{u}(t_k)$, $k = 0, ..., N$ состоит из разнесенных по времени прямоугольных импульсов по каждой из компонент вектора управления.

Вначале оценивается матрица $\mathbf{S}$ статической линейной модели. Для установившихся значений отклонений переменных состояния и управления в небольшой окрестности установившегося режима $\mathbf{x} = \mathbf{Su}$. Поскольку в этом случае в силу уравнения (1) $0 = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$, получим $\mathbf{B} = -\mathbf{AS}$.

Продолжительность переходного процесса, который состоит из m разнесенных по времени и одинаковых по ширине прямоугольных импульсов, равна $(N - 1)\Delta t$. Ширина каждого импульса и промежутка между ними $t_{\text{п}} = \dfrac{(N-1)\Delta t}{2m}$. Поэтому элементы столбцов матрицы $\mathbf{S}$, соответствующих разным компонентам вектора управления, могут быть определены с помощью деления установившихся значений отклонений переменных состояния на установившееся значение соответствующего отличного от нуля отклонения переменной управления в момент времени ${}_j t = (2j - 1)t_{\text{п}}$, $s_{ij} = \dfrac{x_i({}_j t)}{u_j({}_j t)}$, $i = 1, ..., n$, $j = 1, ..., m$.

Если шаг дискретности достаточно мал, то можно приближенно считать, что

$$\mathbf{x}(t_{k+1}) = \mathbf{x}(t_k) + \Delta t\mathbf{Ax}(t_k) + \Delta t\mathbf{Bu}(t_k) =$$
$$= (\mathbf{I} + \Delta t\mathbf{A})\mathbf{x}(t_k) - \Delta t\mathbf{ASu}(t_k), \quad k = 0, ..., N - 1,$$

а оценивание элементов a_{ij}, $i, j = 1, ..., n$, матрицы $\mathbf{A}$ динамической линейной модели можно свести к решению задачи нелинейного программирования размерности n^2:

$$a_{ij},\ i = 1, ..., n,\ j = 1, ..., n : \min\Bigg\{ \sum_{k=1}^{N} [{}^{\text{л}}\mathbf{x}(t_k) -$$
$$- {}^{\text{нл}}\mathbf{x}(t_k)]^T \mathbf{W}(t_k)[{}^{\text{л}}\mathbf{x}(t_k) - {}^{\text{нл}}\mathbf{x}(t_k)] | {}^{\text{л}}\mathbf{x}(t_k) =$$
$$= (\mathbf{I} + \Delta t\mathbf{A})^{\text{л}}\mathbf{x}(t_{k-1}) - \Delta t\mathbf{AS}^{\text{нл}}\mathbf{u}(t_{k-1}), \quad k = 1, ..., N \Bigg\}, \quad (2)$$

где $\mathbf{W}(t_k)$, $k = 1, ..., N$ это симметрические положительно определенные весовые матрицы, а переходные процессы линейной и нелинейной моделей двигателя в момент времени t_0 совпадают: ${}^{\text{л}}\mathbf{x}(t_0) = {}^{\text{нл}}\mathbf{x}(t_0)$. Начальное приближение для решения задачи (2) — единичная матрица $\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

3. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Будем считать, что постоянная вещественная $n \times n$ матрица $\mathbf{A}$ имеет различные собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, которым соответствуют собственные векторы ${}^1\mathbf{v}, {}^2\mathbf{v}, ..., {}^n\mathbf{v}$. Если среди собственных значений есть комплексные, то комплексному λ_i будет соответствовать комплексное сопряженное $\lambda_{i+1} = \bar{\lambda}_i$. Соответствующие собственные векторы ${}^{i+1}\mathbf{v} = {}^{i}\bar{\mathbf{v}}$ тоже являются комплексными сопряженными [11].

Определим $n \times n$ матрицы

$$\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$$

$$\mathbf{T} = [{}^1\mathbf{v}, {}^2\mathbf{v}, ..., {}^n\mathbf{v}].$$

Тогда матрица **A** может быть представлена в виде [8, 11]:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\Lambda\mathbf{T}^{-1} = [{}^1\mathbf{v}, {}^2\mathbf{v}, ..., {}^n\mathbf{v}]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} {}^1\mathbf{w} \\ {}^2\mathbf{w} \\ ... \\ {}^n\mathbf{w} \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {}^i\mathbf{v}{}^i\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {}^i\mathbf{H} = \sum_{i \in I_R} \lambda_i {}^i\mathrm{H} +$$

$$+ 2\sum_{i \in I_C} (\mathrm{Re}\{\lambda_i\}\mathrm{Re}\{{}^i\mathbf{H}\} - \mathrm{Im}\{\lambda_i\}\mathrm{Im}\{{}^i\mathbf{H}\}), \qquad (3)$$

где I_R — множество индексов всех вещественных собственных значений матрицы **A**, и I_C — множество индексов всех ее комплексных собственных значений, каждому из которых соответствует комплексное сопряженное, а

$$\mathrm{Re}\{{}^i\mathbf{H}\} = [\mathrm{Re}\{{}^ih_{kl}\}], \quad \mathrm{Im}\{{}^i\mathbf{H}\} = [\mathrm{Im}\{{}^ih_{kl}\}, \quad k, l = 1, ..., n.$$

Можно показать [8], что если взять тот же самый набор собственных векторов и набор различных неопределенных собственных значений, но при этом таких, что вещественным собственным значениям матрицы **A** будут в этом наборе соответствовать вещественные неопределенные, а комплексным сопряженным будут соответствовать комплексные сопряженные неопределенные, то новая матрица с неопределенными собственными значениями

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{T}\tilde{\Lambda}\mathbf{T}^{-1} = \sum_{i \in I_R} \tilde{\lambda}_i {}^i\mathbf{H} + 2\sum_{i \in I_C} (\mathrm{Re}\{\tilde{\lambda}_i\}\mathrm{Re}\{{}^i\mathbf{H}\} -$$

$$- \mathrm{Im}\{\tilde{\lambda}_i\}\mathrm{Im}\{{}^i\mathbf{H}\}) \qquad (4)$$

так же, как и матрица **A**, будет вещественной. Здесь, очевидно,

$$\tilde{\Lambda} = \mathrm{diag}\{\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, ..., \tilde{\lambda}_n\}.$$

Для того чтобы доказать, что матрица $\tilde{\mathbf{A}}$ будет вещественной, и убедиться в справедливости выражений (3) и (4), необходимо прежде доказать следующие теоремы.

Теорема 1. *Собственный вектор вещественной матрицы, соответствующий вещественному собственному значению, всегда может быть выбран вещественным.* ♦

Теорема 2. *Строки матрицы* $\mathbf{T}^{-1}$*, соответствующие комплексным сопряженным собственным значениям* $\lambda_{i+1} = \bar{\lambda}_i$ *и собственным векторам* ${}^{i+1}\mathbf{v} = {}^i\bar{\mathbf{v}}$*, также являются комплексными сопряженными* ${}^{i+1}\mathbf{w} = {}^i\bar{\mathbf{w}}$*, а строки, соответствующие вещественным собственным значениям и собственным векторам, являются вещественными.* ♦

Доказательства теорем см. в Приложении.

Очевидно, что слагаемые суммы в выражении (3), соответствующие вещественным собственным значениям ($i \in I_R$), вещественные, поскольку строки матрицы $\mathbf{T}^{-1}$, соответствующие вещественным столбцам матрицы **T**, являются вещественными. Легко показать, что другие слагаемые этой суммы, соответствующие комплексным сопряженным собственным значениям ($i \in I_C$), являются комплексными сопряженными. Действительно, пусть $\lambda_{i+1} = \bar{\lambda}_i$. Тогда

$$\lambda_i {}^ih_{kl} = \lambda_i {}^iv_k {}^iw_l, \ \lambda_{i+1} {}^{i+1}h_{kl} = \lambda_{i+1} {}^{i+1}v_k {}^{i+1}w_l =$$

$$= \bar{\lambda}_i {}^i\bar{v}_k {}^i\bar{w}_l = \bar{\lambda}_i {}^i\bar{v}_k {}^i\bar{w}_l = \bar{\lambda}_i {}^i\bar{h}_{kl}, \quad k, l = 1, ..., n.$$

Следовательно,

$$\lambda_i {}^i\mathbf{H} = \lambda_{i+1} {}^{i+1}\mathbf{H} = \lambda_i[{}^ih_{kl}] + \lambda_{i+1}[{}^{i+1}h_{kl}] = \lambda_i[{}^ih_{kl}] +$$

$$+ \bar{\lambda}_i[{}^i\bar{h}_{kl}] = (\mathrm{Re}\{\lambda_i\} + j\mathrm{Im}\{\lambda_i\})([\mathrm{Re}\{{}^ih_{kl}\}] + j[\mathrm{Im}\{{}^ih_{kl}\}]) +$$

$$+ (\mathrm{Re}\{\lambda_i\} - j\mathrm{Im}\{\lambda_i\})([\mathrm{Re}\{{}^ih_{kl}\}] - j[\mathrm{Im}\{{}^ih_{kl}\}]) =$$

$$= 2(\mathrm{Re}\{\lambda_i\}[\mathrm{Re}\{{}^ih_{kl}\}] - \mathrm{Im}\{\lambda_i\}[\mathrm{Im}\{{}^ih_{kl}\}]).$$

Таким образом, можно считать доказанными справедливость выражения (3) и вещественность матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$ в выражении (4).

4. ОЦЕНИВАНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ

Будем считать, что в моменты времени, соответствующие $k = 0, ..., N - 1$, матрица $\tilde{\mathbf{A}}$ имеет неопределенные собственные значения

$$\tilde{\lambda}_i^{\min} \leqslant \tilde{\lambda}_i(t_k) \leqslant \tilde{\lambda}_i^{\max}, \quad i \in I_R,$$

$$\mathrm{Re}\{\tilde{\lambda}_i\}^{\min} \leqslant \mathrm{Re}\{\tilde{\lambda}_i(t_k)\} \leqslant \mathrm{Re}\{\tilde{\lambda}_i\}^{\max},$$

$$\mathrm{Im}\{\tilde{\lambda}_i\}^{\min} \leqslant \mathrm{Im}\{\tilde{\lambda}_i(t_k)\} \leqslant \mathrm{Im}\{\tilde{\lambda}_i\}^{\max}, \quad i \in I^C.$$

Тогда приближенное оценивание пределов изменения собственных значений матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$ линейной модели с неопределенными собственными значениями с помощью переходных процессов нелинейной модели ${}^{\text{нл}}\mathbf{u}(t_k)$, ${}^{\text{нл}}\mathbf{x}(t_k)$, $k = 0, ..., N$ сводится к задаче нелинейного программирования размерности $2n + nN$:

$$\tilde{\lambda}_i^{\min}, \ \tilde{\lambda}_i^{\max}, \quad i \in I_R, \quad \mathrm{Re}\{\tilde{\lambda}_i\}^{\min}, \quad \mathrm{Re}\{\tilde{\lambda}_i\}^{\max},$$
$$\mathrm{Im}\{\tilde{\lambda}_i\}^{\min}, \quad \mathrm{Im}\{\tilde{\lambda}_i\}^{\max}, \quad i \in I_C,$$

$$\tilde{\lambda}_i(t_{k-1}), \quad i \in I_R, \quad \mathrm{Re}\{\tilde{\lambda}_i(t_{k-1})\}, \quad \mathrm{Im}\{\tilde{\lambda}_i(t_{k-1})\},$$
$$i \in I_C, \ k = 1, ..., N:$$

$$\min\left\{\sum_{k=1}^{N} [{}^{\text{лн}}\mathbf{x}(t_k) - {}^{\text{нл}}\mathbf{x}(t_k)]^T\mathbf{W}(t_k)[{}^{\text{лн}}\mathbf{x}(t_k) - {}^{\text{нл}}\mathbf{x}(t_k)] | {}^{\text{лн}}\mathbf{x}(t_k) = \right.$$

$$= [\mathbf{I} + \Delta t\tilde{\mathbf{A}}(t_{k-1})]^{\text{лн}}\mathbf{x}(t_{k-1}) - \Delta t\tilde{\mathbf{A}}(t_{k-1})\mathbf{S}^{\text{нл}}\mathbf{u}(t_{k-1}),$$

$$\tilde{\mathbf{A}}(t_{k-1}) = \sum_{i \in I_R} \tilde{\lambda}_i(t_{k-1}){}^i\mathbf{H} + 2\sum_{i \in I_C} [\mathrm{Re}\{\tilde{\lambda}_i(t_{k-1})\mathrm{Re}\{{}^i\mathbf{H}\} -$$

$$- \mathrm{Im}\{\tilde{\lambda}_i(t_{k-1})\}\mathrm{In}\{{}^i\mathbf{H}\}],$$

$$\tilde{\lambda}_i^{\min} \leqslant \tilde{\lambda}_i(t_{k-1}) \leqslant \tilde{\lambda}_i^{\max}, \quad i \in I_R,$$

$$\mathrm{Re}\{\tilde{\lambda}_i\}^{\min} \leqslant \mathrm{Re}\{\tilde{\lambda}_i(t_{k-1})\} \leqslant \mathrm{Re}\{\tilde{\lambda}_i\}^{\max}, \quad i \in I_C,$$

$$\mathrm{Im}\{\tilde{\lambda}_i\}^{\min} \leqslant \mathrm{Im}\{\tilde{\lambda}_i(t_{k-1})\} \leqslant \mathrm{Im}\{\tilde{\lambda}_i\}^{\max},$$

$$\left. i \in I_C, \quad k = 1, ..., N\right\}, \qquad (5)$$

где $\mathbf{W}(t_k)$, $k = 1, ..., N$ — симметрические положительно определенные весовые матрицы, а переходные процессы линейной модели с неопределенными собственными значениями и нелинейной модели в момент времени t_0 совпадают: ${}^{\text{лн}}\mathbf{x}(t_0) = {}^{\text{нл}}\mathbf{x}(t_0)$. Начальное приближение для решения задачи (5) можно задать, зная решение задачи (2). Кроме того, в задаче (5) можно использовать дополнительные ограничения, накладываемые на пределы изменения собственных значений для того, чтобы линейная модель с неопределенными собственными значениями была устойчивой и чтобы избежать случая кратных собственных значений матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$.

Решение задачи (5) чрезвычайно трудоемкое. В самом деле, необходимо найти такие пределы изменения собственных значений и одновременно на каждом шаге подобрать сами эти собственные значения так, чтобы переходные процессы линейной модели с неопределенными собственными значениями ${}^{\text{лн}}\mathbf{x}(t_k)$, $k = 0, ..., N$ как можно меньше отличались бы от переходных процессов нелинейной модели ${}^{\text{нл}}\mathbf{x}(t_k)$, $k = 0, ..., N$ при одних и тех же ${}^{\text{нл}}\mathbf{u}(t_k)$, $k = 0, ..., N$. Так получается, что общее число неизвестных, которые надо подбирать одновременно, равно $2n + nN$. Задачу можно существенно упростить, если во время каждого вычисления целевой функции отдельно на каждом шаге подбирать текущие собственные значения линейной модели с неопределенными собственными значениями. Тогда задача (5) с $2n$ неизвестными $\tilde{\lambda}_i^{\min}$, $\tilde{\lambda}_i^{\max}$, $i \in I_R$, $\mathrm{Re}\{\tilde{\lambda}_i\}^{\min}$, $\mathrm{Re}\{\tilde{\lambda}_i\}^{\max}$, $\mathrm{Im}\{\tilde{\lambda}_i\}^{\min}$, $\mathrm{Im}\{\tilde{\lambda}_i\}^{\max}$, $i \in I_C$ решается методом скользящего допуска [12]. При этом во время каждого вычисления целевой функции N раз, т. е. для каждого шага $k = 1, ..., N$, решается задача квадратичного программирования с n неизвестными:

$$
\begin{gathered}
\tilde{\lambda}_i(t_{k-1}),\ i \in I_R,\ \mathrm{Re}\{\tilde{\lambda}_i(t_{k-1})\},\ \mathrm{Im}\{\tilde{\lambda}_i(t_{k-1})\},\ i \in I_C: \\
\min\Big\{[{}^{\text{лн}}\mathbf{x}(t_k) - {}^{\text{нл}}\mathbf{x}(t_k)]^T \mathbf{W}(t_k)[{}^{\text{лн}}\mathbf{x}(t_k) - {}^{\text{нл}}\mathbf{x}(t_k)] \Big| {}^{\text{лн}}\mathbf{x}(t_k) = \\
= [\mathbf{I} + \Delta t\tilde{\mathbf{A}}(t_{k-1})]^{\text{лн}}\mathbf{x}(t_{k-1}) - \Delta t\tilde{\mathbf{A}}(t_{k-1})\mathbf{S}^{\text{нл}}\mathbf{u}(t_{k-1}), \\
\tilde{\mathbf{A}}(t_{k-1}) = \sum_{i \in I_R} \tilde{\lambda}_i(t_{k-1})^i\mathbf{H} + 2\sum_{i \in I_C}[\mathrm{Re}\{\tilde{\lambda}_i(t_{k-1})\mathrm{Re}\{{}^i\mathbf{H}\} - \\
- \mathrm{Im}\{\tilde{\lambda}_i(t_{k-1})\}\mathrm{In}\{{}^i\mathbf{H}\}], \\
\tilde{\lambda}_i^{\min} \leqslant \tilde{\lambda}_i(t_{k-1}) \leqslant \tilde{\lambda}_i^{\max}, \quad i \in I_R, \\
\mathrm{Re}\{\tilde{\lambda}_i\}^{\min} \leqslant \mathrm{Re}\{\tilde{\lambda}_i(t_{k-1})\} \leqslant \mathrm{Re}\{\tilde{\lambda}_i\}^{\max}, \quad i \in I_C, \\
\mathrm{Im}\{\tilde{\lambda}_i\}^{\min} \leqslant \mathrm{Im}\{\tilde{\lambda}_i(t_{k-1})\} \leqslant \mathrm{Im}\{\tilde{\lambda}_i\}^{\max}, \quad i \in I_C\Big\}, \qquad (6)
\end{gathered}
$$

где вектор ${}^{\text{лн}}\mathbf{x}(t_{k-1})$ известен после решения такой же задачи на предыдущем шаге, а ${}^{\text{лн}}\mathbf{x}(t_0) = {}^{\text{нл}}\mathbf{x}(t_0)$. Задача (6) решается методом прямого поиска, а при одномерном поиске по каждому из направлений методом золотого сечения [12].

5. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР ОЦЕНИВАНИЯ ГРАНИЦ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ

Разработанный метод применяется для оценивания границ или пределов изменения вещественных и мнимых частей неопределенных собственных значений матрицы линейной модели. Для этого используются переходные процессы поэлементной нелинейной модели двухвального двухконтурного авиационного ГТД. Первая компонента вектора внешних воздействий — угол отклонения рычага управления двигателем (PLA) представляет собой управляющее воздействие, а две другие компоненты — высота и скорость полета соответствуют внешним условиям. В рассматриваемом примере высота и скорость полета летательного аппарата равны нулю, а угол отклонения рычага управления двигателем соответствует максимальному режиму работы ($PLA = 68°$). Четыре переменных управления ($m = 4$) соответствуют расходу топлива в основном контуре, площади критического сечения реактивного сопла, углу поворота входных направляющих аппаратов вентилятора и углу поворота выходных направляющих аппаратов компрессора. Пять переменных состояния ($n = 5$) соответствуют частоте вращения вентилятора двигателя, частоте вращения компрессора двигателя, давлению торможения за компрессором, давлению торможения и температуре торможения за турбиной. В разомкнутой системе переходный процесс для вектора управления состоит из разнесенных по времени прямоугольных импульсов шириной 3,75 с по каждой из компонент вектора, шаг дискретности $\Delta t = 0{,}025$ с, а число точек каждого из переходных процессов $N = 1201$. При проверке результатов оценивания рассматриваются переходные процессы, соответствующие ступенчатому изменению PLA от 68 до 60° в замкнутой системе, число точек переходных процессов $N = 101$. Отметим, что используются нормированные значения всех переменных.

Матрица статической линейной модели для максимального режима, рассчитанная по переходным процессам в разомкнутой системе, имеет вид:

$$
\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0{,}5134 & 0{,}9242 & -0{,}0934 & 0{,}0097 \\ 0{,}2795 & 0{,}4833 & -0{,}0266 & -0{,}1357 \\ 0{,}6417 & -0{,}6180 & 0{,}0379 & 0{,}0083 \\ 0{,}5305 & -1{,}6514 & 0{,}0487 & 0{,}0038 \\ 0{,}3885 & 0{,}3543 & -0{,}0393 & -0{,}0080 \end{bmatrix}.
$$

Матрица динамической линейной модели для максимального режима, полученная в результате решения задачи (2) по переходным процессам в разомкнутой системе, имеет вид:

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1{,}9263 & 1{,}0458 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0219 & -1{,}6761 & 0 & 0 & 0 \\ -3{,}5986 & -9{,}4275 & -12{,}4146 & 25{,}3147 & -11{,}6271 \\ 3{,}8615 & 22{,}6271 & -17{,}9761 & -22{,}5793 & -8{,}3868 \\ 3{,}2147 & -0{,}1121 & -2{,}6981 & -11{,}1214 & -10{,}5325 \end{bmatrix}.
$$

Собственные значения матрицы динамической линейной модели для максимального режима

$$\Lambda = \mathrm{diag}(-1{,}9975;\ -1{,}6049;\ -15{,}5923 + j16{,}9982;\ -15{,}5923 - j16{,}9982;\ -14{,}3418\}.$$

Пределы изменения неопределенных собственных значений матрицы $\tilde{\mathbf{A}}$, которые приближенно оцениваются с помощью решения задач (5) и (6) по переходным процессам в разомкнутой системе, можно представить в виде

$$\Lambda^{\min} = \mathrm{diag}(-3{,}1401;\ -1{,}8540;\ -48{,}1753 + j0{,}0001;\ -48{,}1753 - j0{,}0001;\ -37{,}1688\},$$

$$\Lambda^{\max} = \mathrm{diag}(-1{,}8637;\ -0{,}2945;\ -0{,}0380 + j47{,}7044;\ -0{,}0380 - j47{,}7044;\ -5{,}0235\}.$$

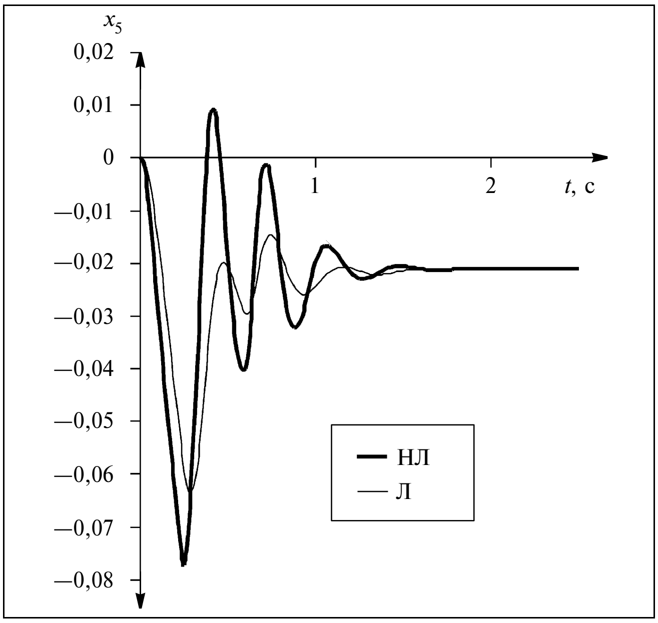

Рис. 1. Переходные процессы нормированной переменной состояния в отклонениях x_5 нелинейной модели и линейной модели с постоянными коэффициентами

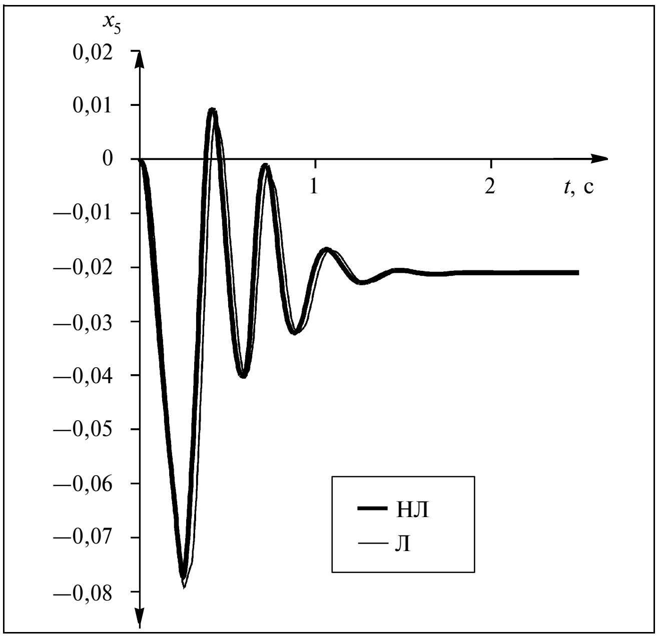

Рис. 2. Переходные процессы нормированной переменной состояния в отклонениях x_5 нелинейной модели и линейной модели с неопределенными собственными значениями

Отметим, что только дополнительные ограничения, накладываемые на пределы изменения неопределенных собственных значений линейной модели, делают ее устойчивой и позволяют избежать случая кратных собственных значений.

На рис. 1 и 2 сравниваются переходные процессы исходной нелинейной модели (НЛ) с переходными процессами линейной модели с постоянными коэффициентами (Л) и линейной модели с неопределенными собственными значениями (ЛН) в замкнутой системе. Напомним, что нормированная переменная состояния в отклонениях x_5 соответствует температуре торможения за турбиной. Видно, что расхождение между нелинейной моделью и линейной моделью с неопределенными собственными значениями значительно меньше, чем расхождение между нелинейной моделью и линейной моделью с постоянными коэффициентами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан метод оценивания границ возможных изменений собственных значений матрицы линейной модели. В качестве исходных данных для оценивания используются переходные процессы нелинейной модели авиационного газотурбинного двигателя в разомкнутой системе управления.

Метод основан на применении вычислительных алгоритмов нелинейного программирования: метода скользящего допуска, метода прямого поиска и метода золотого сечения. Это позволяет налагать ограничения на пределы изменения собственных значений, чтобы обеспечить устойчивость линейной модели с неопределенными собственными значениями и исключить кратные собственные значения.

Показано, что благодаря неопределенным собственным значениям можно существенно уменьшить расхождение между линейной и нелинейной моделями в небольшой окрестности выбранного установившегося режима.

Результаты данной работы могут быть полезны при разработке современных систем автоматического управления газотурбинными двигателями, летательными аппаратами, а также другими нелинейными объектами, которые в широком диапазоне режимов работы могут быть приближенно описаны с помощью кусочно-линейных моделей с неопределенными собственными значениями.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1. Предположим обратное. Если $\mathbf{A}$ — вещественная матрица, λ — ее вещественное собственное значение, и поэтому $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$, то справедливо также $\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \lambda\bar{\mathbf{x}}$. Отсюда $\mathbf{A}(\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}) + \lambda(\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}})$.

Это противоречит принятому предположению, поскольку вектор $\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}$ является вещественным собственным вектором матрицы **A**, соответствующим вещественному собственному значению λ.

Таким образом, собственные векторы, соответствующие вещественным собственным значениям вещественной матрицы, выбираются вещественными. Значит, если все собственные значения матрицы **A** вещественные, то и матрицы **T** и $\mathbf{T}^{-1}$ также будут вещественными.♦

Доказательство теоремы 2.

Из равенств

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} {}^1\mathbf{w} \\ \dots \\ {}^i\mathbf{w} \\ {}^{i+1}\mathbf{w} \\ \dots \\ {}^n\mathbf{w} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{T}|}\begin{bmatrix} \mathrm{T}_{11} & \mathrm{T}_{21} & \dots & \mathrm{T}_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{T}_{1i} & \mathrm{T}_{2i} & \dots & \mathrm{T}_{ni} \\ \mathrm{T}_{1,i+1} & \mathrm{T}_{2,i+1} & \dots & \mathrm{T}_{n,i+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{T}_{1n} & \mathrm{T}_{2n} & \dots & \mathrm{T}_{nm} \end{bmatrix},$$

получим

$${}^i\mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{T}|}[\mathrm{T}_{1i}, \mathrm{T}_{2i}, \dots, \mathrm{T}_{ni}]$$

$${}^{i+1}\mathbf{w} = \frac{1}{|\mathbf{T}|}[\mathrm{T}_{1,i+1}, \mathrm{T}_{2,i+2}, \dots, \mathrm{T}_{n,i+1}].$$

Если матрица **T** вещественная, то ее определитель $|\mathbf{T}|$ и алгебраические дополнения всех ее элементов T_{ls}, $l = 1, \dots, n$, $s = 1, \dots, n$ также вещественные. Каждая пара комплексных сопряженных столбцов матрицы **T**, т. е. пара комплексных сопряженных собственных векторов ${}^i\mathbf{v}$ и ${}^{i+1}\mathbf{v}$, позволяет записать ее определитель в виде

$$|{}^1\mathbf{v}, {}^2\mathbf{v}, \dots, {}^i\mathbf{v}, {}^{i+1}\mathbf{v}, \dots, {}^n\mathbf{v}| = |{}^1\mathbf{v}, \dots, {}^i\mathbf{v}, {}^i\bar{\mathbf{v}}, \dots, {}^n\mathrm{v}| =$$
$$= |1\mathbf{v}, \dots, \mathrm{Re}\{{}^i\mathbf{v}\} + j\mathrm{Im}\{{}^i\mathbf{v}\}, \mathrm{Re}\{{}^i\mathbf{v}\} - j\mathrm{Im}\{{}^i\mathbf{v}\}, \dots, {}^n\mathbf{v}| =$$
$$= |{}^1\mathbf{v}, \dots, \mathrm{Re}\{{}^i\mathbf{v}\}, \mathrm{Re}\{{}^i\mathbf{v}\} - j\mathrm{Im}\{{}^i\mathbf{v}\}, \dots, {}^n\mathbf{v}| +$$
$$+ j|1\mathbf{v}, \dots, \mathrm{Im}\{{}^i\mathbf{v}\}, \mathrm{Re}\{{}^i\mathbf{v}\} - j\mathrm{Im}\{{}^i\mathbf{v}\}, \dots, {}^n\mathbf{v}| =$$
$$= |1\mathbf{v}, \dots, \mathrm{Re}\{{}^i\mathbf{v}\}, \mathrm{Re}\{{}^i\mathbf{v}\}, \dots, {}^n\mathbf{v}| - j|1\mathbf{v}, \dots, \mathrm{Re}\{{}^i\mathbf{v}\},$$
$$\mathrm{Im}\{{}^i\mathbf{v}\}, \dots, {}^n\mathbf{v}\} + j|1\mathbf{v}, \dots, \mathrm{Im}\{{}^i\mathbf{v}\}, \mathrm{Re}\{{}^i\mathbf{v}\}, \dots, {}^n\mathbf{v}| -$$
$$- {}^{j2}|1\mathbf{v}, \dots, \mathrm{Im}\{{}^i\mathbf{v}\}, \mathrm{Im}\{{}^i\mathbf{v}\}, \dots, {}^n\mathbf{v}\} =$$
$$= 2j|1\mathbf{v}, \dots, \mathrm{Im}\{{}^i\mathbf{v}\}, \mathrm{Re}\{{}^i\mathbf{v}\}, \dots, {}^n\mathbf{v}|.$$

Тогда определитель и алгебраические дополнения каждого из вещественных элементов матрицы **T**, имеющей $n - 2k$ вещественных столбцов и k пар комплексных сопряженных столбцов, можно записать в виде $|\mathbf{T}| = (2j)^k R$, $T_{ls} = (-1)^{l+s}(2j)_k R_{ls}$, где R и R_{ls} вещественные величины.

Аналогично можно показать, что алгебраические дополнения элементов комплексных сопряженных столбцов такой матрицы можно записать в виде

$$T_{li} = (-1)^{l+i}(2j)^{k-1}P_{li} - j(-1)^{l+i}(2j)^{k-1}Q_{li},$$

$$T_{l,i+1} = (-1)^{l+i+1}(2j)^{k-1}P_{li} + j(-1)^{l+i+1}(2j)^{k-1}Q_{li},$$

где P_{li} и Q_{li} — вещественные величины.

Следовательно, элементы строк матрицы $\mathbf{T}^{-1}$, соответствующих вещественным столбцам матрицы **T**, являются вещественными:

$${}^s w_l = \frac{\mathrm{T}_{ls}}{|\mathbf{T}|} = \frac{(-1)^{l+s}(2j)^k R_{ls}}{(2j)^k R} = \frac{(-1)^{l+s}R_{ls}}{R},$$

а элементы строк, соответствующих комплексным сопряженным столбцам, являются комплексными сопряженными:

$${}^i w_l = \frac{\mathrm{T}_{li}}{|\mathbf{T}|} = \frac{(-1)^{l+i}(2j)^{k-1}P_{li} - j(-1)^{l+i}(2j)^{k-1}Q_{li}}{(2j)^k R} =$$
$$= \frac{1}{2jR}(-1)^{l+i}(P_{il} - jQ_{li}) = \frac{1}{2R}(-1)^{l+i}(-Q_{li} - jP_{li}),$$

$${}^{i+1}w_l = \frac{\mathrm{T}_{l,i+1}}{|\mathbf{T}|} =$$
$$= \frac{(-1)^{l+i+1}(2j)^{k-1}P_{li} - j(-1)^{l+i+1}(2j)^{k-1}Q_{li}}{(2j)^k R} =$$
$$= \frac{1}{2jR}(-1)^{l+i}(-P_{il} - jQ_{li}) = \frac{1}{2R}(-1)^{l+i}(-Q_{li} - jP_{li}).$$

Теорема 2 доказана.♦

ЛИТЕРАТУРА

1. *Merrill W. C., Lehtinen B., Zeller J.* The Role of Modern Control Theory in the Design of Controls for Aircraft Turbine Engines // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 1984. — Vol. 7, N 6. — P. 652—661.
2. *Mayne R., Murray D.* Application of Parameter Estimation Methods to High Unstable Aircraft // Ibid. — 1988. — Vol. 11, N 3. — P. 213—219.
3. *Identification* of Model Parameters and Associated Uncertainties for Robust Control Design / Karlov V. I., Miller D. M., Vander Velde W. E., Crawley E. F. // Ibid. — 1994. — Vol. 17, N 3. — P. 495—504.
4. *Er-Wei Bai, Nagpal K. M.* Least square type algorithms for identification in the presence of modeling uncertainty // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1995. — Vol. 40, N 4. — P. 756—761.
5. *Ding F., Chen T.* Hierarchical Least Squares Identification Methods for Multivariable Systems // Ibid. — 2005. — Vol. 50, N 3. — P. 397—402.
6. *Leibov R.* Identification of Linear Model Parameters and Uncertainties for an Aircraft Turbofan Engine // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 1997. — Vol. 20, N 6. — P. 1274—1275.
7. *Лейбов Р. Л.* Линейная модель авиационного газотурбинного двигателя с неопределенными матричными параметрами // Вопросы прикладной математики и вычислительной механики: Сб. науч. тр. — М.: МГСУ, 1999. — № 2. — С. 135—140.
8. *Лейбов Р. Л.* Идентификация линейной модели динамической системы на основе диагонализации // Там же. — 2000. — № 3. — С. 95—104.
9. *Лейбов Р. Л.* Линейная модель системы с неопределенными собственными значениями // Там же. — 2001. — № 4. — С. 167—174.
10. *Leibov R.* Aircraft Turbofan Engine Linear Model with Uncertain Eigenvalues // IEEE Trans. on Automatic Control. — 2002. — Vol. 47, N 8. — P. 1367—1369.
11. *Беллман Р.* Введение в теорию матриц. — М.: Наука, 1976. — 352 с.
12. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. — М.: Мир, 1975. — 534 с.

☎ *(495) 413-98-29*

E-mail: r_leibov@mtu-net.ru ❑