УДК 62-501.52

О ДОСТАТОЧНЫХ И НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. П. Жуков

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова, г. Москва

Получены новые достаточные и необходимые условия асимптотической устойчивости состояний равновесия автономных динамических объектов, описываемых системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений типа Коши произвольного порядка. Применение специального класса функций (вместо функций Ляпунова) позволило получить обращение теоремы об асимптотической устойчивости, имеющее ясный геометрический смысл и наглядность.

ВВЕДЕНИЕ

Обращению теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости посвящено много работ. Подробно этот вопрос рассматривался в монографии [1], где приведена обширная литература. Из нее видно, что указанное обращение достигается путем построения для каждой асимптотически устойчивой системы весьма сложных функций, удовлетворяющих требованиям теоремы. В данной работе получены необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости для автономных систем, которые отличаются от рассматриваемых ранее тем, что в них вместо класса функций Ляпунова применяется класс функций, зависящих от параметра. Благодаря этому для любой асимптотически устойчивой системы удается указать весьма простую в смысле геометрической интерпретации непрерывную функцию, удовлетворяющую новым необходимым и достаточным условиям. Обращение теоремы об асимптотической устойчивости приобретает ясный геометрический смысл и большую наглядность, что может облегчить нахождение новых используемых функций. В данной работе в качестве иллюстрации предлагаемого подхода приводятся результаты для автономных асимптотически устойчивых систем. В дальнейшем предполагается развитие аналогичного подхода для исследования на асимптотическую устойчивость нелинейных неавтономных динамических систем.

1. ОПИСАНИЕ КЛАССА ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

В рассмотрение вместо функций Ляпунова вводится класс функций $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$, зависящих от параметра ε, что позволяет для каждой асимптотически устойчивой системы указать простую в смысле геометрической трактовки функцию $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$; для большого класса асимптотически устойчивых систем можно указать еще более простую функцию $S(\mathbf{x})$. Подробно свойства этих простых функций будут рассмотрены при их построении в доказательстве необходимости условий сформулированной далее теоремы. Здесь же скажем, что геометрический смысл функции $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ состоит в том, что она означает расстояние от данной точки $\mathbf{x}$ до границы некоторой окрестности асимптотически устойчивой точки равновесия (эта окрестность определяется параметром ε), измеренное вдоль траектории; функция $S(\mathbf{x})$ имеет смысл расстояния от данной точки $\mathbf{x}$ до точки равновесия, измеренного вдоль траектории (длина положительной полутраектории). Функции $S(\mathbf{x})$ не могут применяться, например, в случае устойчивых фокусов (на фазовой плоскости), у которых длина положительных полутраекторий бесконечна (функция $S(\mathbf{x})$ при этом не имеет смысла); в этом случае применима функция $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$.

Будем рассматривать непрерывные неотрицательные скалярные функции $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$ векторного аргумента $\mathbf{x}$, заданные в некоторой области $G_V \subseteq G$, являющейся окрестностью точки равновесия $\mathbf{x}_* = 0$, и зависящие в общем случае от скалярного параметра $\varepsilon \in R^+$, где $R^+ = [0, \infty)$ — положительная полуось вещественной числовой оси. Говоря иначе, рассматриваются семейства скалярных функций по параметру ε (в случае, когда функция $V(\mathbf{x}, \varepsilon) = V(\mathbf{x})$ не зависит от ε, будем считать, что семейство состоит из одной этой функции). Класс рассматриваемых функций характеризуется следующими свойствами. При любом значении параметра $\varepsilon > 0$ существует такое множество $\delta_\varepsilon \subset G_V$, содержащее точку $\mathbf{x}_* = 0$, что $V(\mathbf{x}, \varepsilon) = 0$ при $\mathbf{x} \in \delta_\varepsilon$. При этом, если функция V явно зависит от $\varepsilon > 0$, то множество δ_ε является компактной окрестностью точки $\mathbf{x}_* = 0$. В случае функции $V(\mathbf{x})$, не зависящей от ε, множество δ_ε состоит лишь из точки $\mathbf{x}_* = 0$. Предполагается, что при $\varepsilon \to 0$ семейство δ_ε сходится к точке $\mathbf{x}_* = 0$ ($\dim\delta_\varepsilon = \max\limits_{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in \delta_\varepsilon} \rho(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, где ρ — расстояние между точками x_i и x_j), т. е. для любого шара s с центром в этой точке существует такое число ε_s, что все множества δ_ε, соответствующие значениям $\varepsilon \leqslant \varepsilon_s$, принадлежат этому шару. При любом фиксированном ε функция $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$ является положительной при любом $\mathbf{x} \in G_V \backslash \delta_\varepsilon$. Предполагается, что при любом $\varepsilon > 0$ производная $\dot{V}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ в силу системы (1) — см. § 2 — на множестве $G_V \backslash \delta_\varepsilon$ непрерывна по $\mathbf{x}$ (соответственно, производная $\dot{V}(\mathbf{x})$ непрерывна вне точки $\mathbf{x}_* = 0$). Для этого функция $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$ не обязательно должна быть непрерывно дифференцируемой на множестве $G_V \backslash \delta_\varepsilon$; соответствующим примером служит упомянутая выше функция $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$, для которой $\dot{S}(\mathbf{x}, \varepsilon) = -|\mathbf{f}(\mathbf{x})|$, если точка $\mathbf{x}_* = 0$ асимптотически устойчива. Этих требований, налагаемых на производную $\dot{V}(\mathbf{x}, \varepsilon)$, достаточно для доказательства приведенной далее теоремы. Однако, учитывая ее применение для исследования конкретных систем, будем считать функции $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$ непрерывно дифференцируемыми на $G_V \backslash \delta_\varepsilon$ (подробнее об этом далее).

Зависящую от параметра $\varepsilon > 0$ функцию $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$ с указанными свойствами (включая сходимость множества δ_ε к точке $\mathbf{x}_* = 0$) будем называть δ_ε — определенно-положительной на множестве G_V. Функции Ляпунова $V(\mathbf{x})$ являются, очевидно, частным случаем δ_ε — определенно-положительных функций.

Характер класса функций $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$, используемых в теореме о достаточных и необходимых условиях асимптотической устойчивости (см. § 2), существенно зависит от характера множеств δ_ε, используемых при построении для любой асимптотически устойчивой точки системы (1) — см. далее — функции $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$, удовлетворяющей этой теореме и имеющей простой геометрический смысл. Удалось указать такие множества δ_ε, при которых для любой асимптотически устойчивой точки можно построить непрерывную функцию $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$, что позволило сформулировать приведенную в этой работе теорему в терминах класса непрерывных функций $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$ (непрерывные функции $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ и соответствующие им множества δ_ε будут описаны при доказательстве необходимости условий данной далее теоремы). При иных множествах δ_ε функция $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ для некоторых асимптотически устойчивых точек равновесия оказывается разрывной (разрывы имеют место при переходе с некоторой траектории на соседние к ней траектории, вдоль каждой траектории функция $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ является гладкой и имеющей, как увидим далее, производную $\dot{S} = -|\mathbf{f}(\mathbf{x})|$, $\mathbf{x} \in G_V \backslash \delta_\varepsilon$; эти разрывные функции имеют такой же простой геометрический смысл, как и непрерывные). Вследствие этого теорему для этого случая пришлось бы сформулировать либо в терминах разрывных функций $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$, которые являются гладкими вдоль траекторий и разрывными при переходе с одной траектории на другие, либо в терминах разрывных функций более общего типа, имеющих разрывы и на траекториях. Но это существенно усложняет применение теоремы для исследования конкретных систем (1). Исходя из высказанных соображений, рассматривается именно класс непрерывных параметрических функций $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$.

При доказательстве достаточности условий приведенной далее теоремы вопрос о вычислении производной $\dot{V}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ в силу системы (1) не возникает, так как доказательство опирается лишь на факт ее существования, гарантированный условиями теоремы. При доказательстве необходимости этих условий вопрос о вычислении этой производной возникает и разрешается, как увидим далее, весьма просто благодаря тому, что для каждой асимптотически устойчивой точки равновесия мы указываем функцию $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ с производной в силу системы (1) в виде $\dot{S} = -|\mathbf{f}(\mathbf{x})|$, $\mathbf{x} \in G_V \backslash \delta_\varepsilon$, которая легко вычисляется. Применение достаточных условий теоремы для исследования конкретных систем вида (1) на асимптотическую устойчивость требует умения вычислять производную в силу системы от функций $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$, выбираемых в качестве претендентов для удовлетворения условиям теоремы. В этом случае мы не можем считать, что $V(\mathbf{x}, \varepsilon) = S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ и $\dot{S} = -|\mathbf{f}(\mathbf{x})|$, ибо это верно только, если заранее известно, что исследуемая точка равновесия асимптотически устойчива. Однако заранее это не известно. Поэтому при применении достаточных условий в такой неопределенной ситуации производную в силу системы следует вычислять по общей формуле $\dot{V}(\mathbf{x}, \varepsilon) = (\operatorname{grad} V(\mathbf{x}, \varepsilon), \mathbf{f}(\mathbf{x}))$, которая из-за необходимости вычисления градиента $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$ требует гладкости функции $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$ по $\mathbf{x}$. Исходя из сказанного, будем требовать гладкости функций $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$ на множестве $G_V \backslash \delta_\varepsilon$ при каждом значении $\varepsilon > 0$. На границе $\Gamma(\delta_\varepsilon)$ множества δ_ε эта функция может быть негладкой. Заметим, что при $\mathbf{x} \in \operatorname{Int}\delta_\varepsilon$ производная $\dot{V}(\mathbf{x}, \varepsilon) = 0$ в силу того, что $V(\mathbf{x}, \varepsilon) = 0$ при $\mathbf{x} \in \delta_\varepsilon$.

2. ДОСТАТОЧНЫЕ И НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассматривается автономный динамический объект, описываемый системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений произвольного порядка

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \ \mathbf{x} \in R^n, \qquad (1)$$

имеющей изолированную точку равновесия $\mathbf{x}_* = 0$. Функция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ задана в некоторой области $G \subseteq R^n$, являющейся окрестностью точки $\mathbf{x}_* = 0$, непрерывна и обеспечивает единственность решения. Как правило, будем считать ее гладкой (класса C^1).

Теорема. *Точка равновесия* $\mathbf{x}_* = 0$ *системы* (1) *асимптотически устойчива тогда и только тогда, если существует такая* δ_ε *— определенно-положительная функция* $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$, *что при любом* $\varepsilon > 0$ *ее полная производная по времени в силу системы* (1) *отрицательна на множестве* $G_V \backslash \delta_\varepsilon$.

Если функция $V(\mathbf{x}, \varepsilon) = V(\mathbf{x})$ не зависит от параметра, то получаем формулировку обращенной теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. Справедливость такой формулировки доказана ранее в ряде работ обращением теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости. При доказательстве приведенной теоремы доказана, в частности, справедливость достаточности условий обращенной теоремы Ляпунова, но необходимость условий этой теоремы не доказана, ибо при доказательстве необходимости условий ставилась цель получить для каждой асимптотически устойчивой системы (1) функцию $V = S$, характеризующуюся определенной геометрической интерпретацией, что для некоторых асимптотических устойчивых систем можно сделать, используя лишь функции $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$, явно зависящие от параметра ε, к которым функция Ляпунова $V(\mathbf{x})$ не относится.

При доказательстве необходимости условий теоремы (см. § 4) указаны требования, при выполнении которых для асимптотически устойчивой точки равновесия системы (1) на любом компакте $B \subset G_п$ ($G_п$ — область притяжения точки равновесия) существует определенно-положительная непрерывная функция $S(\mathbf{x})$, имеющая на множестве B непрерывную по $\mathbf{x}$ производную в силу системы $\dot{S} = -|\mathbf{f}(\mathbf{x})|$, а также являющаяся на множестве $B \backslash (\mathbf{x}_* = 0)$ непрерывно дифференцируемой по $\mathbf{x}$ (функция Ляпунова типа $S(\mathbf{x})$). Эти требования выполняются в классе линейных систем с постоянными коэффициентами (см. доказательство теоремы в § 4). Поэтому получаем

Следствие. *Для любой асимптотически устойчивой точки равновесия линейной системы с постоянными коэффициентами* (1) *на любом множестве* $B \subset G_п$ *существует непрерывная функция Ляпунова типа* $S(\mathbf{x})$, *имеющая на множестве* B *непрерывную по* $\mathbf{x}$ *производную в силу системы* (1) *в виде* $\dot{S} = -|\mathbf{f}(\mathbf{x})|$ *и непрерывно дифференцируемая на множестве* $B \backslash (\mathbf{x}_* = 0)$.

Таким образом, в случае исследования на асимптотическую устойчивость линейных систем с постоянными коэффициентами нет необходимости прибегать к поиску функций $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$, явно зависящих от параметра. В этом случае целесообразнее искать более простые функции Ляпунова типа $S(\mathbf{x})$, характеризующиеся простым геометрическим смыслом.

3. ПРИМЕР

Рассмотрим конкретную нелинейную динамическую систему с асимптотически устойчивой точкой равновесия, для которой не существует функции Ляпунова типа $S(\mathbf{x})$, но существует функция $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$, зависящая от параметра. Пусть система описывается в полярных координатах дифференциальными уравнениями $\dot{\rho} = -\rho^n$, $\dot{\theta} = 1$, где n — любое положительное число. Точка равновесия, соответствующая значению $\rho = 0$, является асимптотически устойчивым фокусом. За время $dt > 0$ функция $S(\rho, \varepsilon)$ получает отрицательное приращение

$$dS(\rho, \varepsilon) = -\sqrt{(\rho d\theta)^2 + (d\rho)^2} = -\sqrt{(\rho dt)^2 + (\rho^n dt)^2} =$$

$$= -\rho dt\sqrt{1 + \rho^{2(n-1)}} = \frac{d\rho}{\rho^{n-1}}\sqrt{1 + \rho^{2(n-1)}},$$

$$\text{где } \sqrt{(\rho d\theta)^2 + (d\rho)^2} = |dS(\rho, \varepsilon)|.$$

При $n = 1$ приращение $dS(\rho, \varepsilon) = d\rho$. Интегрируя правую часть этого выражения от окружности радиуса ρ до окружности радиуса ε, а левую от $S(\rho, \varepsilon)$ до 0, получаем зависящую от параметра ε функцию $S(\rho, \varepsilon) = \sqrt{2}(\rho - \varepsilon)$. Если интегрировать правую часть от окружности радиуса ρ до точки $\rho = 0$, то получим функцию Ляпунова $S(\rho) = \sqrt{2}\rho$. Заметим, что $S(\rho) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} S(\rho, \varepsilon)$.

Если же $n = 2$, то $dS(\rho, \varepsilon) = d\rho\sqrt{1 + 1/\rho^2}$ и существует функция $S(\rho, \varepsilon) = \sqrt{1+\rho^2} - \sqrt{1+\varepsilon^2} + \ln\dfrac{(1+\sqrt{1+\varepsilon^2})\rho}{(1+\sqrt{1+\rho^2})\varepsilon}$, но в силу расходимости интеграла $\int_\rho^0 \sqrt{1 + 1/\rho^2}\,d\rho$ не существует функции $S(\rho)$ с конечными значениями, что видно также из того, что $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} S(\rho, \varepsilon) = \infty$. Таким образом, при $n = 2$ не существует функции Ляпунова типа $S(\rho)$, но существует зависящая от параметра функция $S(\rho, \varepsilon)$. Оценки показывают, что этот же факт имеет место при $n > 2$. Этот факт связан с тем (как показано в доказательстве теоремы), что при $n \geqslant 2$ длина любой положительной полутраектории, лежащей в сколь угодно малой окрестности точки равновесия, имеет бесконечное значение.

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Достаточность. Покажем, что если условия теоремы выполнены, то точка $\mathbf{x}_* = 0$ асимптотически устойчива. Для этого сначала докажем обычную устойчивость этой точки, т. е. докажем, что при условиях теоремы для любой окрестности $\eta \subset G_V$ точки $\mathbf{x}_* = 0$ существует такая окрестность $q \subset \eta$ этой точки, что любое решение $\mathbf{x}(t)$ уравнения (1), начинающееся в момент времени t_0 в q, не покинет окрестность η при любом $t_0 > t$.

Пусть $\eta \subset G_V$ — любая окрестность точки $\mathbf{x}_* = 0$. Искомое множество $q \subset \eta$ построим с помощью следующего способа, который применим как в случае, когда теореме удовлетворяет функция $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$, явно зависящая от параметра ε, так и в случае, когда ей удовлетворяет не зависящая от этого параметра функция $V(\mathbf{x})$. Рассмотрим для обоих этих случаев множества $X_\alpha = \{\mathbf{x}\colon V \leqslant \alpha \geqslant 0\}$, где $V = V(\mathbf{x}, \varepsilon)$ в первом случае и $V = V(\mathbf{x})$ во втором случае. При любом фиксированном $\varepsilon > 0$ в силу непрерывности функции V имеем: $X_\alpha \to \delta_\varepsilon$ при $\alpha \to 0$

(в случае функции $V(\mathbf{x})$ множество δ_ε состоит из точки $\mathbf{x}_* = 0$), т. е. для любого числа $\Delta > 0$ существует такое число $\alpha_\Delta > 0$, что при любом $\alpha \leqslant \alpha_\Delta$ $X_\alpha \subset \delta_{\Delta\varepsilon}$, где $\delta_{\Delta\varepsilon} - \Delta$ — окрестность множества δ_ε, определяемая как $\delta_\varepsilon = \bigcup_{\mathbf{x} \in \delta_\varepsilon} \Delta(\mathbf{x})$, где $\Delta(\mathbf{x})$ — шар радиуса Δ с центром в точке $\mathbf{x}$. Действительно, на компактном множестве $g_{\Delta\varepsilon} = \overline{G_{1V}/\delta_{\Delta\varepsilon}}$ непрерывная положительная функция V достигает своей нижней грани $\inf\limits_{\mathbf{x} \in g_{\Delta\varepsilon}} V = C_{\Delta\varepsilon} > 0$ $(\bar{G}_{1V} \subset G_V,\ \delta_\varepsilon \subset G_{1V})$. Возьмем для любого $\Delta > 0$ положительное число $\alpha_\Delta < C_{\Delta\varepsilon}$ (например, $\alpha_\Delta = 0{,}5C_{\Delta\varepsilon}$). Очевидно, что при любом $\alpha < \alpha_\Delta$ $X_\alpha = \{\mathbf{x}\colon V \leqslant \alpha\} \subset \delta_\varepsilon$ (точки $\mathbf{x} \in X_\alpha$ не могут лежать в множестве $g_{\Delta\varepsilon}$, так как $\inf\limits_{\mathbf{x} \in g_{\Delta\varepsilon}} V = C_{\Delta\varepsilon} > \alpha_\Delta \geqslant \alpha$). Так как функции $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$, $V(\mathbf{x})$ по условию являются непрерывными, то (по определению непрерывности этих функций в точке $\mathbf{x}_* = 0$) для любого $\alpha > 0$ существует такая окрестность S_α этой точки, что при $\mathbf{x} \in S_\alpha$ функция $V < \alpha$. Но это означает, что множество X_α содержит окрестность S_α и само является окрестностью точки $\mathbf{x}_* = 0$.

Исходя из изложенного и учитывая, что при $\varepsilon \to 0$ множество δ_ε сходится к точке $\mathbf{x}_* = 0$ и что множество η есть окрестность точки $\mathbf{x}_* = 0$ (точка $\mathbf{x}_* = 0$ входит в множество η с некоторым шаром), можно выбрать такие числа $\varepsilon(\eta) > 0$ и $\alpha(\eta) > 0$, чтобы множество $X_{\alpha(\eta)} = \{\mathbf{x}\colon V \leqslant \alpha(\eta)\} \subset \eta$. Множество $X_{\alpha(\eta)}$, являющееся окрестностью точки $\mathbf{x}_* = 0$, можно взять в качестве искомой окрестности $q \subset \eta$ этой точки. Действительно, любое решение $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$, начинающееся при $t = t_0$ в множестве $X_{\alpha(\eta)}$, не может при $t > t_0$ его покинуть, ибо по условию теоремы $\dot{V} \leqslant 0$, и, следовательно, при $t > t_0$ значения функции не могут возрастать и поэтому для них имеем $V \leqslant \alpha(\eta)$. Следовательно, этим значениям соответствуют решения $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \in X_{\alpha(\eta)}$. Заметим, что в случае, когда теореме удовлетворяет функция $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$, явно зависящая от ε, в качестве множества $X_{\alpha(\eta)}$ можно взять множество $\delta_\varepsilon = \{\mathbf{x}\colon V(\mathbf{x}, \varepsilon) = 0\} \subset \eta$ — окрестность точки $\mathbf{x}_* = 0$; в случае функции $V(\mathbf{x})$ этого сделать нельзя, так как при этом множеством δ_ε является точка $\mathbf{x}_* = 0$, а не окрестность.

Так как $q = X_{\alpha(\eta)} \subset \eta$, то из изложенного следует, что при любом $\mathbf{x}_0 \in q = X_{\alpha(\eta)}$ решение $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \subset \eta$. Таким образом, обычная устойчивость точки $\mathbf{x}_* = 0$ доказана.

Покажем, что для указанных решений $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \subset \eta$ при условиях теоремы

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = 0, \tag{2}$$

т. е. точка $\mathbf{x}_* = 0$ асимптотически устойчива. Условие (2) означает, что соответствующая решению $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ изображающая точка сходится к точке $\mathbf{x}_* = 0$ при $t \to 0$, т. е. в некоторый момент времени $t(q_1)$ попадает в любой шар $q_1 \subset \eta$ с центром в точке $\mathbf{x}_* = 0$ и при любом $t > t(q_1)$ остается в этом шаре. Покажем, что для любого выбранного шара q_1 существует такой момент времени $t(q_1)$. Для доказательства воспользуемся, в частности, тем, что точка $\mathbf{x}_* = 0$ обладает обычной устойчивостью. В соответствии с определением обычной устойчивости точки $\mathbf{x}_* = 0$ для любого шара q_1 существует такой открытый шар $s \subset q_1$, что если точка $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ попадает в некоторый момент времени $t(s)$ в шар s, то она при всех t > $t(s)$ будет оставаться в шаре q_1. Ясно, что если существует момент времени $t(s_1)$, то существует и момент времени $t(q_1)$; в частности за $t(q_1)$ можно принять $t(s)$. Остается доказать, что момент времени $t(s)$ существует, т. е. что при $t \to \infty$ $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ изменится от $\mathbf{x}(t_0)$ до $\mathbf{x}(t(s), \mathbf{x}_0) \in s$. Для этого выберем значение ε таким, чтобы соответствующее функции $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$ множество δ_ε удовлетворяло условию $\delta_\varepsilon \subset s$. Но тогда имеем

$$\operatorname{supr}_{\mathbf{x} \in g_{s\eta}} \dot{V}(\mathbf{x}, \varepsilon) = c_\varepsilon < 0, \quad g_{s\eta} = \overline{\eta \backslash s}.$$

Действительно, непрерывная по условию отрицательная функция $\dot{V}(\mathbf{x}, \varepsilon)$ достигает на компактном множестве $g_{s\eta}$ своей точной верхней грани. Теперь предположим, что момент времени $t(s)$ не существует, т. е. точка $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ никогда не войдет в шар s, оставаясь все время в множестве $\overline{\eta \backslash s}$ (из множества η точка $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ выйти не может). Но это приводит к противоречию. Действительно, согласно формуле Лейбница—Ньютона, при сделанном предположении

$$V(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), \varepsilon) = V(\mathbf{x}_0, \varepsilon) + \int_{t_0}^{t} \dot{V}(\mathbf{x}(\tau, \mathbf{x}_0), \varepsilon) d\tau \leqslant V(\mathbf{x}_0, \varepsilon) + c_\varepsilon(t - t_0).$$

Так как $c_\varepsilon < 0$, то из приведенного соотношения видно, что при достаточно большом t значение функции $V(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), \varepsilon)$ становится любым отрицательным числом, чего не может быть, так как $V(\mathbf{x}, \varepsilon) \geqslant 0$ при $\mathbf{x} \in G_V$. Полученное противоречие доказывает, что точка $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ не может оставаться все время вне шара s, и, следовательно, существует момент времени $t(s)$, когда она в этот шар войдет. Но тогда, согласно приведенным выше рассуждениям, выполняется соотношение (2); т. е. точка $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ асимптотически устойчива. Достаточность условий теоремы доказана.

Сделаем необходимое для дальнейшего *замечание* о характере асимптотической устойчивости в случае автономных систем (1). Пусть $G_п \subset G$ — область притяжения точки $\mathbf{x}_* = 0$, т. е. множество всех таких точек $\mathbf{x}_0 \in G$, которым соответствуют решения $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0))$ такие, что $\lim\limits_{t \to \infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) = 0$. Пусть множество $A \subset G_п$. Точка $\mathbf{x}_* = 0$ называется асимптотически устойчивой равномерно по t_0 и $\mathbf{x}_0 \in A$, если она асимптотически устойчива и для любой ее окрестности η можно указать такое число $T(\eta)$, что $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \in \eta$ при $t \geqslant t_0 + T(\eta)$, каковы бы ни были t_0 и $\mathbf{x}_0 \in A$. Из соответствующей леммы в работе [1] следует, что в случае автономных систем (1) асимптотическая устойчивость точки $\mathbf{x}_* = 0$ обязательно равномерна по t_0 и $\mathbf{x}_0 \in B$, где B — любой компакт из $G_п$ (для неавтономных систем этот факт не имеет места; в этом случае для равномерности асимптотической устойчивости по t_0 и $\mathbf{x}_0$ система должна удовлетворять дополнительным требованиям).

Необходимость. Пусть точка равновесия $\mathbf{x}_* = 0$ автономной системы (1) асимптотически устойчива. Тогда она будет также асимптотически устойчивой равномерно по t_0 и $\mathbf{x}_0$ в указанном выше смысле. Известно [1, 2], что в этом случае существует функция Ляпунова $V(\mathbf{x})$, удовлетворяющая условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, а, следовательно, и условиям сформулированной выше теоремы. Таким образом, указанные теоремы являются обратимыми. Поэтому при доказательстве необходимости условий теоремы речь будет идти не об обратимости вообще, а об обратимости на основе применения специального класса функций $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$, отличающихся от известных функций $V(\mathbf{x})$, обращающих теорему Ляпунова об асимптотической устойчивости, весьма простой геометрической трактовкой и, следовательно, наглядностью, в чем заключается их достоинство. Как будет показано далее, для очень широкого класса асимптотически устойчивых систем (1), не включающего в себя лишь достаточно экзотические системы, функции $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ могут не зависеть от параметра ε и являться функциями Ляпунова $V(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x})$, обладая в то же время указанной геометрической наглядностью. Уже один этот факт показывает полезность новых необходимых и достаточных условий асимптотической устойчивости. Простота и наглядность геометрической интерпретации функций $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$, $S(\mathbf{x})$ достигается ценой того, что в упомянутых выше экзотических случаях, которые будут описаны далее, приходится использовать зависящие от параметра функции $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$. Именно этим объясняется, что теорема формулируется в общем виде в терминах функций $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$, зависящих от параметра ε. Заметим, что при $\varepsilon > 0$ функции $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$ и, в частности, функции $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$, не являясь знакоопределенными, не могут удовлетворять условиям теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости, сформулированной в терминах функций $V(\mathbf{x})$. Поэтому появление нового класса функций $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ и $S(\mathbf{x})$ не может быть связано с теоремой Ляпунова. Для этого нужны новые необходимые и достаточные условия, которые и даны приведенной выше теоремой, сформулированной в терминах функций $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$ и указывающей для каждой асимптотически устойчивой системы именно функции $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ или $S(\mathbf{x})$ с отмеченными выше свойствами.

Приступим непосредственно к построению для асимптотически устойчивых точек равновесия систем вида (1) функций $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ и $S(\mathbf{x})$, удовлетворяющих теореме. На любом компакте $B \subset G_п$ ($G_п$ — область притяжения), являющемся окрестностью точки $\mathbf{x}_* = 0$, для любой асимптотически устойчивой системы построим сначала функцию $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$, явно зависящую от параметра ε. Сначала построим семейство $\{\delta_\varepsilon\}$ множеств $\delta_\varepsilon \subset B$, на которых $S(\mathbf{x}, \varepsilon) = 0$. Каждое из этих множеств должно по условию быть замкнутой окрестностью точки $\mathbf{x}_* = 0$, а при $\varepsilon \to 0$ множества семейства $\{\delta_\varepsilon\}$ должны сходиться к точке $\mathbf{x}_* = 0$. Кроме того, для целей построения непрерывной по $\mathbf{x}$ функции $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ мы построим множества δ_ε такими, чтобы они имели гладкую границу $\Gamma(\delta_\varepsilon)$, а решение $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$, соответствующее любой точке $\mathbf{x}_0 \in \delta_\varepsilon$, сходясь при $t > t_0$ к точке $\mathbf{x}_* = 0$, не покидало бы δ_ε (т. е. множество δ_ε состоит из положительных полутраекторий, целиком лежащих в δ_ε, и является поэтому инвариантным множеством), а все траектории, входящие в δ_ε, пересекали бы границу $\Gamma(\delta_\varepsilon)$ трансверсально (т. е. не касаясь этой границы). Такие множества δ_ε можно построить, например, следующим образом. На основе известных результатов об обращении теоремы Ляпунова асимптотическая устойчивость точки равновесия автономной системы (1) является равномерной по t_0 и $\mathbf{x}_0 \in B \subset G_п$, и поэтому на любом компакте $B \subset G_п$ существует функция Ляпунова $V(\mathbf{x})$, удовлетворяющая этой теореме. Рассмотрим все множества $\delta_\varepsilon = \{\mathbf{x}\colon V(\mathbf{x}) \leqslant \varepsilon\} \subset B$, где ε — положительные числа. В силу свойств функций $V(\mathbf{x})$ (знакоопределенность, непрерывность) множества δ_ε при $\varepsilon \to 0$ сходятся к точке $\mathbf{x}_* = 0$ ($\lim\limits_{\varepsilon\to\infty} \dim\delta_\varepsilon = 0$; $\dim\delta_\varepsilon = \max\limits_{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \in \delta_\varepsilon} \rho(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$). Каждое из множеств δ_ε является замкнутой окрестностью точки $\mathbf{x}_* = 0$ (это следует из непрерывности функции $V(\mathbf{x})$). Гладкость границы $\Gamma(\delta_\varepsilon)$ множества δ_ε следует из теоремы о неявной функции [3], примененной к уравнению $F(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) - \varepsilon = 0$, неявно задающему $(n - 1)$-мерную гиперповерхность $\Gamma(\delta_\varepsilon)$. Действительно, функция $F(\mathbf{x})$ удовлетворяет всем условиям этой теоремы (она непрерывна вместе со своими частными производными $\partial F(\mathbf{x})/\partial x_i$, $i = 1, ..., n$ и т. д.). Поэтому задаваемая этой функцией неявно гиперповерхность $\Gamma(\delta_\varepsilon)$ является гладкой в некоторой окрестности любой точки $\mathbf{x} \in \Gamma(\delta_\varepsilon)$. Гладкость границы $\Gamma(\delta_\varepsilon)$ нужна для того, чтобы имело смысл понятие трансверсальности траекторий к этой границе. Сама же трансверсальность следует из определенной отрицательности производной в силу системы от функции Ляпунова ($\dot V(\mathbf{x}) < 0$ при любом $\mathbf{x} \in B$, кроме точки $\mathbf{x}_* = 0$; очевидно, что $\operatorname{supr}\limits_{\mathbf{x} \in b_\varepsilon} \dot V(\mathbf{x}) = c < 0$, где $b_\varepsilon = \overline{B_\varepsilon \backslash \delta_\varepsilon}$). Действительно, если $\dot V(\mathbf{x}) = (\operatorname{grad} V(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x})) < 0$ при $\mathbf{x} \in \Gamma(\delta_\varepsilon)$, то это означает, что траектория (следовательно, вектор $f(\mathbf{x})$) не может быть касательной к гиперповерхности $\Gamma(\delta_\varepsilon)$, т. е. ортогональной к градиенту $V(\mathbf{x})$, который, очевидно, ортогонален к ней.

Функцию $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$, заданную на любом компакте $B \subset G_п$, определим при каждом значении $\varepsilon > 0$ и соответствующем ему множестве δ_ε следующим образом. Любой точке $\mathbf{x} \in B$ поставим в соответствие расстояние $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ от этой точки $\mathbf{x}$ до множества δ_ε, измеренное вдоль траектории $T_\mathbf{x}$, проходящей через точку $\mathbf{x}$, и определяемое на всем множестве B как

$$S(\mathbf{x}, \varepsilon) = \min_{\mathbf{x}_1 \in \delta_\varepsilon \cap T_\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1), \tag{3}$$

где $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1)$ — расстояние от данной точки $\mathbf{x} \in B$ до любой точки $\mathbf{x}_1 \in \delta_\varepsilon \cap T_\mathbf{x}$, измеренное вдоль траектории $T_\mathbf{x}$. В соответствии с этим определением $S(\mathbf{x}, \varepsilon) = 0$, если $\mathbf{x} \in \delta_\varepsilon$, и $S(\mathbf{x}, \varepsilon) > 0$, если $\mathbf{x} \in B\backslash\delta_\varepsilon$. Функция $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$ может быть выражена для $\mathbf{x} \in B\backslash\delta_\varepsilon$ следующим образом (далее решение $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0)$ ради удобства будем обозначать $\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})$):

$$S(\mathbf{x}, \varepsilon) = \int_0^{\tau_\varepsilon(\mathbf{x})} \dot S_+(\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}))dt, \tag{4}$$

где $\tau_\varepsilon(\mathbf{x})$ — время, за которое изображающая точка, соответствующая решению $\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})$, начиная движение при $t = 0$ из точки $\mathbf{x} \in B$, достигает границы $\Gamma(\delta_\varepsilon)$ множества δ_ε (если $\mathbf{x} \notin \delta_\varepsilon$, то $\tau_\varepsilon(\mathbf{x}) > 0$); $\dot S_+(\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}))$ — скорость увеличения длины отрицательной полутраектории в точке $\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})$.

Производная $\dot S$ определяется выражением $\dot S_+(\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})) = |\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}))|$. Его легко получить, учитывая, что $dS_+ = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n dx_i^2}$, $dx_i = f_i(\tilde{\mathbf{x}})dt$, $\sum\limits_{i=1}^n f_i^2 = |f|^2$. Производную $\dot S_+(\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}))$ нужно отличать от производной $\dot S(\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})) = -\dot S_+(\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})) = -|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}))|$, которая является скоростью уменьшения длины той части положительной полутраектории, которая лежит между точкой $\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})$ и границей $\Gamma(\delta_\varepsilon)$ множества δ_ε; эта длина задается формулой (4). Иначе говоря, $\dot S_+(\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}))$ является производной в силу системы от функции $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$, задаваемой выражением (4). Возвращаясь к прежнему обозначению, можно записать

$$\dot S(\mathbf{x}, \varepsilon) = -|\mathbf{f}(\mathbf{x})|. \tag{5}$$

Отметим, что в выражении (4) интегрирование ведется вдоль траектории решения $\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})$. Функция $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$ ограничена на множестве B. Это следует из оценки величины $\operatorname{supr}\limits_{\mathbf{x} \in B\backslash\delta_\varepsilon} S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ на основе того, что точка $\mathbf{x}_* = 0$ асимптотически устойчива равномерно по t_0 и $\mathbf{x} \in B$. Действительно, $\operatorname{supr}\limits_{\mathbf{x} \in B\backslash\delta_\varepsilon} S(\mathbf{x}, \varepsilon) \leqslant T(B) \operatorname{supr}\limits_{\mathbf{x} \in B\backslash\delta_\varepsilon} |\mathbf{f}(\mathbf{x})| = c > 0$, ибо конечны оба сомножителя ($T(B)$ — время, за которое в силу равномерности по t_0, $\mathbf{x} \in B$ все точки $\mathbf{x} \in B\backslash\delta_\varepsilon$ перейдут в δ_ε при $t \to \infty$).

Для асимптотически устойчивых точек равновесия большого класса систем (1), удовлетворяющих определенным (описанным далее) требованиям, на любом компакте $B \subset G_п$ можно построить более простую (не зависящую от параметра) функцию $S(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_* = 0)$, которая получается из функции (3) путем предельного перехода:

$$S(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_* = 0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \min_{\mathbf{x}_1 \in \delta_\varepsilon \cap T_\mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) = \lim_{\varepsilon \to \infty} S(\mathbf{x}, \varepsilon), \quad (6)$$

где $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_* = 0)$ — расстояние от точки $\mathbf{x}$ до точки $\mathbf{x}_* = 0$ измеренное вдоль траектории T_x (т. е. длина положительной полутраектории). Этот предел всегда существует, ибо всегда существует предел положительной монотонной функции, которой является длина $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ участка траектории; он может быть как конечным, так и бесконечным. Из выражения (6) следует, что функция $S(\mathbf{x})$ является положительно определенной функцией ($S(\mathbf{x}_* = 0) = 0$, $S(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_* = 0$). Учитывая формулу (4), получаем для любого $\mathbf{x} \in B$

$$S(\mathbf{x}) = \int_0^\infty |\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})|dt = \lim_{\varepsilon \to \infty} \int_0^{\tau_\varepsilon(\mathbf{x})} |\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}))|dt. \quad (7)$$

Этот несобственный интеграл сходится (конечен) не всегда. У некоторых систем (1) правая часть $f(\mathbf{x})$ и соответствующий ей характер поведения траекторий в окрестности асимптотически устойчивой точки $\mathbf{x}_* = 0$ могут обусловливать расходимость этого интеграла. Для прояснения этого вопроса, запишем значение функции $S(\mathbf{x})$ в любой фиксированной точке $\mathbf{x} \in B$ иначе, а именно:

$$S(\mathbf{x}) = \int_0^\infty |\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}))|dt = \int_0^{\tau_\varepsilon(\mathbf{x})} |\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}))|dt + \int_{\tau_\varepsilon(\mathbf{x})}^\infty |\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}))|dt =$$

$$= S(\mathbf{x}, \varepsilon) + \int_{\tau_\varepsilon(\mathbf{x})}^\infty |\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}))|dt. \quad (8)$$

При этом значение ε (соответственно множество δ_ε) выбираем так, чтобы $\mathbf{x} \in B \backslash \delta_\varepsilon$. Как показано выше, функция $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$ ограничена на любом компакте $B \subset G_п$. Поэтому первый член $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ в правой части приведенного выражения конечен. Число ε можно взять любым (лишь бы $\mathbf{x} \in B \backslash \delta_\varepsilon$). Устремим его к нулю. От этого значение интеграла (7) не меняется (он либо конечен, либо расходится). Поэтому, учитывая конечность функции $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$, интеграл (7) будет конечным (сходится), если при любом $\varepsilon > 0$ конечен интеграл, являющийся вторым членом в правой части выражения (8). Если же он расходится, то расходится и интеграл (7). Этот второй член является длиной положительной полутраектории, начинающейся на границе $\Gamma(\delta_\varepsilon)$ множества δ_ε, т. е. расстоянием $\rho(\mathbf{x} \in \Gamma(\delta_\varepsilon), \mathbf{x}_* = 0)$, измеренным вдоль траектории. Поэтому интеграл (7) сходится (конечен) и соответственно функция $S(\mathbf{x})$ ограничена на множестве B и удовлетворяет в этом отношении требованиям к классу функций $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$ и $V(\mathbf{x})$, если выполняется условие, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\operatorname{supr}_{\mathbf{x} \in \Gamma(\delta_\varepsilon)} \rho(\mathbf{x} \in \Gamma(\delta_\varepsilon), \mathbf{x}_* = 0) = c_\varepsilon < \infty$$

(очевидно, $c_\varepsilon > 0$). Из этого условия следует, что при любом $\varepsilon > 0$ $\operatorname{supr}_{\mathbf{x} \in \delta_\varepsilon} S(\mathbf{x}) = c_\varepsilon < \infty$.

Эти условия налагают требование на характер поведения траекторий в сколь угодно малой окрестности точки $\mathbf{x}_* = 0$, обеспечивающий, очевидно, сходимость интеграла (7) и ограниченность функции $S(\mathbf{x})$ на множестве B. Для некоторых асимптотически устойчивых точек равновесия систем вида (1), которые мы назвали ранее экзотическими, эти условия не выполняются (например, для всех нелинейных фокусов, задаваемых на фазовой плоскости в полярных координатах системой уравнений $\dot{\rho} = -\rho^n$, $\dot{\theta} = 1$, $n \geqslant 2$), соответственно тогда интеграл (7) расходится и функция $S(\mathbf{x})$ не ограничена на множестве B, ибо она при любом $\mathbf{x}$ (кроме точки $\mathbf{x}_* = 0$) принимает бесконечное значение (в точке $\mathbf{x}_* = 0$ она равна нулю). Работать с такими функциями в обычном смысле невозможно. В то же время функции $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$, явно зависящие от параметра, и для этих экзотических случаев при $\varepsilon > 0$ являются ограниченными на множестве $B \subset G_п$. Именно из-за этих случаев, желая указать для каждой асимптотически устойчивой точки равновесия геометрически просто интерпретируемую функцию (3), обеспечивающую обращение теоремы об асимптотической устойчивости и имеющую конечные на множестве B значения, приходится использовать функции $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$, зависящие от параметра и обнуляемые на множествах δ_ε, сходящихся к точке $\mathbf{x}_* = 0$. Соответственно поэтому приходится работать на классе функций $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$, зависящих от параметра, и в этих терминах формулировать теорему.

Если для любого $\varepsilon > 0$ $\operatorname{supr}_{\mathbf{x} \in \delta_\varepsilon} S(\mathbf{x}, \varepsilon) = c_\varepsilon < \infty$ и, кроме того, при $\varepsilon \to 0$ (следовательно, $\dim\delta_\varepsilon \to 0$)

$$\lim_{\varepsilon \to \infty} \operatorname{supr}_{\mathbf{x} \in \delta_\varepsilon} S(\mathbf{x}, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to \infty} c_\varepsilon = 0, \quad (9)$$

то функция $S(\mathbf{x})$ непрерывна в точке $\mathbf{x}_* = 0$, ибо условие (9) эквивалентно определению такой непрерывности ($\forall c_\varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon : \mathbf{x} \in \delta_\varepsilon \Rightarrow S(\mathbf{x}) < c_\varepsilon$) Далее будет показано, при каких условиях функция $S(\mathbf{x})$ непрерывна в каждой точке $\mathbf{x} \in B$. Заметим, что из выражения (6) следует, что всегда $S(\mathbf{x}_* = 0) = 0$, и, таким образом, функция $S(\mathbf{x})$ является определенно-положительной. Заметим также, что нарушение условия (9) означает, очевидно, разрывность функции $S(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}_* = 0$, ибо это условие является необходимым и достаточным условием непрерывности (как определение непрерывности).

Покажем теперь, что построенные функции $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ и $S(\mathbf{x})$ принадлежат классу функций $V(\mathbf{x}, \varepsilon)$, а также удовлетворяют условиям теоремы. Покажем сначала, что эти функции непрерывны на множестве $B \subset G_п$. Непрерывность функции $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ на $B \backslash \delta_\varepsilon$ следует из непрерывности по параметру $\mathbf{x}$ интеграла (4). Действительно, согласно теореме из курса математического анализа [3], обобщенной на векторный случай, интеграл (4) будет непрерывно зависеть от векторного параметра $\mathbf{x}$, если функция $|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}))|$ непрерывна по совокупности переменных $(t, \mathbf{x})$, а функция $\tau_\varepsilon(\mathbf{x})$ непрерывна по $\mathbf{x}$. Первое имеет место, так как правая часть системы (1) $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}})$ и, следовательно, $|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}})|$ непрерывно зависят от $\tilde{\mathbf{x}}$ по условию, а $\tilde{\mathbf{x}}$ непрерывно по совокупности переменных t, $\mathbf{x}$ согласно теореме о непрерывности решения по начальным условиям, примененной к расширенной системе $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\dot{\theta} = 1$. Непрерывность $\tau_\varepsilon(\mathbf{x})$ по $\mathbf{x}$ доказывается с помощью теоремы о неявной функции, которую мы применим к уже использовавшемуся ранее уравнению $F(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) - \varepsilon = 0$, неявно задающему границу $\Gamma(\delta_\varepsilon)$ множества δ_ε. Вектор (точка) $\mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma(\delta_\varepsilon)$, удовлетворяющий этому уравнению, задает функциональную связь $\mathbf{x}_\Gamma = \varphi(\mathbf{x}, \tau_\varepsilon(\mathbf{x}))$ между точкой $\mathbf{x}$, лежащей на траектории, проходящей через точку $\mathbf{x}_\Gamma$, и временем пробега $\tau_\varepsilon(\mathbf{x})$ изображающей точки $\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})$ от точки $\mathbf{x}$ до точки $\mathbf{x}_\Gamma$. В итоге получаем уравнение $F(\varphi(\mathbf{x}, \tau_\varepsilon(\mathbf{x}))) = 0$, неявно задающее зависимость $\tau_\varepsilon(\mathbf{x})$. По теореме о неявной функции эта зависимость будет непрерывной, если $\partial F(\mathbf{x}, \tau_\varepsilon)/\partial\tau_\varepsilon = \partial V(\mathbf{x}, \tau_\varepsilon)/\partial\tau_\varepsilon \neq 0$.

Это условие выполняется, так как $\partial V(\mathbf{x}, \tau_\varepsilon)/\partial\tau_\varepsilon = \dot{V} < 0$ (производная $\dot{V}$ в силу системы по условию теоремы отрицательна на множестве B/δ_ε). В итоге функция $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$, задаваемая интегралом (4), непрерывна по $\mathbf{x}$ на множестве $B \backslash \delta_\varepsilon$. Непрерывность функции $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ по $\mathbf{x}$ на границе $\Gamma(\delta_\varepsilon)$ следует из того, что, согласно формуле (3), $S(\mathbf{x}, \varepsilon) \equiv 0$ на множестве δ_ε, а при $\mathbf{x} \in B\backslash\delta_\varepsilon$ непрерывная функция $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ задается выражением (4), из которого видно, что по мере уменьшения до нуля числа Δ, задающего окрестность $\delta_{\Delta\varepsilon}$ множества δ_ε и, следовательно, уменьшения до нуля величины $\sup\limits_{\mathbf{x} \in \delta_{\Delta\varepsilon}\backslash\delta_\varepsilon} \tau_\varepsilon(\mathbf{x})$, до нуля уменьшается и величина $\sup\limits_{\mathbf{x} \in \delta_{\Delta\varepsilon}\backslash\delta_\varepsilon} S(\mathbf{x}, \varepsilon)$. При этом имеет значение, что траектории трансверсальны к границе $\Gamma(\delta_\varepsilon)$. Таким образом, функция $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ непрерывна на границе $\Gamma(\delta_\varepsilon)$. Учитывая ее непрерывность на множествах $\mathrm{Int}\delta_\varepsilon$ и $B\backslash\delta_\varepsilon$, можно сделать вывод, что она непрерывна по $\mathbf{x}$ на множестве B.

Докажем теперь, что ограниченная на множестве B функция $S(\mathbf{x})$, задаваемая сходящимся интегралом (7), непрерывна по $\mathbf{x}$ на множестве B. Так как функция $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ непрерывна на множестве $B\backslash\delta_\varepsilon$ и считается, что справедливо соотношение (9), то выполняется определение непрерывности функции $S(\mathbf{x})$ в любой точке $\mathbf{x} \in B\backslash(\mathbf{x}_* = 0)$ (непрерывность в точке $\mathbf{x}_* = 0$ доказана ранее и следует из выражения (9)): для любого числа $\eta > 0$ существует такая окрестность δ точки $\mathbf{x}$, что при любом $\mathbf{x}_1 \in \delta$ $S(\mathbf{x}_1) - S(\mathbf{x}) < \eta$. Действительно, в соответствии с (9) можно выбрать такую малую δ_ε — окрестность точки $\mathbf{x}_* = 0$, чтобы $\sup\limits_{\mathbf{x} \in \delta_\varepsilon} S(\mathbf{x}) < \eta/2$. Кроме того, в силу непрерывности функции $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ можно выбрать такую окрестность δ точки $\mathbf{x}$, чтобы $S(\mathbf{x}_1, \varepsilon) - S(\mathbf{x}, \varepsilon) < \eta/2$ при любом $\mathbf{x}_1 \in \delta$. Тогда выполняется определение непрерывности функции $S(\mathbf{x})$ на множестве $B\backslash(\mathbf{x}_* = 0)$.

Непрерывность на множестве $B\backslash\delta_\varepsilon$ производных $\dot S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ следует из выражения (5), так как по условию функция $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ непрерывна по $\mathbf{x}$ на множестве $B\backslash\delta_\varepsilon$. На границе $\Gamma(\delta_\varepsilon)$ производная $\dot S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ терпит разрыв, так как $\dot S \equiv 0$ на множестве $\mathrm{Int}\delta_\varepsilon$. Производная же $\dot S(\mathbf{x})$ непрерывна всюду на множестве B.

Перейдем к рассмотрению вопроса о непрерывной дифференцируемости (гладкости) по $\mathbf{x}$ ограниченных и непрерывных на множестве $B\backslash\delta_\varepsilon$ функций $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ и $S(\mathbf{x})$. Функция $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$, согласно формуле (4), является собственным интегралом, зависящим от $\mathbf{x}$ как от параметра. На основании теоремы о дифференцируемости такого интеграла по параметру [3, 4] функция $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ является гладкой по $\mathbf{x}$ на множестве $B\backslash\delta_\varepsilon$ (т. е. ее частные производные $\partial S/\partial x_i$ непрерывны по x; x_i — компоненты вектора $\mathbf{x}$), если на множестве $B\backslash\delta_\varepsilon$ непрерывно дифференцируема по $\mathbf{x}$ скалярная функция $\tau_\varepsilon(\mathbf{x})$, а также непрерывна по $(t, \mathbf{x})$ векторная функция $\mathrm{grad}_x|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}))|$ (т. е. непрерывны по $(t, \mathbf{x})$ все частные производные $\partial|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})|/\partial x_i$, $i = 1, ..., n$). Выполнение первого условия следует из выполнения условий теоремы о неявной функции, примененной к уже рассматривавшемуся ранее уравнению $F(\mathbf{x}, \tau_\varepsilon(\mathbf{x})) = 0$. Выполнение второго условия вытекает из гладкости функции $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}})$ и теоремы о гладкой зависимости решения $\tilde{\mathbf{x}}$ от начальных условий $\mathbf{x}$. Таким образом, построенная функция $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ является гладкой по $\mathbf{x}$ на множестве $B\backslash\delta_\varepsilon$. Она не гладкая на границе $\Gamma(\delta_\varepsilon)$, ибо на множестве $\mathrm{Int}\delta_\varepsilon$ все производные $\partial S/\partial x_i \equiv 0$, а на множестве $\overline{B\backslash\delta_\varepsilon}$ функция $|\dot S(\mathbf{x}, \varepsilon)| = |(\mathrm{grad}S(\mathbf{x}, \varepsilon), \mathbf{f}(\mathbf{x}))| = |\mathbf{f}(\mathbf{x})|$ достигает нижней грани $\inf|\dot S(\mathbf{x}, \varepsilon)| = \inf|\mathbf{f}(\mathbf{x}))| = c > 0$, вследствие чего на множестве $\overline{B\backslash\delta_\varepsilon}$ $\inf|\mathrm{grad}S| \ne 0$, а поэтому хотя бы для одной производной $\partial S/\partial x_i$ на множестве $\overline{B\backslash\delta_\varepsilon}$ имеем $\inf\left|\dfrac{\partial S}{\partial x_i}\right| \ne 0$.

Согласно выражению (7) функция $S(\mathbf{x})$ является несобственным интегралом, зависящим от параметра $\mathbf{x}$. Согласно теореме о дифференцируемости этого интеграла по параметру [3, 4], дающей достаточные условия, ограниченная и непрерывная на множестве B функция $S(\mathbf{x})$ является гладкой по $\mathbf{x}$ на множестве $B\backslash(\mathbf{x}_* = 0)$, если: 1) непрерывны на множестве $B\backslash(\mathbf{x}_* = 0)$ по совокупности переменных $(t, \mathbf{x})$ все частные производные $\partial|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}))|/\partial x_i$; 2) на множестве $B\backslash(\mathbf{x}_* = 0)$ существуют и сходятся равномерно по $\mathbf{x}$ все интегралы $\int\limits_0^\infty [\partial|\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}))|/\partial x_i]dt$, $i = 1, ..., n$. Первое условие в силу гладкости функции $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}})$ выполняется. Вопрос о том, каким условиям должна удовлетворять правая часть системы (1), чтобы выполнялось второе условие, рассматривать здесь не будем (остается открытым вопрос о гладкости в общем случае непрерывной функции $S(\mathbf{x})$). Заметим только, что в случае асимптотически устойчивых линейных систем с постоянными коэффициентами все данные выше условия выполняются, и функции $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ и $S(\mathbf{x})$ являются гладкими вне множеств δ_ε (в точке $\mathbf{x}_* = 0$ функция $S(\mathbf{x})$ может быть негладкой). Выполнение этих условий на множестве $B\backslash(\mathbf{x}_* = 0)$ в линейном случае связано с тем, что как решение $\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x})$, так и линейная по $\tilde{\mathbf{x}}$ функция $\mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}(t, \mathbf{x}))$ мажорируются (покомпонентно) некоторой экспонентой e^{-at}, $a > 0$, в силу чего выполняются условие (9), обеспечивающее непрерывность функции $S(\mathbf{x})$ по $\mathbf{x}$, и все условия, обеспечивающие ее гладкость на множестве $B\backslash(\mathbf{x}_* = 0)$. Именно из этого вытекает справедливость следствия, сформулированного ранее.

Необходимость условий теоремы доказана.

5. О НАХОЖДЕНИИ ФУНКЦИЙ $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ И $S(\mathbf{x})$

Кратко рассмотрим вопрос нахождения функций $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ и $S(\mathbf{x})$. Пусть точка равновесия $\mathbf{x}_* = 0$ системы (1) исследуется на асимптотическую устойчивость. Если эта точка действительно асимптотически устойчива, хотя мы этого и не знаем, то соответствующая ей функция $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$, как видно из формулы (4), при заданных на $f(\mathbf{x})$ условиях всегда существует; функция же $S(\mathbf{x})$, как мы знаем, существует при этом не всегда. Если эти функции являются на множестве $B\backslash\delta_\varepsilon$ гладкими ($B \subset G_\text{п}$ — компакт), то они могут быть определены на множестве $A\backslash\delta_\varepsilon$, где $A \subset B$ — некоторая компактная окрестность точки $\mathbf{x}_* = 0$, с помощью уравнения

$$(\mathrm{grad}V, \mathbf{f}(\mathbf{x})) = -|\mathbf{f}(\mathbf{x})|, \tag{10}$$

являющегося линейным уравнением в частных производных относительно функции V. Здесь в левой части стоит производная в силу системы (1) от функции V, а в правой — функция от $\mathbf{x}$, которая является производной в силу системы (1) от искомых функций $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ или $S(\mathbf{x})$, если исследуемая система (1) является асимптотически устойчивой. Если при любом $\dim\delta_\varepsilon$ решение V этого уравнения существует (оно может существовать и в случае, если точка $\mathbf{x}_* = 0$ не является асимптотически устойчивой; при этом V не будет δ_ε — определенно-положительна) и является δ_ε — определенно-положительной функцией, то оно является функцией $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ или $S(\mathbf{x})$, а точка $\mathbf{x}_* = 0$ асимптотически устойчива. Наоборот, если известно, что точка $\mathbf{x}_* = 0$ асимптотически устойчива, то решение $V = S(\mathbf{x}, \varepsilon)$ уравнения (10) существует при любом $\dim\delta_\varepsilon$ и является δ_ε — определенно-положительной функцией.

При решении уравнения (10) на границе $\Gamma(\delta_\varepsilon)$ множества δ_ε должны быть заданы граничные условия: $V(\mathbf{x}, \varepsilon) = 0$ или $V(\mathbf{x}) = 0$ при $\mathbf{x} \in \Gamma(\delta_\varepsilon)$. Сами же множества δ_ε должны подбираться так, чтобы траектории системы (1) были трансверсальны к границе $\Gamma(\delta_\varepsilon)$. В случае достаточно простых систем (1) решение уравнения (10) может быть получено аналитически, в более сложных случаях — численными методами. Приведем для иллюстрации применение описанного способа для аналитического нахождения функций $S(\mathbf{x}, \varepsilon)$, $S(\mathbf{x})$ для простого нелинейного скалярного уравнения $\dot{x} = -x^n$, где n — любое нечетное целое положительное число. Здесь $f(x) = -x^n$, $|f(x) = |x^n|$, $\operatorname{grad} V = dV/dx$. В соответствии с уравнением (10) функция V вне множества (δ_ε) описывается уравнением $(dV/dx)(-x^n) = -|x^n|$ или $dV/dx = 1$ при положительных значениях x, лежащих вне множества δ_ε, и $dV/dx = -1$ при отрицательных значениях x, лежащих вне множества δ_ε. Если ищем функцию $V(x)$, то граничным является условие: $V(x) = 0$ при $x_* = 0$. В итоге, интегрируя полученные выражения для dV/dx в соответствующих пределах, учитывающих граничные условия, получаем функцию $V(x) = |x|$. Так как она определенно-положительна, то является функцией $S(x) = |x|$. Если же ищем функцию $V(x, \varepsilon)$, зависящую от параметра ε, то в качестве множеств δ_ε выбираем отрезки $\delta_\varepsilon = [-0{,}5\varepsilon, +0{,}5\varepsilon]$, а граничные условия имеют вид: $V(x, \varepsilon) = 0$ при $x = -0{,}5\varepsilon$ и $x = 0{,}5\varepsilon$. На отрезках δ_ε функция $V(x, \varepsilon) \equiv 0$ по определению функций $V(x, \varepsilon)$. После интегрирования выражений для производной dV/dx в соответствующих пределах получаем, что вне отрезков δ_ε функция $V(x, \varepsilon) = |x| - 0{,}5\varepsilon$, так как $dV/dx = 1$ при $x > 0{,}5\varepsilon$ и $dV/dx = -1$ при $x < -0{,}5\varepsilon$. Так как полученная функция δ_ε — определенно-положительна, то она является функцией $S(\mathbf{x}, \varepsilon) = |x| - 0{,}5\varepsilon$.

Заметим, что вообще для любых нелинейных асимптотически устойчивых систем первого порядка $\dot{x} = f(x)$ уравнение (10) имеет вид $(dS/dx)f(x) = -|f(x)|$, что дает (с учетом знака $f(x)$ при $x > 0$ и $x < 0$): $S(x) = |x|$ при любом x и $S(x, \varepsilon) = |x| - 0{,}5\varepsilon$ при $|x| > 0{,}5\varepsilon$. Функция $S(\mathbf{x})$ является негладкой в точке $x_* = 0$.

Ранее иным способом были получены функции $S(\rho, \varepsilon) = \sqrt{2}\,(\rho - \varepsilon)$ и $S(\rho) = \sqrt{2}\,\rho$ для асимптотически устойчивой точки равновесия системы $\dot{\rho} = -\rho^n$, $\dot{\theta} = 1$. Этот результат может быть получен также как пример применения уравнения (10) для получения этих функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959.
2. *Малкин Н. Г.* Теория устойчивости движения: — М.: Наука, 1966.
3. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа. Т. 2. — М.: Наука, 1968.
4. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. — М.: Наука, 1972.

☎ *(095) 334-92-29*

❑