УДК 513.88

ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ЦИКЛОВ НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ
Ч. 1. Сходимость

И. Г. Исмаилов

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова, г. Москва

Предложен новый алгоритм приближенного построения цикла автономной нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Алгоритм обладает локальной сходимостью и эффективен в случае неустойчивых циклов.

ВВЕДЕНИЕ

Будем рассматривать задачу приближенного построения цикла автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Если некоторый цикл Г орбитально асимптотически устойчив, то задача его приближенного построения, как правило, не вызывает затруднений: если начальное условие x_0 решения $p(t, x_0)$ системы достаточно близко к циклу Г, то $\lim\limits_{t \to \infty} \inf\limits_{y \in \Gamma} |p(t, x_0) - y| = 0$. Таким образом, если отыскиваемый орбитально асимптотически устойчивый цикл достаточно хорошо локализован, то применением какого-либо метода численного интегрирования можно получить сколь угодно точное приближение к циклу. Однако во многих важных ситуациях (например, в задачах хаотической динамики) отыскиваемые циклы, как правило, неустойчивы. Задача приближенного построения таких циклов становится существенно сложнее. Один из приемов приближенного построения неустойчивых циклов автономных систем базируется на комбинации метода функционализации параметра [1] и какого-либо дискретизационного метода (метода механических квадратур, метода коллокации и др.) (см., например, работы [2, 3]).

Однако такой подход весьма трудоемок в вычислительном отношении и требует дополнительной информации об отличии от нуля топологического индекса отыскиваемого цикла. Поэтому представляет интерес разработка и исследование простых в применении итерационных алгоритмов приближенного построения неустойчивых циклов. Один из таких алгоритмов принадлежит Спарроу (C. Sparrow) [4]. Этот алгоритм базируется на методе Ньютона, поэтому реализация алгоритма Спарроу на каждом шаге требует обращения специальных матриц. Это обстоятельство существенно уменьшает диапазон применимости алгоритма и делает его неэффективным в вырожденных и плохо обусловленных задачах. В данной работе предлагается новый итерационный алгоритм приближенного построения циклов автономных систем, эффективный для неустойчивых периодических решений. Этот результат был опубликован в тезисах докладов [5—7].

1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

Будем рассматривать систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1}$$

Пусть $\mathbb{R}$ — вещественная ось, $\mathbb{R}^N$ — евклидово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Если $x \in \mathbb{R}^N$, $t \in \mathbb{R}$, то через $\{x, t\}$ обозначается пара в $\mathbb{R}^{N+1}$. Ниже через T обозначается операция транспонирования.

Предположим, что правая часть системы (1) непрерывно дифференцируема. Обозначим через $p(t, x)$ решение этой системы с начальным условием $p(0, x) = x$.

Зафиксируем некоторый вектор $a \in \mathbb{R}^N$, число $b \in \mathbb{R}$ и рассмотрим в пространстве пар $\{x, t\}$ систему уравнений

$$x = p(t, x), \tag{2}$$

$$\langle a, x\rangle = b. \tag{3}$$

Пусть пара $\{x^*, t^*\}$, $t^* \neq 0$ является решением системы (2), (3). Тогда x^* — это точка некоторого цикла системы (1), а t^* — его период. Следовательно, задача отыскания циклов системы (1) эквивалентна отысканию решений системы (2), (3).

Рассмотрим следующую итерационную процедуру

$$\begin{aligned} x_{k+1} = x_k - \gamma_k((I - V^T(t_k, x_k))(x_k - p(t_k, x_k)) + \\ + (\langle a, x_k\rangle - b)a), \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} t_{k+1} = t_k + \mu_k\langle f(p(t_k, x_k)), x_k - p(t_k, x_k)\rangle, \\ k = 0, 1, 2, ..., \end{aligned} \tag{5}$$

где T — символ транспонирования, $V(x, t)$ ($V(0, x) = I$) — фундаментальная матрица линейной системы дифференциальных уравнений $\frac{dV}{dt} = f_x'(p(t, x))V$ а γ_k, μ_k — управляющие параметры итерационной процедуры (4), (5).

Предположим, что Γ — изолированный цикл системы (1) с периодом T^*, $x^* \in \Gamma$ и

$$\langle a, x^*\rangle = b. \tag{6}$$

Рассмотрим гиперплоскость π, определяемую уравнением (3). Если она трансверсальна циклу Γ в точке x^*, то пара $\{x^*, T^*\}$ является изолированным решением системы (2), (3). Справедлива следующая

Теорема. *Пусть пара* $\{x^*, T^*\}$ *— изолированное решение системы уравнений*

$$(I - V^T(t, x))(x - p(t, x)) + (\langle a, x\rangle - b)a = 0 \tag{7}$$

$$\langle f(p(t, x)), x - p(t, x)\rangle = 0, \tag{8}$$

а управляющие параметры γ_k, μ_k *итерационной процедуры* (4), (5) *удовлетворяют неравенствам*

$$0 < \alpha_0 \leqslant \gamma_k \leqslant \beta_0 \leqslant 1, \tag{9}$$

$$0 < \alpha_1 \leqslant \mu_k \leqslant \beta_1 \leqslant 1, \tag{10}$$

где числа β_0 *и* β_1*достаточно малы. Пусть начальное приближение* $\{x_{0,}\ t_0\}$ *процедуры* (4), (5) *достаточно близко к паре* $\{x^*, T^*\}$. *Тогда последовательные приближения* $\{x_{k,}\ t_k\}$ *сходятся к паре* $\{x^*, t^*\}$:

$$\lim_{t \to \infty} (\|x_k - x^*\| + |t_k - T^*|) = 0. \tag{11}$$

Доказательствотеоремы см. в Приложении.

2. ПРИМЕР ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРЕМЫ

В качестве приложения сформулированной теоремы рассмотрим многоконтурную автономную систему автоматического регулирования. Ее динамика описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} L_1\left(\frac{d}{dt}\right)x_1 = M_1\left(\frac{d}{dt}\right)f_1(x_1, ..., x_n) \\ \qquad \cdots \\ L_n\left(\frac{d}{dt}\right)x_n = M_n\left(\frac{d}{dt}\right)f_n(x_1, ..., x_n). \end{cases} \tag{12}$$

Здесь $L_i(p)$ и $M_i(p)$ многочлены:

$$L_i(p) = p^{l_i} + a_1^i p^{l_i - 1} + ... + a_{l_i}^i, \tag{13}$$

$$M_i(p) = b_0^i p^m + b_1^i p^{m-1} + ... + b_m^i, \quad i = 1, ..., n, \tag{14}$$

$p = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования по переменной t. Предполагается, что порядки многочленов (13) и (14) подчинены условию $l_i \geqslant m_i + 1$, $i = 1, ..., n$. Формально правые части дифференциальных уравнений определены лишь для достаточно гладких нелинейностей. Для определения решений системы (12) в случае произвольных непрерывных нелинейностей $f_i(x_1, ..., x_n)$, $i = 1, ..., n$ стандартным образом переходят к пространству состояний. В этом пространстве система (12) принимает вид:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{15}$$

где функция $f(x)$ выражается через коэффициенты многочленов и функции f_i и при этом имеет такую же гладкость, как исходные нелинейности. Если функции f_i дифференцируемы m_i раз, то любое решение системы (15) будет решением системы (12). Таким образом, периодические колебания в многоконтурной автономной системе автоматического регулирования можно искать с помощью алгоритма (4), (5).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предположение о трансверсальности плоскости π искомому циклу Γ не является ограничительным. Изменяя параметры a и b этого всегда можно добиться при условии некоторой начальной локализации. Равенства (7) и (8) фактически означают изолированность критической точки $\{x^*, T^*\}$ функции невязки $W(x, t)$, при этом отсутствует требование невырожденности минимума этой функции. Заметим, что задача поиска цикла сложнее в случае автономной системы, чем в случае T-периодической, где априори известен период. Предложенная схема дает как начальное приближение, так и значение периода искомого периодического решения системы (1). Схема может быть реализована с помощью любого профессионального пакета вычислительных алгоритмов, например Matlab или Mathematic.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Д о к а з а т е л ь с т в о   т е о р е м ы. Рассмотрим в окрестности точки $\{x^*, t^*\} \in \mathbb{R}^{N+1}$ функцию

$$W(x, t) = 0{,}5(\|x - p(t, x)\|^2 + (\langle a, x\rangle + b)^2). \tag{16}$$

Обозначим через ∇ оператор градиента по переменным $\{x, t\}$, через ∇_x — оператор градиента по x, а через ∇_t — производную по t. Непосредственный подсчет показывает, что

$$\nabla W(x, t) = \{I - V^T(t, x))(x - p(t, x)) + \\ + (\langle a, x\rangle - b)a, \langle -f(p(t, x)), x - p(t, x)\rangle|,$$

$$\nabla_x W(x, t) = (I - V^T(t, x))(x - p(t, x)) + (\langle a, x\rangle - b)a,$$

$$\nabla_t W(x, t) = -\langle f(p(t, x)), x - p(t, x)\rangle.$$

В силу выражения (6) точка $\{x^*, t^*\}$ является точкой минимума функции $W(x, t)$. А так как пара $\{x^*, T^*\}$ суть изолированное решение системы (7), (8), то она является изолированной критической точкой функции $W(x, t)$. Следовательно, существует шар $B \subset \mathbb{R}^{N+1}$ с центром $\{x^*, T^*\}$, в котором единственной критической точкой функции (16) и точкой абсолютного минимума будет $\{x^*, T^*\}$.

Положим $\varepsilon = \min\limits_{\{x,\,t\} \in \partial B} W(x, t)$, где ∂B — граница шара. Выберем положительное $\delta < \varepsilon$ таким образом, чтобы

$$\max_{\{x,\,t\} \in L(\delta)} \|\nabla W(x, t)\| < \min\{\|\{x, t\} - \{y, \tau\}\| : \{x, t\} \in L(\delta),$$
$$\{y, \tau\} \in \partial B \qquad (17)$$

где $L(\delta)$— лебегово множество функции $W(x, t)$, т. е. $L(\delta) = \{\{x, t\} \in B : W(x, t) \leqslant \delta\}$.

Покажем теперь, что для любого начального приближения $\{x_0,\ t_0\} \in L(\delta)$последовательные приближения $\{x_k,\ t_k\}$ процедуры (4), (5) сходятся к паре $\{x^*,\ T^*\}$. Для этого покажем вначале, что из включения $\{x_k,\ t_k\} \in L(\delta)$ вытекают соотношения

$$\{x_{k+1},\ t_{k+1}\} \in B, \qquad (18)$$

$$W(x_{k+1},\ t_{k+1}) - W(x_k,\ t_k) \leqslant -\nu\|\nabla W(x_k,\ t_k)\|^2, \qquad (19)$$

где ν — достаточно малое положительное число.

В силу равенств (4), (5) и оценок (9), (10) имеем:

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leqslant \|\nabla_x W(x_k,\ t_k)\|, \qquad (20)$$

$$|t_{k+1} - t_k| \leqslant |\nabla_t W(x_k,\ t_k)|. \qquad (21)$$

Из неравенств (17), (20) и (21) следует включение (18). Пусть числа K_1, K_2, L_1 и L_2 таковы, что для любых $\{x_1,\ t_1\}$, $\{x_2,\ t_2\} \in B$ выполнены неравенства

$$\|\nabla_x W(x_1,\ t_1) - \nabla_x W(x_2,\ t_2)\| \leqslant K_1\|x_1 - x_2\| + K_2|t_1 - t_2|,$$

$$\|\nabla_t W(x_1,\ t_1) - \nabla_t W(x_2,\ t_2)\| \leqslant L_1\|x_1 - x_2\| + L_2|t_1 - t_2|,$$

а константы β_0 и β_1 в неравенствах (9) и (10) таковы, что

$$\frac{1}{2}K_1\beta_0 + \frac{1}{4}(K_2 + L_1)\beta_1 < 1, \qquad (22)$$

$$\frac{1}{2}L_2\beta_1 + \frac{1}{4}(K_2 + L_1)\beta_0 < 1. \qquad (23)$$

Тогда

$$W(x_{k+1},\ t_{k+1}) - W(x_k,\ t_k) = \int_0^1 \langle \nabla_x W(x_k + \tau(x_{k+1} -$$
$$- x_k),\ t_k + \tau(t_{k+1} - t_k)),\ x_{k+1} - x_k\rangle d\tau + \int_0^1 \nabla_t W(x_k +$$
$$+ \tau(x_{k+1} - x_k),\ t_k + \tau(t_{k+1} - t_k)),\ x_{k+1} - t_k)d\tau =$$
$$= -\gamma_k \int_0^1 \langle \nabla_x W(x_k - \tau\gamma_k \nabla_x W(x_k,\ t_k),\ t_k - \tau\mu_k W(x_k,\ t_k)),$$
$$\nabla_x W(x_k,\ t_k)\rangle d\tau - \mu_k \int_0^1 \nabla_t W(x_k - \tau\gamma_k \nabla_x W(x_k,\ t_k),\ t_k -$$
$$- \tau\mu_k W(x_k,\ t_k)),\ \nabla_t W(x_k,\ t_k) d\tau = -\gamma_k\|\nabla_x W(x_k,\ t_k)\|^2 -$$
$$- \mu_k(\nabla_t W(x_k,\ t_k))^2 - \gamma_k \int_0^1 \langle \nabla_x W(x_k - \tau\gamma_k W(x_k,\ t_k), t_k -$$
$$- \tau\mu_k \nabla_t W(x_k,\ t_k)) - \nabla_x W(x_k,\ t_k),\ \nabla_x W(x_k,\ t_k)\rangle d\tau -$$
$$- \mu_k \int_0^1 \nabla_x W(x_k - \tau\gamma_k W(x_k,\ t_k), t_k - \tau\mu_k \nabla_t W(x_k,\ t_k)) -$$
$$- \nabla_t W(x_k,\ t_k) \cdot \nabla_t W(x_k,\ t_k) d\tau \leqslant$$
$$\leqslant -\gamma_k\|\nabla_x W(x_k,\ t_k)\|^2 - \mu_k(\nabla_t W(x_k,\ t_k))^2 +$$
$$+ \frac{1}{2}\gamma_k(K_1\gamma_k\|\nabla_x W(x_k,\ t_k)\| + K_2\mu_2|\nabla_t W(x_k,\ t_k)|)\|\nabla_x W(x_k,\ t_k)\| +$$
$$+ \frac{1}{2}\mu_k(L_1\gamma_k\|\nabla_x W(x_k,\ t_k)\| + L_2\mu_k|\nabla_t W(x_k,\ t_k)|)|\nabla_t W(x_k,\ t_k)\| \leqslant$$
$$\leqslant -\gamma_k(1 - \frac{1}{2}K_1\gamma_k - \frac{1}{4}(K_2 + L_1)\mu_k\|\nabla_x W(x_k,\ t_k)\|^2 -$$
$$- \mu_k(1 - \frac{1}{2}L_2\mu_k - \frac{1}{4}(K_2 + L_1)\gamma_k|\nabla_t W(x_k,\ t_k)\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant -\alpha_0(1 - \frac{1}{2}K_1\beta_0 - \frac{1}{4}(K_2 + L_1)\beta_1\|\nabla_x W(x_k,\ t_k)\|^2 -$$
$$- \alpha_1(1 - \frac{1}{2}L_2\beta_1 - \frac{1}{4}(K_2 + L_1)\beta_0|\nabla_t W(x_k,\ t_k)|^2.$$

Из последней оценки и неравенств (22) и (23) вытекает неравенство (19), в котором

$$\nu = \min\{\alpha_0(1 - \frac{1}{2}K_1\beta_0 - \frac{1}{4}(K_2 + L_1)\beta_1,$$
$$\alpha_1(1 - \frac{1}{2}L_2\beta_1 - \frac{1}{4}(K_2 + L_1)\beta_0)\}.$$

Суммируя неравенства (19) по k от 0 до m, получаем

$$W(x_{m+1},\ t_{m+1}) - W(x_0,\ t_0) \leqslant -\nu \sum_{\kappa=0}^{m} \|\nabla W(x_k,\ t_k)\|^2.$$

А так как справедливы включения (18), то из последнего неравенства следует, что ряд $\sum\limits_{\kappa=0}^{m} \|\nabla W(x_k,\ t_k)\|^2$ сходится. Но тогда $\lim\limits_{t \to \infty} \|\nabla W(x_k,\ t_k)\| = 0$. А так как $\{x^*,\ T^*\}$ — единственная критическая точка функции $W(x, t)$ на шаре B, то из последнего равенства следует сходимость (11). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бобылев Н. А., Красносельский М. А.* Функционализация параметра и теорема родственности для автономных систем // Дифференциальные уравнения. — 1970. — № 11. — С. 1946—1952.
2. *Бобылев Н. А.* К теории фактор-методов приближенного решения нелинейных задач // Доклады АН СССР. — 1972. — Т. 199, № 1. — С. 9—12.
3. *Бобылев Н. А.* Метод механических квадратур в задаче о периодических решениях // Успехи математических наук. — 1972. — Т. XXVII, вып. 4 (166). — С. 203—204.
4. *Sparrow C.* The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos and Strange Attractors. — New York: Springer, 1982.
5. *Бобылев Н. А., Исмаилов И. Г., Коровин С. К.* Об одном алгоритме построения предельных циклов в системах автоматического регулирования // IV междунар. семинар «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления». — М., 1996. — С. 6.
6. *Ismailov I. G.* On the scheme of approximate construction of cycles of nonlinear systems // Fourth intern. conf. on «Control, automation, robotics and vision». — Singapore, 1996.
7. *Ismailov I. G.* On the approximate construction of cycles in automatic control systems // Fourth intern. symp. on «Method and Models in Automation and Robotics». — Poland, 1997.

☎ *(095) 334-79-00*

E-mail: Ilkham@ukr.net

❑