УДК 681.3.057.51-7.311.17

АНАЛИЗ ПОДХОДОВ К РЕШЕНИЮ ПРОБЛЕМЫ ПРАВИЛЬНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ[1]

Т. Л. Гаврилова, А. С. Клещёв

Институт автоматики и процессов управления, г. Владивосток

Рассмотрены различные подходы к решению проблемы правильности математических знаний, предлагаемые математической практикой, математической и компьютерной логикой. Обсуждены критерии правильности математических знаний: универсальный, интуитивный, логический, формально-логический и компьютерный. Показано, что компьютерный критерий потенциально наиболее надёжен для обеспечения правильности математических знаний, а системы автоматизированного (человеко-машинного) доказательства теорем — наиболее перспективный путь его применения. Определены направления дальнейшего продвижения в решении указанной проблемы.

Доказательство является лишь временной помощью для ленивого разума. Жаждущие доказательства не способны воспринять доказываемую истину, независимо от того, насколько хорошо она доказана.

Лобсанг Рампа. Пещеры древних

ВВЕДЕНИЕ

Одна из важнейших проблем математики состоит в обеспечении правильности математических знаний. Принято считать, что математические знания более правильные, чем знания в естественных науках. Однако если сравнить требования к правильности математических знаний с современными требованиями к правильности, например, компьютерных программ, то положение в математике в этом отношении можно признать близким к катастрофическому. Представление о правильности математических знаний менялось с течением времени. Цель настоящей работы — предложить такой анализ современного состояния этой проблемы, из результатов которого были бы видны пути дальнейшего продвижения в ее решении. В качестве материала для анализа взяты в основном общеизвестные факты. При этом рассматриваются только основные идеи и опускаются все технические подробности.

1. ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

Под математическими знаниями в данной работе понимается совокупность математических теорем. Д. Пойа так сформулировал основную проблему правильности математических знаний — «От математика требуется ответить на вопрос: данная теорема верна или неверна?» [1].

Из этой формулировки вытекают вопросы, по которым следует прийти к соглашению до того, как решать основную проблему:

— к какому миру относится теорема;

— какую форму имеет теорема;

— что значит, что теорема верна;

— как можно установить, что теорема верна?

К какому миру относится теорема? Теорема является утверждением, а всякое утверждение относится к некоторому миру. Будем называть мир, к которому относятся математические теоремы (о котором они нечто утверждают), математическим миром. Математический мир является коллекцией совокупностей математических объектов, причем объекты, входящие в одну и ту же совокупность, обладают общими для этой совокупности свойствами.

[1] Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований № 16 Президиума РАН "Математическое моделирование и интеллектуальные системы" по проекту "Теоретические основы интеллектуальных систем, основанных на онтологиях, для интеллектуальной поддержки научных исследований" (№ 1002-251/П-16/021-387/110504-266) и Программы фундаментальных исследований № 16 ОЭММПУ РАН "Проблемы анализа и синтеза интегрированных технических и социальных систем управления" по проекту "Синтез интеллектуальных систем управления базами знаний и базами данных" (№ 1002-251/ОЭММПУ-16/080-387/190504-287).

Поскольку математический мир является миром идей и существует только в сознании людей, имеющих математическое образование, он должен быть описан некоторым образом для того, чтобы все эти люди понимали математический мир одинаково. Описание математического мира состоит из описания основных неопределяемых понятий, формулировок аксиом об этих понятиях и определений производных понятий.

Каждому основному понятию в математическом мире соответствует некоторое значение — либо множество математических объектов, либо один объект; термин, обозначающий это понятие, является обозначением этого значения. Если значение основного понятия — множество объектов, то считается, что все эти объекты обладают свойствами, задаваемыми аксиомами, относящимися к этому основному понятию. Каждое определение вводит в математический мир производное понятие, значением которого может быть либо множество математических объектов, либо новый математический объект (функция, предикат и т. п.), и термин для обозначения этого значения. Если значение производного понятия — множество объектов, то оно является либо подмножеством уже существующего в математическом мире множества объектов (супермножества), либо строится из объектов уже существующих в мире множеств. В первом случае объекты подмножества наследуют все свойства объектов супермножества; кроме того, определение вводит дополнительные свойства, которыми обладают объекты подмножества, в отличие от остальных объектов супермножества. Во втором случае свойства элементов нового множества определяются способом построения этих элементов и свойствами объектов, из которых эти элементы строятся. Описание математического мира задает этот математический мир однозначно.

Законы математического мира называются теоремами. Формулировки теорем — это лишь интуитивные догадки математиков о свойствах математического мира, скрытых от их взоров. Поэтому теоремы не добавляют математическому миру новых свойств: они лишь явно (!) утверждают, что математический мир обладает теми свойствами, которыми его неявно (!) наделили аксиомы и определения. Теоремы образуют математические знания.

Какую форму имеет теорема? Описание математического мира (аксиомы и определения) и математические знания (теоремы) записываются на «математическом диалекте», который позволяет описывать неопределяемые понятия, формулировать утверждения (аксиомы и теоремы), определять производные понятия, а также вводить формальные способы записи. Математический диалект выполняет функции и языка, и метаязыка. Набор его неформальных оборотов не фиксирован, а наборы терминов и формальных способов записи постоянно расширяются средствами языка.

Что значит, что теорема верна? Теорема (догадка) является правильной (верной), если, обозрев весь математический мир, наблюдатель обнаруживает, что все совокупности объектов, о которых идет речь в теореме, — ее частные случаи — обладают теми свойствами, наличие которых у этих совокупностей утверждает теорема. Это определение «правильности» не специфично для математики, а является общенаучным. Математические знания правильны тогда и только тогда, когда правильны все входящие в них теоремы.

Как можно установить, что теорема правильна? Из ответа на предыдущий вопрос непосредственно вытекает «идеальный» критерий правильности математических знаний: чтобы установить, что теорема правильна, нужно установить, что правильны все частные случаи этой теоремы, причём то, что частный случай правилен, должно быть установлено непосредственно. Поэтому проблема установления правильности теоремы сводится к проблеме установления правильности всех ее частных случаев.

Если теорема имеет лишь конечное число частных случаев, то для установления правильности этой теоремы идеальный критерий может быть применён практически. Такие теоремы будем называть тривиальными. Для нетривиальных теорем идеальный критерий не позволяет установить их правильность. Однако именно нетривиальные теоремы представляют интерес для математики. Поэтому и возникает потребность в иных критериях правильности математических знаний.

2. РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ В РАМКАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПРАКТИКИ

На основе скудных исторических данных можно предположить, что до Евклида правильность математических знаний устанавливалась на основе «интуитивного» критерия: чтобы установить правильность нетривиальной теоремы, нужно понять, верна она или неверна. Если вернуться к эпиграфу к этой статье, то можно сказать, что «интуитивный критерий» специально предназначен для неленивого разума, поскольку требует восприятия истины, которая утверждается в теореме. Однако в наше время разум ленив, а применение этого критерия требует определённых умственных способностей и образования. Поэтому такой способ не рассматривается как приемлемый.

Евклид пользовался аристотелевой логикой для установления правильности математических знаний [2]. Тем самым в математическую практику был введен «логический» критерий правильности математических знаний: чтобы установить, что нетривиальная теорема правильна, нужно построить ее правильное интуитивное доказательство и установить правильность аксиом, на которых оно основано. Интуитивное доказательство считается правильным, если его правильность установлена на основе интуитивного критерия, т. е. чтобы установить правильность доказательства, нужно, как и в случае теорем, понять, правильно или неправильно это доказательство. Доказательства, правильность которых устанавливается на основе интуитивного критерия, получили название интуитивных. Что касается аксиом, то для классических аксиоматических систем применяется интуитивный критерий, а для современных — конвенциональный (аксиомы считаются правильными в силу соглашения между членами математического сообщества). Для ленивого разума логический критерий считается более приемлемым. В нем требование понимания правильности короткой формулировки теоремы заменяется требованием понимания правильности куда более длинного текста ее доказательства. Таким образом, логический критерий свел вопрос о правильности теорем к пониманию правильности аксиом и доказательств.

Интуитивное доказательство включает в себя основную и побочные линии рассуждения, прямые и обратные рассуждения, явные и повторно используемые, а также неявные модули, формальные преобразования, логические, специальные и содержательные рассуждения, выдвижение предположений и условные рассуждения, явные и неявные пропуски. Основная линия рассуждения ведет к доказываемой теореме, а побочные линии ее поддерживают. Прямые рассуждения ведут от уже доказанных утверждений, аксиом и определений к еще не доказанным утверждениям, а обратные рассуждения — наоборот («для доказательства данного утверждения достаточно доказать...»). Леммы могут рассматриваться как явно выделенные модули доказательства, причем некоторые из них используются повторно. Неявные модули вводятся оборотами типа «покажем, что...». Формальные преобразования выполняются над утверждениями, записанными формально (например, тождественные преобразования). Примером логического рассуждения служит замена доказательства теоремы о равносильности доказательством двух теорем, имеющих форму импликации; примером специального рассуждения — использование принципа полной математической индукции; примером содержательного — различные способы применения математических теорем. Предположения выдвигаются, например, при доказательстве теоремы, имеющей форму импликации («предположим, что верно условие; докажем, что в этом предположении имеет место заключение»); при этом используются условные рассуждения (в число доказанных утверждений включаются предположения). Явные пропуски указываются оборотами типа «легко видеть...», а неявные никак не указываются. Текст интуитивного доказательства представляет собой последовательность специальных предложений математического диалекта, которые формируются на основе правил рассуждения.

Умение доказывать теоремы вырабатывается на примерах (задачах на доказательство), поэтому список правил рассуждения, допустимых в математике, не фиксирован. При этом если правильность формальных преобразований может быть установлена с помощью компьютерной программы, то для других типов рассуждений это не так. Неправильность интуитивного доказательства может быть установлена либо полуформальными (обнаружение применения недопустимых правил рассуждения или неправильного применения допустимых), либо содержательными (построение опровергающего примера) методами.

Некоторые логики признают лишь полные интуитивные доказательства: «то, что предназначается быть доказательством, не может иметь никаких пробелов, никаких лазеек, никаких сомнений, иначе это не доказательство» [1]. Однако чем менее тривиальна теорема, тем, как правило, длиннее ее полное интуитивное доказательство и тем менее оно понятно. Но и чрезмерное сокращение интуитивного доказательства может негативно отразиться на его понятности, так как требует интеллектуальных усилий, направленных на восстановление пропусков в процессе его понимания.

Можно отметить целый ряд противоречий математической практики, связанных с применением логического критерия правильности математических знаний.

Стремление получать все более нетривиальные математические результаты ведет, как правило, к удлинению интуитивных доказательств. В математической практике интуитивные доказательства всегда строятся вручную. Поскольку форма интуитивных доказательств исключает возможность применения компьютеров для проверки их правильности, то единственным критерием правильности интуитивного доказательства, признаваемым в математической практике, служит мнение экспертов. При этом, однако, не существует общепризнанной процедуры экспертного подтверждения правильности опубликованных интуитивных доказательств; неизвестно, анализировали ли эксперты и, если да, то какие именно эксперты, правильность того или иного опубликованного доказательства. Лишь в случае, если кто-либо из читателей случайно или намеренно обнаружил в таком доказательстве ошибку или построил для доказанной теоремы опровергающий пример, этот факт делается достоянием математической общественности.

Из практики программирования известно, что любые тексты, создаваемые людьми, могут содержать ошибки, причем число таких ошибок пропорционально длине текстов, а коэффициент пропорциональности зависит от семантической сложности текста: чем сложнее текст, тем больше ошибок он содержит. Несомненно, что интуитивное доказательство является одним из наиболее сложных текстов с большим числом разнообразных внутренних связей между его частями. Поэтому чем длиннее доказательство, тем больше потенциальных ошибок оно содержит и тем менее оно понятно.

Стремление «сократить» длинное доказательство за счет опускания «очевидных» деталей может привести к тому, что «сокращённое» доказательство будет содержать ещё больше потенциальных ошибок и (или) станет ещё менее понятным. Пропуски в интуитивных доказательствах, указанные явно или неявно, являются неистощимым источником прямых ошибок и неточностей [3].

История математики знает огромное число случаев обнаружения ошибок в интуитивных доказательствах, которые, к сожалению, часто воспринимались математиками как исторические курьезы. Можно ожидать, что число необнаруженных ошибок в таких доказательствах значительно превосходит число обнаруженных. Поэтому, несмотря на усилия математиков, направленные на обеспечение правильности математических доказательств, и в настоящее время математика еще далека от того, чтобы быть «образцом достоверности и истинности» [4]. Она нуждается в таком критерии правильности математических знаний, применение которого позволило бы еще более сузить область применения интуитивного критерия.

3. РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ В РАМКАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

В конце XIX в. были обнаружены парадоксы, связанные с началом изучения современных аксиоматических систем. Возникший кризис доверия к математическим знаниям заставил математиков начать дискуссию об уточнении «правил игры» в математике и привел к тому, что, начиная с этого времени, математика стала заботиться не только о своих математических «основаниях», но и о своих логических основаниях [5].

Одним из направлений «борьбы с парадоксами» стал анализ тех средств, которые традиционно применялись для построения описания математического мира и математических доказательств (теория типов Рассела, программы конструктивной и финитной математики Брауэра и Гильберта).

Другим направлением «борьбы с парадоксами» было построение математических моделей математической практики и изучение их математическими методами в рамках возникшей тогда области математики — математической логики. В наиболее известной из таких моделей — исчислении предикатов первого порядка — моделями математического мира являются алгебраические системы, моделью математического диалекта — язык исчисления предикатов первого порядка, моделями описания математического мира — логические теории (множества нелогических аксиом), моделью правил рассуждения — исчисление предикатов первого порядка, моделью полных интуитивных доказательств — формальные доказательства.

Тем самым в рассмотрение был введен «формально-логический» критерий правильности математических знаний: чтобы установить, что нетривиальная теорема правильна, нужно построить для ее модели на языке исчисления предикатов первого порядка формальное доказательство, являющееся моделью ее полного интуитивного доказательства, и установить правильность нелогических аксиом, на моделях которых оно основано. Нелогические аксиомы считаются правильными, если их достоверность установлена на основе интуитивного или конвенционального критерия. Сравнительно с логическим критерием в этом критерии требование понимания правильности интуитивного доказательства заменяется требованием проверки соответствия конкретного формального доказательства (конечного математического объекта) определению понятия «формальное доказательство». Такая проверка может быть выполнена с помощью компьютерной программы. Для ленивого разума этот критерий наиболее приемлемый. Теорема Геделя о полноте исчисления предикатов первого порядка установила формальную адекватность модели объекту моделирования.

Обсудим теперь, исходя из существенных свойств математической практики, рассмотренных в § 2, вопрос о том, насколько соответствует этой практике исчисление предикатов первого порядка (далее — исчисление предикатов).

В языке исчисления предикатов зафиксированы следующие первичные понятия: множество (задается неявно), объект (элемент множества), функция (число аргументов которой задается неявно с помощью функциональных термов), предикат (число аргументов которого задается неявно с помощью атомных формул), имя (которое вводится неявно и связывается с объектом), пропозициональные связки и логические кванторы, переменная (вводимая с помощью кванторов), аппликация функции и аппликация предиката. Эти понятия разъясняются при описании языка, и с их использованием определяется его семантика. Среди этих первичных понятий нет даже понятия числа. Никакие другие первичные понятия не могут быть введены при описании тех или иных теорий. Понятно, что для математической практики этих основных понятий недостаточно.

Нелогические аксиомы являются предложениями языка исчисления предикатов. Они определяют свойства множеств и всех их элементов, а также всех объектов, функций и предикатов, упомянутых в теории с помощью имен. Исчисление предикатов не накладывает никаких ограничений (кроме синтаксических) на вид или смысл нелогических аксиом.

Для записи определений в языке исчисления предикатов нет специальной конструкции. Поэтому при записи теории все имена, упомянутые в ней, вводятся неявно, а определения синтаксически ничем не отличаются от аксиом и представляются с помощью искусственных приемов.

Язык исчисления предикатов является формальным языком, предназначенным для записи теорий (нелогических аксиом) и теорем. Он содержит фиксированный набор формальных аналогов для основных (увы, далеко не всех!) оборотов математического диалекта. Но он не позволяет включать в предложения математические выражения в той нотации, как это принято в математической практике. Считается очевидным, что любое математическое утверждение может быть адекватно переведено на язык исчисления предикатов и обратно, однако такой перевод может потребовать значительных интеллектуальных усилий.

Моделью математического мира, описанного на языке исчисления предикатов, является алгебраическая система (непустое множество элементарных, не имеющих внутренней структуры объектов, — область интерпретации, на которой заданы конечные совокупности функций и предикатов), для которой определяется интерпретация множества имен, входящих в теорию [3] (далее — интерпретация), состоящая из трех отображений. Первое из них сопоставляет каждому имени объекта некоторый элемент области интерпретации; второе сопоставляет каждому имени функции некоторую функцию на области интерпретации; третье каждому имени предиката сопоставляет некоторый предикат на области интерпретации. Каждое предложение языка исчисления предикатов есть некоторое утверждение об интерпретации входящих в него имен. Семантика языка определяет способ вычисления значения любого предложения относительно этой интерпретации.

Описание математического мира на языке исчисления предикатов обладает следующими свойствами. Одно и то же множество имен, входящих в теорию, может иметь несколько (как правило, бесконечно много) разных интерпретаций. Эти интерпретации могут отличаться как областями интерпретации, так и любым из трех вышеуказанных отображений. Все переменные, входящие в теорию, в каждой интерпретации имеют одну и ту же область значений — область этой интерпретации. Теория выделяет те интерпретации (модели теории), относительно которых все аксиомы этой теории являются истинными. Таким образом, теория описывает некоторое (как правило, бесконечное) множество своих моделей, т. е. единственность математического мира теряется. Эти особенности языка исчисления предикатов затрудняют понимание теорий, записанных на нем, а также перевод на этот язык математических утверждений.

Предложение языка исчисления предикатов называется теоремой теории, если оно не совпадает ни с одной из нелогических аксиом и истинно во всех моделях этой теории. Таким образом, в исчислении предикатов модель основной проблемы правильности математических знаний формулируется следующим образом: дана теория и предложение на языке исчисления предикатов; требуется установить, является это предложение теоремой этой теории или нет. Но в математической практике математический мир единственен, и поэтому важно установить, верна ли теорема относительно именно этого мира. Отсюда следует, что модель основной проблемы правильности математических знаний в исчислении предикатов не адекватна формулировке этой проблемы для математической практики.

Прямой способ установить, что предложение является теоремой теории (на основе семантики языка исчисления предикатов) — перебрать все возможные области интерпретации, для каждой из них просмотреть все модели теории с этой областью интерпретации, рассмотреть все частные случаи предложения (заменив для этого в предложении каждую переменную ее значением из области интерпретации) и вычислить значение каждого частного случая. В соответствии с теоремой Эрбрана можно не рассматривать все возможные области интерпретации, а ограничиться рассмотрением лишь одной области, известной как универсум Эрбрана. Универсум Эрбрана может быть конструктивно построен, однако его нельзя рассматривать в качестве естественной модели математического мира, понятной математику. Очевидно, что установить истинность предложения на основе семантики языка исчисления предикатов можно лишь в том случае, если множество моделей теории, областью интерпретации которых является универсум Эрбрана, конечно, и если либо это предложение не содержит переменных, либо универсум Эрбрана конечен (теория не содержит имен, значениями которых являются функции). Будем говорить, что в первом случае — теорема, а во втором случае — теория являются тривиальными. Для математики же интерес представляют лишь нетривиальные теоремы и теории.

Под формальным доказательством в исчислении предикатов понимается конечная последовательность предложений, каждое из которых есть либо нелогическая аксиома, либо результат применения логической аксиомы (исчисления предикатов), либо значение заключения правила вывода, значения посылок которого предшествуют этому предложению в доказательстве. Если A есть последнее предложение в доказательстве P, то P есть доказательство предложения A [6]. Формальное доказательство моделирует только полное доказательство, состоящее только из прямых рассуждений. Оно имеет, по меньшей мере, два преимущества перед интуитивным. Во-первых, оно использует точно определенный логический базис (логические аксиомы и правила вывода), правильность которого может анализироваться отдельно от любого конкретного доказательства. Во-вторых, оно допускает формальную проверку правильности, т. е. может быть написана компьютерная программа, анализирующая формальное доказательство и отвечающая на вопрос, правильно оно или нет.

В отличие от математической практики, где правила рассуждения, применяемые для построения интуитивных доказательств, явным образом не стандартизованы, различные варианты исчисления предикатов предлагают различные варианты такой стандартизации — различные наборы правил вывода и логических аксиом. Логические аксиомы, в отличие от нелогических, истинны по смыслу логических символов, т. е. они истинны в каждой интерпретации любого множества имен [6]. В исчислении предикатов рассматриваются только такие правила вывода, у каждого из которых заключение является логическим следствием посылок. Для описания выдвигаемых предположений, в отличие от правил рассуждения в математической практике, правила вывода исчисления предикатов не содержат никаких средств.

Обычно каждой пропозициональной связке и квантору соответствует свое правило вывода. Однако не всякое такое правило вывода формализует правило рассуждения, принятое в математической практике. С другой стороны, многие правила рассуждения, принятые в математической практике, не формализованы в исчислении предикатов. В этом отношении крайним случаем является вариант исчисления предикатов, где нет логических аксиом, а единственное правило вывода исчисления — принцип резолюции — формализует правило рассуждения, обычно не применяемое в математической практике.

Таким образом, исчисление предикатов мало соответствует математической практике по следующим причинам:

— множество основных понятий невелико и фиксировано, вводить новые основные понятия невозможно;

— для определения производных понятий нет естественной конструкции;

— формальные естественные аналоги имеются лишь для ограниченного набора оборотов математического диалекта, а формальные естественные аналоги для других оборотов вводить невозможно;

— математические выражения (в принятом в математической практике виде) включать в предложения нельзя;

— все переменные, входящие в теорию, в каждой интерпретации имеют одну и ту же область значений;

— нетривиальная теория задает бесконечное множество моделей математических миров;

— универсум Эрбрана не является естественной совокупностью объектов математического мира, понятной математику;

— формальное доказательство моделирует только прямые рассуждения;

— правила вывода и логические аксиомы формализуют только часть правил рассуждения, применяемых в математической практике;

— некоторые правила вывода исчисления предикатов формализуют такие правила рассуждения, которые не применяются в математической практике;

— для описания выдвигаемых предположений правила вывода не содержат никаких средств;

— формальное доказательство всегда является моделью полного интуитивного доказательства, модели сокращенного интуитивного доказательства не существует.

Установление четких правил игры при конструировании формальных доказательств и возможность формальной проверки их правильности в исчислении предикатов оборачиваются неестественностью этой модели сравнительно с математической практикой. Это вызывает значительные трудности при попытках применить эту модель в математической практике, а именно, переводить описание математического мира и математические знания на язык исчисления предикатов и строить формальные доказательства по интуитивным. Бедность языка исчисления предикатов ведет к тому, что сравнительно простые математические идеи часто выражаются громоздкими конструкциями. Бедность самого исчисления предикатов ведет к тому, что формальные доказательства по размеру значительно превосходят интуитивные и значительно отличаются от них в содержательном плане. Отсутствие математической модели сокращенных интуитивных доказательств затрудняет переход от формальных доказательств к интуитивным. Все эти особенности исчисления предикатов не позволили применять в математической практике формально-логический критерий достоверности математических знаний. Даже в работах по математической логике (!) для теорем строятся не формальные, а интуитивные доказательства.

4. РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ В РАМКАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ ЛОГИКИ

Одно из направлений в области искусственного интеллекта — разработка методов поиска правильных формальных доказательств с помощью компьютеров [7]. В рамках этого направления были предложены такие варианты исчисления предикатов первого порядка (принцип резолюции, обратный вывод), на основе которых разработаны компьютерные программы, формирующие правильное формальное доказательство по записи теоремы и нелогических аксиом на языке исчисления предикатов. Тем самым в рассмотрение был введен «компьютерный» критерий правильности математических знаний: чтобы установить, что нетривиальная теорема правильна, нужно построить для ее модели на языке исчисления предикатов компьютерное доказательство, являющееся моделью ее полного интуитивного доказательства, и установить правильность нелогических аксиом, на моделях которых оно основано. Отличие компьютерного критерия от формально-логического состоит в том, что компьютерное доказательство строится компьютером и поэтому более надежно, чем формальное доказательство, которое строится человеком. С помощью компьютера можно построить более сложные (длинные) доказательства. Однако чем сложнее (длиннее) доказательство, тем труднее его понять. Поэтому математики могут лишь верить в то, что такие доказательства правильны (правильно построены), но не могут понимать их [3].

Наиболее полно изучены системы автоматического доказательства теорем, в которых компьютерные доказательства строятся без участия человека [7]. Однако их применение столкнулось со значительными трудностями. Причины их — в полуразрешимости исчисления предикатов (если утверждение является теоремой теории, то его компьютерное доказательство может быть найдено за конечное число шагов, но если это утверждение не является теоремой, то поиск может продолжаться бесконечно), в высокой временной сложности алгоритмов автоматического доказательства теорем, в бедности языка исчисления предикатов (что затрудняет построение информационной базы для систем автоматического доказательства теорем), в отсутствии математической модели интуитивных доказательств (что затрудняет переход от компьютерных доказательств к интуитивным).

Другое направление конструирования компьютерных доказательств — автоматизированные системы, в которых поиском компьютерного доказательства управляет математик. Математик решает творческую задачу — сокращает сложность конструирования доказательств за счет своих дополнительных знаний, которые не заложены в программу. Компьютер выполняет всю рутинную работу и обеспечивает правильность результата. Такие программы разрабатываются в последнее время чаще всего в учебных целях [8—11]. Системы автоматизированного доказательства теорем не сталкиваются с проблемами вычислительной сложности, поскольку управление со стороны математика как раз и служит целям сокращения перебора при поиске доказательства. Однако такие системы, как правило, основаны на моделях математической логики, и математик, пользующийся ими, сталкивается с проблемами интеллектуальной сложности из-за неадекватности этих моделей математической практике. Основные причины трудностей применения таких систем — бедность исчисления предикатов (что затрудняет человеко-машинное конструирование компьютерных доказательств), а также, как и в случае систем автоматического доказательства теорем, бедность языка исчисления предикатов (что затрудняет построение информационной базы для систем автоматизированного доказательства теорем) и отсутствие математической модели интуитивных доказательств (что затрудняет переход от компьютерных доказательств к интуитивным).

5. ПУТИ ДАЛЬНЕЙШЕГО ПРОДВИЖЕНИЯ В РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМЫ

Результаты проведенного анализа позволяют увидеть то направление, в котором необходимо двигаться при решении рассматриваемой проблемы. Прежде всего, в основу решения проблемы должен быть положен компьютерный критерий как обеспечивающий наибольшую правильность математических знаний. Далее, успех может обеспечить разработка систем автоматизированного доказательства теорем, поскольку только таким образом можно обойти проблемы вычислительной сложности — благодаря творческим способностям и дополнительным знаниям самих математиков. Наконец, следует разрабатывать более адекватные модели математической практики для этих систем.

В настоящее время ведется разработка такой модели математической практики [12, 13]. Она обладает следующими свойствами.

Модель математического диалекта двухуровневая — она содержит средства метаязыка для введения в язык формальных аналогов новых оборотов, неопределяемых понятий и способов записи. Расширяемый таким образом язык позволяет формулировать формальные математические и метаматематические утверждения и определения.

Объекты модели математического мира моделируют наиболее естественным образом математические объекты, включая их внутреннюю структуру. Формальное описание математического мира задает единственную его модель и имеет единственную интерпретацию.

Модель доказательства включает в себя все перечисленные выше виды рассуждений — прямые и обратные, логические, специальные и содержательные, выдвижения предположений и условные рассуждения. Наряду с полными доказательствами в модели присутствует и модель интуитивных (сокращенных) доказательств, а также модель объяснения сокращенных доказательств.

Разработка этой модели ведется с использованием последних достижений в области искусственного интеллекта — теории онтологий [14—16]. При проектировании системы автоматизированного доказательства теорем, основанной на такой модели, принята концепция компьютерных банков знаний, описанная в работах [17, 18].

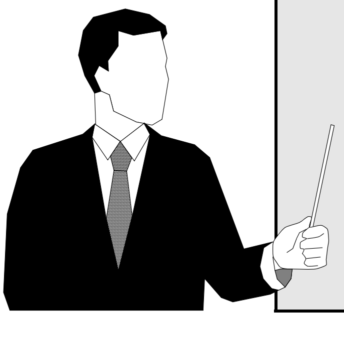
ЛИТЕРАТУРА

1. *Пойа Д.* Как решать задачу. — М.: Учпедгиз, 1961. — 207 с.
2. *Лорьер Ж.-Л.* Системы искусственного интеллекта. — М.: Мир, 1991. — 568 с.
3. *Непейвода Н. Н.* Прикладная логика. — Ижевск: Удмуртский ун-т, 1997. — 384 с.
4. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. — М.: Наука, 1979. — 557 с.
5. *Крайзель Г.* Исследования по теории доказательств. — М.: Мир, 1981. — 289 с.
6. *Шёнфилд Дж.* Математическая логика. — М.: Наука, 1975. — 527 с.
7. *Чень Ч., Ли Р.* Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. — М.: Наука, 1983. — 320 с.
8. *Peter B. Andrews, Matthew Bishop, Chad E. Brown, et al.* ETPS: A System to Help Students Write Formal Proofs // Research Report No. 03-002, April 2003 (Department of Mathematical Sciences. Carnegie Mellon University).
9. *Christoph Benzmuller and Volker Sorge.* A Blackboard Architecture for Guiding Interactive Proofs. F. Giunchiglia (Ed.): AIMSA'98, LNAI 1480, 1998. P. 102—114.
10. *Stephan Schmitt, Lori Lorigo, Christoph Kreitz, and Aleksey Nogin.* JProver: Integrating Connection-Based Theorem Proving into Interactive Proof Assistants. International Joint.
11. *Ulrich Endriss.* The Interactive Learning Environment WinKE for Teaching Deductive Reasoning. First International Congress on Tools for Teaching Logic. King's College, London — United Kingdom — September 6, 2000.
12. *Гаврилова Т. Л., Клещёв А. С.* Проблема конструирования правильных интуитивных доказательств в классических аксиоматических системах. Ч. 2. Конструирование полных доказательств. — Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2003. — 34 с. (http://www.iacp.dvo.ru/es/publ/185_1.rtf).
13. *Гаврилова Т. Л., Клещёв А. С.* Проблема конструирования правильных интуитивных доказательств в классических аксиоматических системах. Ч. 3. Модель интуитивного доказательства. — Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2003. — 21 с. (http://www.iacp.dvo.ru/es/publ/185_2.rtf).
14. *Клещёв А. С., Артемьева И. Л.* Математические модели онтологий предметных областей. Ч. 1. Существующие подходы к определению понятия «онтология»//НТИ. Сер. 2. — 2001. — № 2. — С. 20—27. (www.iacp.dvo.ru/es/publ/104_1.rtf).
15. *Клещёв А. С., Артемьева И. Л.* Математические модели онтологий предметных областей. Ч. 2. Компоненты модели//НТИ. Сер. 2. — 2001. — № 3. — С. 19—29. (www.iacp.dvo.ru/es/publ/104_2.rtf).
16. *Клещёв А. С., Артемьева И. Л.* Математические модели онтологий предметных областей. Ч. 3. Сравнение разных классов моделей онтологий//НТИ. Сер. 2. — 2001. — № 4. — С. 10—15. (www.iacp.dvo.ru/es/publ/104_3.rtf).
17. *Орлов В. А., Клещёв А. С.* Многоцелевой банк знаний. Ч. 1. Концепция и политика. — Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2003. — 40 с. (www.iacp.dvo.ru/es/publ/186_1.rtf).
18. *Орлов В. А., Клещёв А. С.* Многоцелевой банк знаний. Ч. 2. Требования. — Владивосток: ИАПУ ДВО РАН, 2003. — 23 с. (www.iacp.dvo.ru/es/publ/186_2.rtf).

☎ *(4232) 31-40-01, 31-04-24*

E-mail: gavrilova@iacp.dvo.ru

E-mail: kleshev@iacp.dvo.ru ❑



Читайте в следующем номере

Копнин М.Ю., Кульба В.В., Микрин Е.А. *Структурно-технологический резерв и его использование для повышения устойчивости производственных систем*

Колемаев В.А., Бережной А.Е. *Моделирование смены технологического уклада*

Ведешенков В.А. *Способ самодиагностирования неоднородных цифровых систем*

Левин В.И. *Логическое моделирование разрывных функций*

Полетыкин А.Г. *Особенности разработки программного обеспечения сложных интегрированных АСУТП*

Бабушкина Н.А., Островская Л.А., Рыкова В.А. *и др. Моделирование эффективности действия противоопухолевых препаратов в сверхмалых дозах для оптимизации режимов их введения*

Абрамянц Т.Г., Маслов Е.П., Рубинович Е.Я. *Управление подвижными объектами в условиях искусственно организованной неполноты информации*

Научные *чтения памяти А.М. Петровского*