УДК 517.96+681.3

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЧЕТКИХ МЕР И ИНТЕГРАЛОВ К ОПИСАНИЮ НЕЧЕТКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин

Липецкий государственный технический университет

Рассмотрен подход к учету нечеткости окрестностей по состоянию дискретно-временных систем на основе использования нечетких мер и интегралов.

ВВЕДЕНИЕ

Нечеткие меры и интегралы широко исследуются в современной прикладной математике, прежде всего, в связи с проблемами искусственного интеллекта [1]. Естественная область их определения и изучения, мотивируемая значительным числом приложений, находится в рамках элементарной теории конечных мер и интегралов на булеанах над полукольцами [2].

Нечеткие системы Вольтерра введены и исследованы в работе [3] в качестве примера реализации подхода к учету нечеткости окрестностей по состоянию дискретно-временных систем. В ней же обсуждается скалярная линейная нестационарная дискретная система Вольтерра

$$x[t] = \sum_{\tau=0}^{t-1} \alpha[t;\tau] = \sum_{\tau \in T} \alpha[t;\tau]x[\tau], \qquad (1)$$

где $t \in N = \{0, 1, ...\}$ — дискретное время, $x[t] \in R^n$ — вектор состояния системы, $\alpha[t; \tau]$ — коэффициенты. Скалярная нечеткая линейная по состояниям дискретная система типа Вольтерра описывается сопоставимым с выражением (1) уравнением

$$x[t] = \sum_{\tau=0}^{t-1} \mu[t;\tau]x[\tau] = \sum_{\tau \in T} \mu[t;\tau]x[\tau], \qquad (2)$$

где $\mu[t; \tau] \in [0, 1]$ — функции принадлежности.

Цель данной работы — показать, что нечеткие меры и интегралы являются подходящим математическим аппаратом для описания нечетких динамических систем. Систематическое изложение этого аппарата и его приложений к проблемам нечеткости и мягких вычислений можно найти в работе [4]. В последнее время нечеткие меры и интегралы интенсивно применяются в задачах агрегирования критериев при многокритериальном принятии решений [5—8].

1. НЕЧЕТКИЕ МЕРЫ

Понятие нечетких меры и интеграла было введено М. Сугено (см., например, работы [4—6]). Для современных приложений особый интерес эти понятия представляют применительно к конечным множествам. Пусть $T = MNX[t] = \{0, ..., t - 1\}$ — такое множество; при рассмотрении динамических систем оно наделено естественным порядком следования его элементов. Нечеткая мера на множестве T определяется как функция множества $m : 2^T \to [0, 1]$ (здесь 2^T — булеан или множество всех подмножеств множества T), обладающая свойствами $m(\varnothing) = 0$, $m(T) = 1$, $A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leqslant m(B)$, где A, B — подмножества множества T.

Подчеркивается, что требование аддитивности (в обычном смысле, конкретный пример см. ниже), обязательно присутствующее в стандартных определениях мер, к нечетким мерам, вообще говоря, не предъявляется. Однако отметим, что, с позиций идемпотентной математики [9], при рассмотрении промежутка [0, 1] как полукольца с операциями max и min вместо базовых арифметических операций идемпотентная мера, как пример нечеткой меры, свойством аддитивности обладает (конкретные примеры см. ниже).

Прототипом нечетких мер является обычная вероятностная мера P — конкретный пример аддитивной (в обычном смысле) меры: если $A \cap B = \varnothing$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Конкретными примерами идемпотентно-аддитивных мер служат мера Π возможности, для которой $\Pi(A \cup B) = \max\{\Pi(A), \Pi(B)\}$, и мера N достоверности (необходимости), для которой $N(A \cup B) = \min\{N(A), N(B)\}$. Известен класс мер Сугено, характеризующихся параметром $\lambda > -1$ и обладающих свойством $S(A \cup B) = S(A) + S(B) + \lambda S(A)S(B)$ (при $\lambda = 0$ это обычные аддитивные меры), меры доверия и правдоподобия и др. (см., например, работы [4, 5]).

2. НЕЧЕТКИЙ ИНТЕГРАЛ СУГЕНО И СИСТЕМА ВОЛЬТЕРРА—СУГЕНО

Пусть $f: T \to [0, 1]$ — некоторая функция. Нечеткий интеграл Сугено от этой функции по нечеткой мере $m = m_t$ на множестве T определяется выражением

$$S(f, m, T) = \max_{\alpha \in [0, 1]}\{\min[\alpha, m_t, (F_\alpha)]\},$$

где $F_\alpha = \{t \in T : f[t] \geqslant \alpha\}$. Если $f = \mu$ — функция принадлежности некоторого нечеткого подмножества множества T, то F_α — множество уровня α этого подмножества. Другое представление этого интеграла можно получить в предположении, что функция f не возрастает на множестве T, так что при $t > s$ выполняется условие $f[t] \leqslant f[s]$ (для произвольной функции множество T может быть переупорядочено). В этом случае интеграл Сугено может быть представлен в виде

$$S(f, m, T) = \max_{\tau \in T}\{\min[m_t([0, \tau]), f[\tau]]\},$$

допускающем сопоставление с правой частью уравнения (2), описывающего линейные нечеткие дискретные системы типа Вольтерра. Выражения находятся в следующем соответствии: состоянию $x[\tau]$ соответствует функция $f[\tau]$, коэффициентам $m[t; \tau]$ соответствует мера $m_t([0, \tau])$, арифметическим операциям сложения и умножения соответствуют операции max и min. Отмеченное соответствие позволяет определить нечеткую дискретную максминную систему типа Вольтерра—Сугено уравнением

$$x[t] = \max_{\tau \in T}\{\min[m_t([0, \tau]), x[\tau]]\}.$$

Ее наиболее бросающиеся в глаза отличия от систем, рассмотренных в работе [3], — использование максминных операций, ограничение области значений состояния промежутком [0, 1] и его невозрастание.

3. НЕЧЕТКИЙ ИНТЕГРАЛ МАСЛОВА И СИСТЕМА ВОЛЬТЕРРА—МАСЛОВА

Другой тип нечеткого интеграла — идемпотентный интеграл Маслова [9] на полуполе $R_{\max}$ или *MAXPLUS*, в котором сложение заменяется операцией взятия максимума, а умножение — обычным арифметическим сложением — предполагает, что нечеткая идемпотентная мера определяется некоторой заданной на множестве T функцией $\varphi = \varphi_t$ в виде $m(A) = m_{t\varphi}(A) = \max\limits_{\tau \in A}\varphi_t[\tau]$ для всех $A \subseteq T$; сам идемпотентный интеграл определяется выражением $I(f, m, T) = \max\limits_{\tau \in T}\{\varphi_t[\tau] + f[\tau]\}$, сравнение которого с уравнением (2) позволяет определить нечеткую дискретную максплюсовую систему типа Вольтерра—Маслова уравнением

$$x[t] = \max_{\tau \in T}\{\varphi_t[\tau] + x[\tau]\},$$

характерное отличие которой также состоит в использовании модифицированных базовых операций.

4. НЕЧЕТКИЙ ИНТЕГРАЛ ШОКЕ И СИСТЕМА ВОЛЬТЕРРА—ШОКЕ

Наиболее близкое к рассмотренным ранее представление имеет интеграл Шоке по нечеткой мере [4—6]. Здесь, как и в случае интеграла Сугено, предполагается, что функция f не возрастает на множестве T, но область ее значений ограничена не промежутком [0, 1], а более широким промежутком $[0, \infty)$. Интеграл Шоке в базовых арифметических операциях определяется выражением $C(f, m, T) = \sum\limits_{\tau \in T}\{m_t([0, \tau]) - m_t([0, \tau - 1])\}f[\tau]$ и оказывается наиболее сопоставимым с правой частью уравнения (2): состоянию $x[\tau]$ соответствует функция $f[\tau]$, коэффициентам $\mu[t; \tau]$ соответствует приращение меры $m_t([0, \tau]) - m_t([0, \tau - 1])$; иных отмеченных выше отличий нет. Это позволяет определить нечеткую дискретную систему типа Вольтерра—Шоке уравнением

$$x[t] = \sum_{\tau \in T}\{m_t([0, \tau]) - m_t([0, \tau - 1])\}x[\tau].$$

Такая система допускает, например, представляющую определенный интерес интерпретацию условий устойчивости дискретных систем Вольтерра (1), приведенных в работе [3]: так как по определяющим свойствам нечеткой меры

$$\alpha_0 = \sup_{t \geq 0}\sum_{\tau = 0}^{\infty}|a[t; \tau]| = \sup_{t \geq 0}\sum_{\tau = 0}^{\infty}|m_t([0, \tau]) - m_t([0, \tau - 1])| =$$
$$= \sup_{t \geq 0}\sum_{\tau = 0}^{t-1}\{m_t([0, \tau]) - m_t([0, \tau - 1])\} =$$
$$= \sup_{t \geq 0}\{m_t(T) - m(\varnothing)\} = 1$$

(при естественном соглашении $[0, -1] = \varnothing$), то система является устойчивой, но не асимптотически устойчивой. В работе [3] отмечено, что в современных приложениях нечетких систем классическое структурное свойство устойчивости далеко не самое важное.

Сопоставление введенных здесь нечетких систем с системами, рассмотренными в работе [3], показывает, что в уравнениях систем Вольтерра—Сугено и Вольтерра—Шоке величины $m_t([0, \tau])$ и $m_t([0, \tau]) - m_t([0, \tau - 1])$ допускают трактовку как значения функций принадлежности нечетких окрестностей по состояниям: из определяющих свойств нечеткой меры следует, что эти величины принимают значения в промежутке [0, 1].

Особого внимания требует предположение о невозрастании состояния введенных здесь систем на промежутке $[0, t - 1]$: если не придавать динамического смысла рассмотренным нечетким интегралам, то такое предположение можно считать не слишком обременительным, поскольку, как уже отмечалось, область определения можно соответствующим образом переупорядочить. Однако при динамической трактовке, как тоже отмечалось, оно наделено естественным порядком следования его элементов — моментов времени, и переупорядочение может затруднить динамическую интерпретацию. Здесь могут оказаться полезными соображения, используемые при исследовании нечетких конечно-аргументных систем [10], когда множество моментов времени формализуется при помощи конечной группы, в которой групповая операция не согласована с естественным временным порядком.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Отметим, что нечеткие системы Вольтерра—Сугено и Вольтерра—Маслова не являются линейными в обычном смысле слова, но «линейны» над соответствующими идемпотентными полукольцами, подобно отмеченной выше аддитивности мер. Это одно из простейших в современной прикладной математике проявлений основной парадигмы идемпотентной математики [9], выражаемой идемпотентным принципом эвристического соответствия между важными, полезными и интересными конструкциями и результатами традиционной математики над числовыми полями и аналогичными конструкциями и результатами над идемпотентными полукольцами и полуполями. Идемпотентная математика, возникающая как двойник или «тень» традиционной, соотносится с последней примерно так же, как классическая физика с квантовой; переход от традиционной математики к идемпотентной трактуется как «деквантование» или «вторичное деквантование». Во многих отношениях идемпотентная математика проще традиционной; однако переход от традиционных понятий и результатов к их идемпотентным аналогам часто нетривиален. Некоторые соотношения между линейной и «линейной» алгебрами обсуждены в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блюмин С. Л.* Математические проблемы искусственного интеллекта: регулярность по Дж. фон Нейману в линейной и «линейной» алгебрах // Системы управления и информационные технологии. — 2003. — № 1—2 (12). — С. 90—94.
2. *Блюмин С. Л.* Конечные меры и интегралы на булеанах над полукольцами // Материалы Воронеж. весенней мат. школы «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XV» / ВГУ. — Воронеж, 2004. — С. 35.
3. *Блюмин С. Л., Шмырин А. М.* Нечеткие системы Вольтерра // Проблемы управления. — 2004. — № 4. — С. 75—78.
4. *Grabisch M., Murofushi M., Sugeno M.* Fuzzy Measures and Integrals — Theory and Applications. Studies in Fuzziness and Soft Compuing. Vol. 40. — Heidelberg: Springer-Verlag, 2000. — 543 p.
5. *Yager R.* Criteria aggregations functions using fuzzy measures and the Choquet integral // Int. J. of Fuzzy Systems. — 1999. — Vol. 1, N 2. — P. 96—112.
6. *Ovchinnikov S.* Piecewise linear aggregation functions // Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems. — 2000. — Vol. 1, N 1. — P. 11—22.
7. *Klement E., Mesiar R., Pap E.* Measure-based aggregation operators // Fuzzy Sets and Systems. — 2004. — Vol. 142, N 1. — P. 3—14.
8. *Calvo T., Pradera A.* Double aggregation operators // Fuzzy Sets and Systems. — 2004. — Vol. 142, N 1. — P. 15—33.
9. *Литвинов Г. Л., Маслов В. П.* Идемпотентная математика // Докл. Воронеж. зимней мат. школы «Современный анализ и его приложения» / ВГУ. — Воронеж, 2000. — С. 20—21.
10. *Блюмин С. Л., Шмырин А. М.* Нечеткие окрестностные конечные системы // Материалы Воронеж. весенней мат. школы «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XIV» / ВГУ. — Воронеж, 2003. — С. 26.

☎ *(0742) 32-81-33*

E-mail: amsh@lipetsk.ru ❑