УДК 330.4;681.513.4

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ПОРТФЕЛЯ ИНВЕСТИЦИЙ. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ СЛУЧАЙ

А. С. Рыков, Р. Р. Исходжанов

Московский государственный институт стали и сплавов (технологический университет)

Предложен метод решения многокритериальной задачи условной оптимизации распределения ресурсов при изменении состава портфеля инвестиций, относящийся к классу методов деформируемых конфигураций. Рассмотрены вопросы его практического применения.

ВВЕДЕНИЕ

Определение оптимального состава портфеля инвестиций — одна из важнейших задач деятельности как профессиональных игроков фондового рынка, так и владельцев или распорядителей капитала, не задействованного в текущий момент времени в сфере производства товаров и услуг. Традиционные методики ее решения детально разработаны и исследованы, однако отражают только один аспект выгоды инвестора — доход от реализации портфеля инвестиций — и предполагают множество допущений.

Многокритериальная модель портфеля инвестиций, позволяющая учесть разнородные цели инвестора, а также влияние факторов внешней среды путем агрегирования частных критериев качества портфеля в единую целевую функцию и сценарного подхода к его моделированию, предложена в работе [1]. Данная модель позволяет оценить качество портфеля заданного состава, однако не позволяет определить его оптимальный состав, наилучшим образом соответствующий целям данного инвестора-ЛПР (лица, принимающего решения) в текущей ситуации в текущий момент времени.

Для эффективного решения задачи оптимизации портфеля инвестиций требуется применение специальных методов оптимизации, опирающихся на современный математический аппарат и эвристические приемы, обусловленные ее характером.

В статье рассматривается модель портфеля инвестиций, позволяющая сформулировать постановку многокритериальной задачи условной оптимизации портфеля инвестиций, предложен метод решения задачи оптимизации из класса методов деформируемых конфигураций [2, 3]. Решение задачи показывает состав портфеля инвестиций, реализация которого позволит в наибольшей степени достичь разнообразных целей инвестора-ЛПР.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Задача оптимизации портфеля инвестиций решается в детерминированном случае — при условии, что все значения аргументов и критериев выражены действительными числами.

Приведем в обобщенном виде постановку задачи оптимизации портфеля инвестиций, подробно описанной в работе [1], а затем укажем способы решения поставленной задачи. Пусть даны:

— исходное множество допустимых решений X — подмножество $(n + m)$-мерного пространства аргументов V^{n+m}:

$$X = \{v = (v_1, \ldots, v_{n+m}) \in V^{n+m} | h_i(v) = 0,$$
$$i \in I_Y \cup I_Z \cup I_G,\ g_j(v) \le 0,\ j \in J_Y \cup J_Z \cup J_G\}, \quad (1)$$

где $h_i(v)$, $g_j(v)$ − ограничения, I_Y, J_Y — множества индексов ограничений проектов, I_Z, J_Z — множества индексов ограничений ресурсов, I_G, J_G — множества индексов ограничений целей, v_i, $i = 1, \ldots, n - 1$ — объем вложения в i-й инвестиционный проект, v_n — объем инвестирования в ликвидный безрисковый актив, v_i, $i = n + 1, \ldots, n + m$ — объем использования доступных источников ресурсов;

— отображение точки исходного множества X в точку пространства частных критериев качества $C^{\bar{u}}$:

$$U : V^{n+m} \to C^{\bar{u}}, \quad (2)$$

где $\bar{u}$ — число частных критериев качества (размерность критериального пространства);

— функция полезности, определенная на пространстве частных критериев $C^{\bar{u}}$ (в явном виде либо в виде неформализованных предпочтений инвестора-ЛПР):

$$U^*:\ C^{\bar{u}} \to \mathrm{R}. \qquad (3)$$

Пусть функция полезности выбрана так, что для $\forall c_1, c_2 \in C^{\bar{u}}$ выполняются соотношения:

$$\begin{cases} U^*(c_1) < U^*(c_2) \Rightarrow c_1 \prec c_2 \\ U^*(c_1) = U^*(c_2) \Rightarrow c_1 \propto c_2 \\ U^*(c_1) > U^*(c_2) \Rightarrow c_1 \succ c_2. \end{cases} \qquad (4)$$

Рассмотрим композицию преобразований U и U^*:

$$F = U \times U^*.$$

Тогда

$$F:\ V^{n+m} \to R.$$

Очевидно, что соотношения (4) сохранятся для $\forall v_1, v_2 \in V^{n+m}$:

$$\begin{cases} F(v_1) < F(v_2) \Rightarrow v_1 \prec v_2 \\ F(v_1) = F(v_2) \Rightarrow v_1 \propto v_2 \\ F(v_1) > F(v_2) \Rightarrow v_1 \succ v_2. \end{cases}$$

Постановка задачи условной оптимизации в этом случае будет иметь следующий вид:

$$v^* = \arg\min_{v \in X} (-F(v)). \qquad (5)$$

Отметим, что мы не налагаем ограничений на определенность целевой функции $F(v)$ на всем пространстве аргументов V^{n+m}, поэтому за пределами исходного множества допустимых решений X вычисление значений целевой функции (функции полезности) в ходе решения задачи оптимизации производиться не будет.

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ

Предлагаемая процедура решения задачи условной оптимизации (1)—(5) разбивается на следующие этапы.

1. Снижение размерности решаемой задачи с $n + m$ до $n - 1$ и формирование в подпространстве V^{n-1} проекции X^{n-1} множества допустимых значений X.

2. Определение числа начальных точек $\bar{i}$.

3. Генерация множества V_0, состоящего из $\bar{i}$ начальных точек в пространстве переменных V^{n-1}:

$$V_0 = \{v_{0,i} | v_{0,i} \in V^{n-1},\ i = 1, ..., \bar{i}\}.$$

4. Поиск для каждой начальной точки из множества V_0 допустимой начальной точки в исходном множестве X^{n-1}:

$$\tilde{V}_0 = \{\tilde{v}_{0,i} | \tilde{v}_{0,1} \in X^{n-1},\ i = 1, ..., \bar{i}\}.$$

5. Поиск решения задачи (5) для каждой допустимой начальной точки $\tilde{v}_{0,i}$, $i = 1, ..., \bar{i}$, формирование множества решений:

$$\tilde{V}_{\text{opt}} = \{\tilde{v}_{\text{opt},i} | \tilde{v}_{\text{opt},i} \arg\max_{v \in X^{n-1}} F(Q^{-1}(v)),$$
$$i = 1, ..., \bar{i}\}.$$

1. Ранжирование решений $\tilde{v}_{\text{opt},i}$, $i = 1, ..., \bar{i}$ по значению целевой функции $F(Q^{-1}(v))$ либо выбор в диалоге с инвестором-ЛПР лучшего решения:

$$\tilde{x} = \arg\max_{v \in \tilde{V}_{\text{opt}}} F(Q^{-1}(x)).$$

Прокомментируем кратко представленную процедуру решения задачи оптимизации. На первом этапе из-за учета содержательных особенностей модели снижается размерность пространства, в котором ищется решение задачи оптимизации.

Предполагается, что целевая функция $F(v)$ может в общем случае иметь сложный для оптимизации характер, например, может быть многоэкстремальной и овражной. Для преодоления отмеченных сложностей предлагается решать множество задач оптимизации (5), запуская итеративный метод решения из разных начальных условий. Поэтому на втором этапе предложено выбрать число начальных точек $\bar{i}$, а на третьем этапе сформировать множество начальных точек V_0.

Начальные точки из множества V_0 могут не принадлежать множеству допустимых решений X. На четвертом этапе с помощью решения вспомогательных оптимизационных задач по минимизации отклонения точки от ограничений, образующих множество X, осуществляется поиск для каждой исходной точки допустимого решения. В результате получаем множество $\bar{i}$ допустимых начальных точек $\tilde{V}_0$.

На пятом этапе решается $\bar{i}$ задач оптимизации (5) и формируется множество решений $\tilde{V}_{\text{opt}}$.

На последнем этапе полученные решения либо ранжируются, либо в диалоге с инвестором-ЛПР определяется лучшее решение.

Такова общая схема решения задачи оптимизации. При описании процедуры не обсуждался важнейший вопрос: каким методом решать возникающие оптимизационные задачи?

Задача (1)−(5) относится к классу задач условной нелинейной конечномерной оптимизации.

Заметим, что в общем случае производные целевой функции и ограничений могут быть неизвестны. Для решения задачи оптимизации были выбраны методы из класса методов деформируемых конфигураций, хорошо зарекомендовавшие себя при оптимизации нелинейных, недифференцируемых функций, в том числе овражного типа, в задачах оптимизации средней размерности [2—4].

Перейдем к более подробному описанию отдельных элементов представленной процедуры решения задачи условной оптимизации.

Снижение размерности задачи оптимизации

Рассмотрим способ снижения размерности задачи оптимизации путем учета специфики рассматриваемой модели портфеля инвестиций.

В силу специфики модели портфеля инвестиций величины v_i, $i = n, ..., n + m$, функционально зависят от величин v_i, $i = 1, ..., n - 1$. Для рассматриваемой модели эффективным будет наличие не более одной точки с данной комбинацией значений v_i, $i = 1, ..., n - 1$. Отсюда следует, что при решении задачи оптимизации для снижения ее размерности и, следовательно, снижения вычислительной сложности можно воспользоваться преобразованием Q: $V^{n+m} \to V^{n-1}$, что тождественно $Q(v) = \tilde{v}$, $\tilde{v} = \{\tilde{v}_1, ..., \tilde{v}_{n-1}\}$, $v_i = \tilde{v}_i$, $i = 1, ..., n - 1$.

Обратное преобразование будет иметь вид Q^{-1}: $V^{n-1} \to V^{n+m}$, что тождественно $Q^{-1}(\tilde{v}) = v$.

Обозначим отображение исходного множества допустимых решений X в подпространство размерности $n - 1$ преобразованием Q: $X \to X^{n-1}$, и обратное преобразование Q^{-1}: $X^{n-1} \to X$.

Снижение размерности исходного пространства с $n + m$ до $n - 1$ облегчает решение исходной задачи оптимизации.

Поиск допустимых начальных точек

Начальной точкой является исходный состав портфеля инвестиций $v_{0,i} \in V_0$. Сконструируем штрафную функцию

$$P(Q^{-1}(v)) = \\ = \sum_i |h_i(Q^{-1}(v))| - \sum_j \max\{g_j(Q^{-1}(v)), 0\}, \qquad (6)$$

где $i \in I_Y \cup I_Z \cup I_G$, $j \in J_Y \cup J_Z \cup J_G$.

Тогда задача оптимизации штрафной функции будет иметь вид:

$$\text{найти } \tilde{v}_{0,i} = \arg\min_{v \in V^{n-1}} P(Q^{-1}(v)).$$

Для решения этой задачи применялись методы класса деформируемых конфигураций. Ее решением будет первая точка $\tilde{v}_{0,i} \in V^{n-1}$, для которой $P(Q^{-1}(\tilde{v}_{0,i})) = 0$. Очевидно, что $\tilde{v}_{0,i} \in X^{n-1}$.

Расчет значения целевой функции

Применение преобразования Q для снижения размерности задачи позволяет разбить процедуру расчета значения целевой функции $F(Q^{-1}(\tilde{v}))$ в процессе оптимизации на множестве допустимых значений на следующие этапы:

- определение объема инвестирования в доступные инвестиционные проекты по правилам генерации новой альтернативы: $\tilde{v} = \{\tilde{v}_1, ..., \tilde{v}_{n-1}\}$;
- определение оптимального объема использования источников ресурсов при заданном объеме инвестирования с учетом использования ликвидного безрискового актива для компенсации оттоков будущих периодов:

$$v = \{v_1, ..., v_{n+m}\},$$

$$v_i = \begin{cases} \tilde{v}_i, & i = 1, ..., n-1 \\ \arg\min\limits_{x \in X} \sum\limits_{j=1}^{m} z_j(v), & i = n, ..., n+m, \end{cases}$$

$$z_j(v) = \sum_{t=1}^{\bar{t}} \frac{|IC_j^t|}{\prod\limits_{a=0}^{t} (1 + i_j^a)^{t_a}},$$

$$\begin{cases} v_n = \sum\limits_{j=1}^{n-1} \sum\limits_{t=1}^{\bar{t}} \frac{|IC_j^t|}{\prod\limits_{a=0}^{t} (1 + i_n^a)^{t_a}} \\ \sum\limits_{i=1}^{n} v_i = \sum\limits_{j=n+1}^{n+m} v_j, \end{cases}$$

где IC_j^t — денежный отток j-го инвестиционного проекта в t-м периоде; t — количество периодов в горизонте расчета; i_n^a — ставка дисконтирования ликвидного безрискового актива в a-м периоде; t_a — длительность a-го периода;

- моделирование инвестиционного портфеля заданного состава и расчет частных критериев качества портфеля: $\{U_i(x)\}$, $i = 1, ..., \bar{u}$;
- определение полезности портфеля (значений целевой функции в зависимости от состава портфеля инвестиций):

$$F(x) = U^*[U(v)].$$

Оптимизация на множестве допустимых значений

Начальной точкой для построения траектории оптимизации на множестве допустимых значений является точка $\tilde{v}_{0,i} \in X^{n-1}$. Сконструируем целевую оптимизируемую функцию, которая:

а) позволит отказаться от вычисления значения целевой функции $F(Q^{-1}(v))$ за пределами множества X^{n-1};

б) будет выпуклой при условии выпуклости исходной целевой функции $F(Q^{-1}(x))$ и ограничений задачи (1)—(5).

В качестве штрафной функции будем пользоваться функцией (6). Тогда следующая конструкция обеспечивает выполнение условий а) и б):

$$\tilde{F}(v) = \begin{cases} -F(Q^{-1}(v)), & v \in X^{n-1} \\ -F(Q^{-1}(v)) + P(Q^{-1}(v)), & v \notin X^{n-1}. \end{cases} \quad (7)$$

Очевидно, что решение задачи $\tilde{v}^* = \arg \min\limits_{v \in X^{n-1}} \tilde{F}(v)$ будет тождественным решению исходной задачи $v^* = Q^{-1}(\tilde{v}^*) = \arg\min\limits_{v \in X}(-F(v))$ в силу выражения (7).

Ранжирование полученных решений

После решения задач оптимизации из различных начальных точек формируется множество решений

$$\tilde{V}_{\text{opt}} = \{\tilde{v}_{\text{opt}.i} | \tilde{v}_{\text{opt}.i} = \arg \max\limits_{v \in X^{n-1}} F(Q^{-1}(v)),$$
$$i = 1, ..., \bar{i}\}.$$

В случае сложного характера функции, например, при ярко выраженной овражности, останов алгоритма оптимизации может происходить до достижения оптимальной точки. В связи с этим представляется целесообразным выделение оптимального по Парето множества $\tilde{X}_P^* \subseteq \tilde{X}^*$ перед ранжированием [5].

Ранжировать альтернативы $\tilde{v}_{\text{opt}.\,i}$, $i = 1, ..., \bar{i}$ по значению целевой функции $F(Q^{-1}(v))$ можно в режиме диалога с инвестором-ЛПР. В процессе диалога ЛПР по специальной процедуре предъявляются значения частных критериев качества, рассчитанные для каждого из решений.

Отметим, что диалоговые методы накладывают ряд требований, которым ЛПР должно удовлетворять:

— компетентность ЛПР в предметной области;

— объективность — на каждом шаге диалога ЛПР должно давать оценку качества каждого решения, объективно отражающую соответствие решения его целям и предпочтениям;

— точность, под которой понимается способность ЛПР сравнивать решения — оценки качества неэквивалентных решений должны различаться на величину, превышающую погрешность оценки ЛПР;

— последовательность (транзитивность) — ЛПР должно быть последовательно в своих решениях.

В соответствии со своими знаниями, предположениями и предпочтениями ЛПР анализирует предоставленную информацию и выбирает наилучшее решение. На этом процесс решения поставленной задачи (1)—(5) заканчивается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье изложена процедура решения задачи оптимизации финансового портфеля, предложен ряд приемов, позволяющих снизить размерность решаемой задачи оптимизации, ее вычислительную сложность, рассмотрены вопросы практического применения предлагаемого метода.

Не все компоненты портфеля инвестиций могут обладать неограниченной делимостью. Для обработки аргументов с дискретным множеством допустимых значений возможно решение задачи оптимизации для каждого из уровней каждой переменной с дискретным множеством значений. Фиксируя значение переменной, можно снизить размерность решаемой задачи оптимизации за счет увеличения числа ограничений типа равенств.

Создание эффективных методов оптимизации для решения задач смешанного типа (часть переменных принимает непрерывное, а часть — дискретное множество допустимых значений) — одно из наиболее важных и перспективных направлений дальнейшего развития методов решения задач оптимизации в предложенной постановке (1)—(5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыков А. С., Исходжанов Р. Р.* Многокритериальная модель оптимизации портфеля инвестиций // Тр. III междунар. конф. "Идентификация систем и задачи управления" SICPRO'2004. — М.: Ин-т пробл. управл., 2004.
2. *Рыков А. С.* Методы системного анализа: оптимизация. — М.: НПО «Издательство "Экономика"», 1999. — 255 с.
3. *Рыков А. С.* Поисковая оптимизация. Методы деформируемых конфигураций. — М.: Наука, 1993. — 216 с.
4. *Рыков А. С., Лановец В. В., Матвиенко М. Ю.* Система конструирования и исследования алгоритмов деформируемых конфигураций // Тр. междунар. конф. "Идентификация систем и задачи управления" SICPRO'2000. — М.: Ин-т пробл. управл., 2000.
5. *Ларичев О. И.* Теория и методы принятия решений. — М.: Логос, 2000. 296 с.

☎ *(095) 236-41-03*

E-mail: alexrykov@mail333.com

E-mail: rashidri@hotmail.com ❑