

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО СТЕПЕНИ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ПРИ ПРОПОРЦИОНАЛЬНО-ИНТЕГРАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ

А.М. Шубладзе⁽¹⁾, В.Е. Попадько⁽²⁾, С.И. Кузнецов⁽³⁾, А.А. Якушева⁽²⁾

⁽¹⁾ *Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва;*

⁽²⁾ *Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина, г. Москва;*

⁽³⁾ *ОАО «НИИТеплоприбор», г. Москва*

Исследованы оптимальные по степени устойчивости решения при ПИ-управлении динамическими системами, характеризующимися передаточными функциями с полиномом нулевой степени в числителе. Показано, что существует семь случаев достижения в системах управления максимальной степени устойчивости. Для каждого из этих случаев сформулированы достаточные условия оптимальности. Построены годографы замкнутых систем управления, для которых выполняются либо только необходимые условия оптимальности, либо достаточные. Вид построенных годографов оптимальных систем наглядно отражает геометрический смысл полученных решений.

ВВЕДЕНИЕ

Работа продолжает цикл статей, связанных с исследованием систем управления максимальной степени устойчивости. Синтезированные по этому критерию системы управления отличаются от других систем сравнительно высоким быстродействием и грубостью, робастностью к изменениям параметров объекта управления, так как наиболее «медленные», крайние правые корни характеристических полиномов таких систем максимально удалены от мнимой оси.

Один из возможных способов синтеза систем максимальной степени устойчивости основан на применении метода D -разбиения, предложенного Ю.И. Неймарком [1, 2] и развитого в работах Б.Т. Поляка, П.С. Щербакова, Е.Н. Грязиной [3, 4] и др. В случае ПИ-закона управления объектом с полиномом нулевой степени в числителе его передаточной функции указанный метод позволяет с помощью итерационных процедур сравнительно просто определить значение максимальной степени устойчивости и соответствующие ей настроечные параметры регулятора.

Однако во многих случаях бывает полезным иметь не только указанную информацию, но и значения крайних правых корней характеристического полинома замкнутой системы, действительные части которых и определяют значение максимальной степени устойчивости. Необходимость в знании этих корней может возникнуть, например, когда возникает задача построения быстродействующих следящих ПИ-систем управления. Введя на вход следящей системы динамический фильтр, полином числителя передаточной функции которого совпадает с полиномом, составленным из известных крайних правых корней характеристического полинома замкнутой системы, будем иметь реакцию на изменяющееся входное воздействие, определяемую только «быстрыми» корнями полинома, расположенными левее значения степени устойчивости.

Получить информацию как о значении максимальной степени устойчивости и настроечных оптимальных коэффициентах ПИ-регулятора, так и об оптимальных корнях можно, используя годограф Михайлова и итерационную процедуру сдвига мнимой оси в левую полуплоскость корней до тех пор, пока годограф Михайлова не будет соответс-



твовать системе, находящейся на границе устойчивости, и никакими вариациями настроечных параметров регулятора систему нельзя сделать устойчивой. Как следует из работ [5, 6], при ПИ-управлении динамическим объектом в оптимальном по степени устойчивости случае крайними правыми корнями характеристического полинома системы могут быть не меньше трех и не больше шести корней.

В настоящей работе выполнено исследование каждого из возможных случаев распределения корней и представлены достаточные условия их оптимальности. Таких случаев семь. Отличаются они числом действительных и комплексно сопряженных пар крайних правых корней характеристических полиномов и видом частотного годографа Михайлова характеристического полинома в комплексной плоскости, мнимая ось которой проходит через эти крайние правые корни.

Полученные оптимальные решения будут сформулированы в виде условий на коэффициенты оптимального полинома, определители Гурвица этого полинома и поведение годографа в окрестности точек пересечения им начала координат.

Задача исследования систем максимальной степени устойчивости будет решаться для ПИ-управления, при котором связь между выходным сигналом объекта и управляющим сигналом определяется дифференциальным уравнением

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^n a_i x^{(i-1)}(t) = k_0 u(t), \quad (1)$$

где $x^{(i)}(t)$, $i = 0, \dots, n$, $n \geq 3$ — фазовые координаты, a_i и k_0 — параметры, $u(t)$ — ПИ-управление:

$$u(t) = u_{\text{ПИ}}(t) = k_{\text{П}} \varepsilon(t) + k_{\text{И}} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau, \quad (2)$$

$\varepsilon(t) = g(t) - x(t)$, $g(t)$ — задающее воздействие.

Оптимизируемыми являются параметры $k_{\text{П}}$ и $k_{\text{И}}$. Указанные параметры выбираются так, чтобы имела место максимальная степень устойчивости [6]

$$I_{\text{оп}} = -\min \max \operatorname{Re} \lambda_j(k_{\text{П}}, k_{\text{И}}), \quad (3)$$

где λ_j — корни характеристического полинома

$$D_{n+1}(\lambda) = \lambda^{n+1} + \sum_{i=1}^n a_i \lambda^i + k_0(k_{\text{П}} \lambda + k_{\text{И}}). \quad (4)$$

После замены λ на $\lambda_1 - I_{\text{оп}}$ при $k_{\text{П}} = k_{\text{Поп}}$ и $k_{\text{И}} = k_{\text{Иоп}}$ в выражении (4) характеристический полином принимает вид [6]:

$$\begin{aligned} & D_{1(n+1)}(\lambda_1, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}) = \\ & = \lambda_1^{n_g} \prod_{i=1}^{n_{k1}} (\lambda_1^2 + \omega_i^2)^{\gamma_i} D_{1[(n+1)-n_g-2n_{k1}]}(\lambda_1) = \\ & = \lambda_1^{n+1} + \sum_{i=3}^n a_i^* \lambda_1^{i-1} + \sum_{i=1}^2 a_i^*(k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}) \lambda_1^{i-1}, \quad (5) \end{aligned}$$

где

$$a_i^* = \frac{1}{(i-1)!} \frac{\partial^{i-1} D_{(n+1)}(\lambda, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}})}{\partial \lambda^{i-1}} \quad \text{при } \lambda = -I_{\text{оп}}, \quad (6)$$

$D_{1[n+1-n_g-2n_{k1}]}(\lambda_1)$ — полином, не имеющий корней в правой полуплоскости, n_g и γ_i — кратности нулевого корня и комплексно сопряженных пар корней оптимального решения, расположенных на мнимой оси. Число пар комплексно сопряженных корней определяется равенством

$$n_k = \sum_{i=1}^{n_{k1}} \gamma_i.$$

Рассматриваемую задачу исследования оптимальных решений будем решать на основе результатов, полученных в работах [6, 7], с помощью машинных методов оценивания устойчивости систем управления. При этом нам понадобится следующий модифицированный годограф Михайлова из работы [6] характеристического полинома (5), в котором $\lambda_1 = i\omega$, $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} Z_{n0}(i\omega) &= \operatorname{Re} D_{1(n+1)}(i\omega) + i\omega^{-1} \operatorname{Im} D_{1(n+1)}(i\omega) = \\ &= \operatorname{Re}_0(\omega^2) + i \operatorname{Im}_0(\omega^2). \quad (7) \end{aligned}$$

Как и обычный модифицированный годограф (7) будет соответствовать устойчивому полиному (5) (полиному с корнями в левой полуплоскости), если при увеличении частоты ω от нуля до бесконечности годограф последовательно проходит против часовой стрелки в $n + 1$ квадрант.

Как уже отмечалось, при ПИ-управлении в системе (1), (2) может иметь место одно из семи оптимальных решений, при которых крайними корнями характеристического полинома (4) может быть от трех до шести корней, ближайших к мнимой оси и имеющих одинаковое до нее расстояние. Исследуем каждое из них.

1. СЛУЧАЙ 1: ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ КОРНИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

В этом случае имеют место условия

$$n_g = 3, \quad n_k = 0 \quad (8)$$

при которых крайним правым корнем полиномов (4) и (5) является один действительный корень кратности 3. Согласно работе [4] условия (8) могут выполняться только при

$$\begin{aligned} a_i^*(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}) &= 0, \\ \Delta_j^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}) &> 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $1 < j < n - 2$, $i = 1, 2, 3$, a_i^* определяются выражением (6), $\Delta_j^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}})$ — определители Гурвица полинома (5). При выполнении условий (9) достаточность условия оптимальности следует из того, что значение крайнего правого корня полинома (5) равно значению крайнего правого корня его второй производной, т. е. $\max \operatorname{Re} \lambda_{1i}(k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}) = \max \operatorname{Re} \lambda_{1i,2}$, $i = 1, \dots, n$, где λ_{1i} — корни уравнения $D_{1n}(\lambda_1, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}) = 0$, а $\lambda_{1i,2}$ — корни второй производной полинома (5)

$$\frac{\partial^2 D_{1(n+1)}(\lambda_1, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}})}{\partial \lambda_1^2} = 0.$$

Любой выбор значений $k_{\text{Поп}}$ и $k_{\text{Иоп}}$ в управлении (2), не удовлетворяющий условиям (9), приводит к уменьшению степени устойчивости $I_{\text{оп}}$ (3), так как при этом в полиноме (5) $a_3^*(I_{\text{оп}}) = 0$, $a_i^*(I_{\text{оп}}, k_{\text{П}}, k_{\text{И}}) \neq 0$ хотя бы для одного a_i^* , $i = 1, 2$, что и нарушает необходимое условие устойчивости полинома (5).

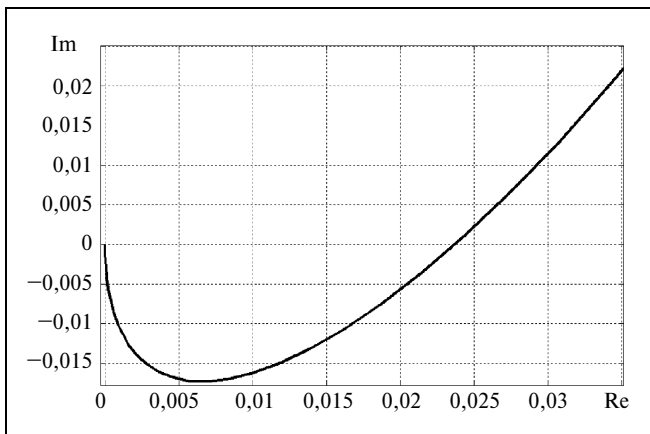


Рис. 1. Годограф оптимальной системы для случая 1

Как следует из выражений (5) и (9), минимальная степень при ω в $\operatorname{Re}_0(\omega^2)$ — см. формулу (7) — равна четырем, а в $\operatorname{Im}_0(\omega^2)$ — двум, поэтому годограф (7) в рассматриваемом случае имеет вид, изображенный на рис. 1.

Он получен для полинома (5), в котором

$$\begin{aligned} D_{1[n+1-2n_g-2n_k]}(\lambda_1) &= D_{1[6]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^6, \\ n &= 8, \quad n_g = 3, \quad n_k = 0. \end{aligned}$$

Из рис. 1 следует, что любое изменение значений $k_{\text{Поп}}$ или $k_{\text{Иоп}}$ приводит к появлению корней полинома (5) в правой полуплоскости, т. е. к уменьшению степени устойчивости I системы (1), (2). Таким образом, вычисленные по формулам (6) и (9) значения $k_{\text{Поп}}$ и $k_{\text{Иоп}}$ гарантируют в рассматриваемом случае максимальную степень устойчивости системы (1), (2).

2. СЛУЧАЙ 2: ДВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ КОРНЯ И ОДНА КОМПЛЕКСНО СОПРЯЖЕННАЯ ПАРА КОРНЕЙ

В этом случае имеют место условия

$$n_g = 2, \quad n_k = 1, \quad \gamma_1 = 1, \quad (10)$$

при которых крайними правыми корнями полиномов (4) и (5) являются один действительный корень кратности 2 и одна комплексно сопряженная пара корней. Согласно работе [6] условия (10) могут выполняться только при

$$\begin{aligned} a_i^*(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}) &= 0, \quad \Delta_{n-2}^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}), \\ \Delta_j^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}) &> 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где $1 < j < n - 3$, a_i^* определяются выражением (6), $i = 1, 2$, $\Delta_j^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}})$ — определители Гурвица размерности $1 < j < n - 2$ полинома (5). Три уравнения, из которых находятся значения $I_{\text{оп}}$, $k_{\text{Поп}}$ и $k_{\text{Иоп}}$, и $(n - 3)$ неравенства (11) являются необходимыми условиями максимальной степени устойчивости системы (1), (2). Подтверждением этому служит годограф (7), изображенный на рис. 2 и полученный решением уравнений (11). Такой годограф не соответствует системе максимальной степени устойчивости, так как перемещением путем вариации параметров $k_{\text{П}}$ и $k_{\text{И}}$ начала координат комплексной плоскости λ_1 в любую точку области A получаем годограф (7), соответствующий устойчивой системе. Поэтому степень устойчивости (3) системы (2) в рассматриваемом случае может быть увеличена.

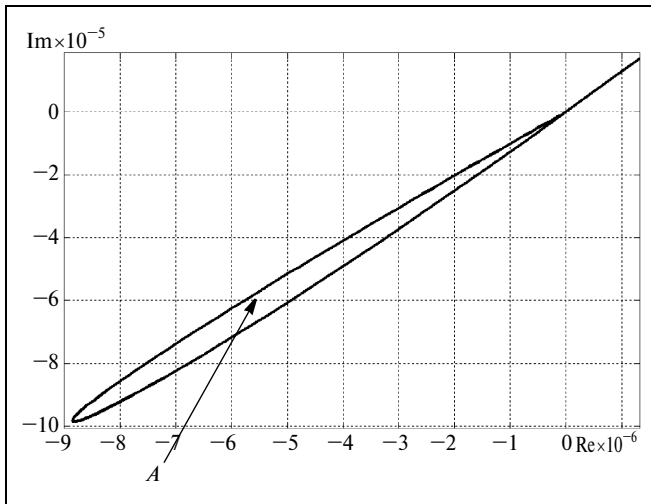


Рис. 2. Годограф не оптимальной системы для случая 2

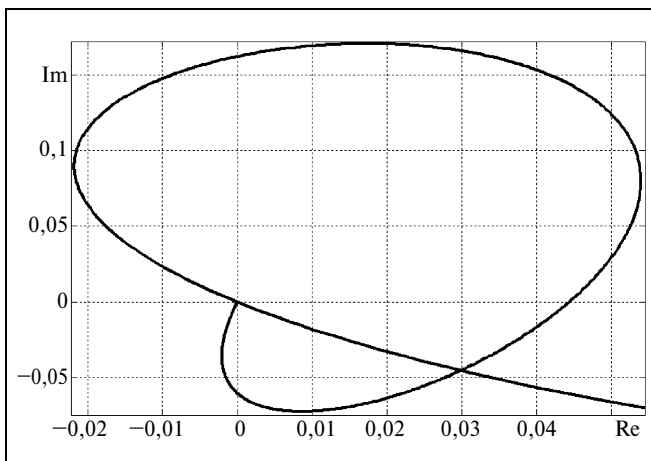


Рис. 3. Годограф оптимальной системы для случая 2

Годограф, представленный на рис. 2, получен для полинома (5), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[6]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^6, \\ n = 8, n_g = 2, n_k = 1, \gamma_1 = 1, \omega_1 = 0,08.$$

Для получения достаточных условий оптимальности нужно к условиям (11) добавить условие на направления годографа в точках пересечения им начала координат:

$$\langle (\text{Im}_1(0), -\text{Re}_1(0)), (\text{Re}_1(\omega_1^2), \text{Im}_1(\omega_1^2)) \rangle < 0, \quad (12)$$

где $\text{Re}_1(\omega^2) = \frac{\partial \text{Re} D_{1(n+1)}(i\omega)}{\partial (\omega^2)},$

$$\text{Im}_1(\omega^2) = \frac{\partial (\omega^{-1} \text{Im} D_{1(n+1)}(i\omega))}{\partial (\omega^2)}, (\text{Im}_1(0), -\text{Re}_1(0)) -$$

вектор, перпендикулярный направлению годографа $Z_{n0}(i\omega)$ при $\omega = 0, (\text{Re}_1(\omega_1^2), \text{Im}_1(\omega_1^2)) -$ вектор, перпендикулярный направлению годографа $Z_{n0}(i\omega)$ при $\omega = \omega_1.$

Из рис. 2 следует, что для годографа условие (12) не выполняется.

Покажем, что условия (11) и (12) в рассматриваемом случае являются достаточными условиями оптимальности (3). Как следует из условий (11), на мнимой оси плоскости λ_1 расположены нулевой корень кратности 2 и одна чисто мнимая комплексно сопряженная пара корней, остальные корни лежат левее мнимой оси. Для того, чтобы два нулевых корня изменением значений $k_{\text{П}}$ и $k_{\text{И}}$ сдвинуть влево и чтобы при этом не появилась новая чисто мнимая комплексно сопряженная пара корней, необходимо начало координат плоскости λ_1 поместить в область между частью годографа, проведенного до первого пересечения им мнимой оси, и самой мнимой осью. На рис. 2 это область $A,$ где точкой пересечения является начало координат. Нетрудно заметить, что при выполнении условий (12) годограф $Z_{n0}(i\omega)$ (7) в окрестности частоты $\omega = \omega_1$ не попадает в оговоренную выше область. Поэтому любое перемещение корней влево приводит к сдвигу комплексно сопряженной пары чисто мнимых корней вправо. Следовательно, сдвинуть путем изменения значений $k_{\text{П}}$ и $k_{\text{И}}$ все рассматриваемые корни влево при выполнении условия (12) невозможно. Из этого следует, что условия (11) и (12) являются достаточными условиями оптимальности в случае 2.

На рис. 3 изображен годограф (7), соответствующий оптимальному по степени устойчивости решению и удовлетворяющий условиям (11) и (12).

Он получен для полинома (5), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[6]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^6, \\ n = 9, n_g = 2, n_k = 1, \gamma_1 = 1, \omega_1 = 0,6.$$

Из рис. 3 следует, любое изменение значений $k_{\text{Поп}}$ или $k_{\text{Иоп}}$ приводит к неустойчивости полинома (5). Таким образом, выполнение условий (11) и (12) обеспечивает в рассматриваемом случае максимальную степень устойчивости системы (1), (2).

3. СЛУЧАЙ 3: ОДИН ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ КОРЕНЬ И ОДНА КОМПЛЕКСНО СОПРЯЖЕННАЯ ПАРА КОРНЕЙ

В этом случае имеют место условия

$$n_g = 1, n_k = 1, \gamma_1 = 1, \quad (13)$$

при которых крайними правыми корнями полиномов (4) и (5) являются один действительный корень и одна комплексно сопряженная пара корней. Согласно работе [6] условия (13) могут выполняться только при

$$a_i^*(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}) = 0, \quad \Delta_{n-1}^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}) = 0, \\ \Delta_j^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}}) > 0, \quad (14)$$

где $1 < j < n - 2$, a_i^* — определяется выражением (6), $\Delta_j^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}})$ — определители Гурвица размерности $1 < j < n - 1$ полинома (5). Двух уравнений (14) недостаточно для нахождения трех неизвестных $I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}$ и $k_{\text{Иоп}}$. Третье недостающее уравнение может быть получено из соображений о невозможности изменения только значения $k_{\text{Поп}}$ в управлении (2) невозможно увеличить степень устойчивости системы (1), (2). В рассматриваемом случае такая ситуация будет, когда годограф (7) полинома (5) касается в начале координат мнимой оси. Такой факт имеет место при выполнении условия $\text{Re}_1(\omega_1^2) = 0$ из которого следует, что полином

$$D_{1n_1}(\omega^2) = \text{Im}_0(\omega^2) + i\omega\text{Re}_1(\omega^2), \quad (15)$$

где $n_1 = 2[(n + 1)/2] - 1$, $[\cdot]$ — целая часть числа, имеет ту же комплексно сопряженную пару корней, что и исходный полином (5). Поэтому в оптимальном случае справедливо уравнение

$$\Delta_{n_1-1}^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}) = 0, \quad (16)$$

где $\Delta_{n_1-1}^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}})$ — определитель Гурвица размерности $n_1 - 1$ полинома (15).

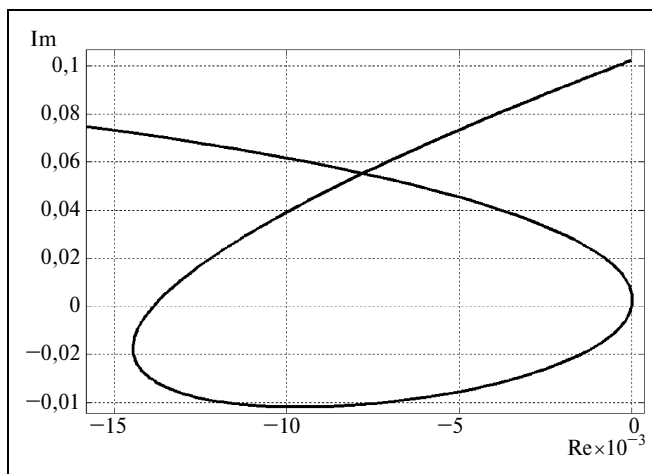


Рис. 4. Годограф неоптимальной системы для случая 3

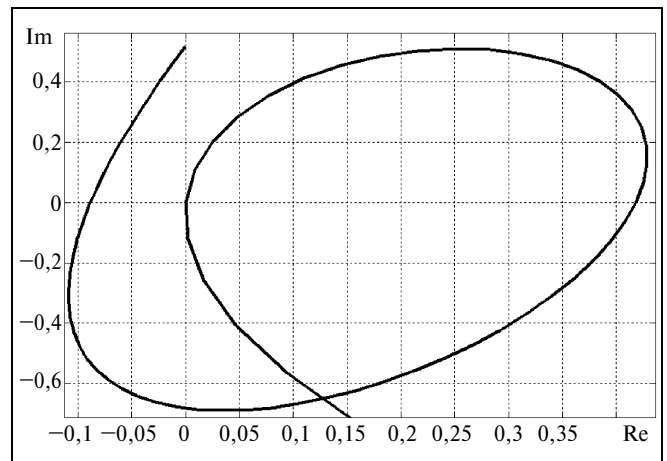


Рис. 5. Годограф оптимальной системы для случая 3

Из условий (14) и (16) можно определить три неизвестных параметра $I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}$ и $k_{\text{Иоп}}$. Но условия (14) и (16), как и в предыдущем случае условий (11), являются необходимыми условиями оптимальности. Подтверждается это годографом (7) полинома (5), изображенным на рис. 4, для которого условия (14) и (16) выполнены, но очевидно, что увеличением параметров $k_{\text{П}}$ и $k_{\text{И}}$ полином (6) может быть сделан устойчивым.

Годограф рис. 4 получен для полинома (5), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[6]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^6, \\ n = 8, \quad n_g = 1, \quad n_k = 1, \quad \gamma_1 = 1, \quad \omega_1 = 0,32.$$

Достаточные условия оптимальности можно получить добавлением к условиям (14) и (16) условия на направления годографа в точке пересечения им на частоте ω_1 начала координат. Это направление должно быть противоположно направлению мнимой оси, что имеет место при выполнении неравенства

$$\text{Im}_1(\omega_1^2) < 0, \quad (17)$$

где функция $\text{Im}_1(\omega^2)$ определена выражением (12).

Условия (14), (16) и (17) являются достаточными условиями оптимальности в рассматриваемом случае. На рис. 5 изображен годограф (7), соответствующий оптимальному по степени устойчивости решению и удовлетворяющий условиям (14), (16) и (17).

Он получен для полинома (5), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[6]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^6, \\ n = 8, \quad n_g = 1, \quad n_k = 1, \quad \omega_1 = 0,72.$$



**4. СЛУЧАЙ 4:
ОДИН ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ КОРЕНЬ
И ДВЕ ПАРЫ КОМПЛЕКСНО СОПРЯЖЕННЫХ КОРНЕЙ**

В этом случае имеют место условия

$$n_g = 1, \quad n_k = 2, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 2, \quad (18)$$

при которых крайними правыми корнями полиномов (4) и (5) являются один действительный корень и две комплексно сопряженные пары корней. Согласно работе [6] условия (18) могут выполняться только при

$$\begin{aligned} a_i^*(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}) &= 0, \\ \Delta_{n-3}^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}) &= \Delta_{n-3}^{(1)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}) = 0, \\ \Delta_j^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}) &> 0, \end{aligned} \quad (19)$$

где $1 < j < n - 4$, a_i^* определяется выражением (6), $\Delta_{n-3}^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп})$, $\Delta_{n-3}^{(1)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп})$ — основной и побочный определители Гурвица полинома (5), описанные в книге [7]. Три уравнения, из которых находятся $I_{оп}$, $k_{Поп}$ и $k_{Иоп}$ и $(n - 4)$ неравенства в условиях (19) являются, как и в рассмотренных случаях 2 и 3, необходимыми условиями максимальной степени устойчивости системы (1), (2). На рис. 6 изображен годограф полинома (5), построенного из условий (19), но который не является годографом оптимальной системы. Очевидно, что увеличением $k_{Поп}$ и уменьшением $k_{Иоп}$ полином (5) может быть сделан устойчивым.

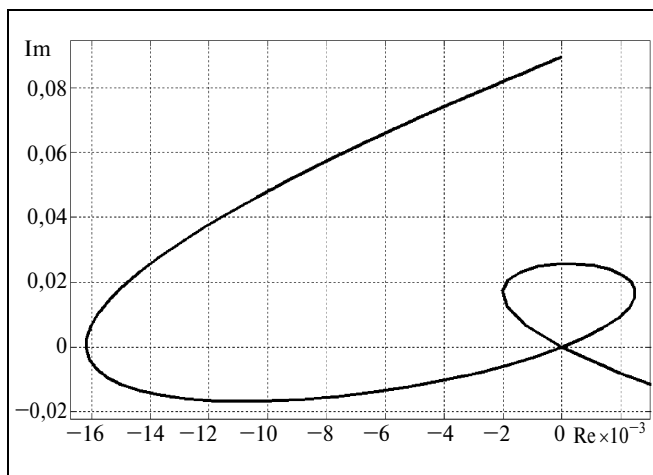


Рис. 6. Годограф неоптимальной системы для случая 4

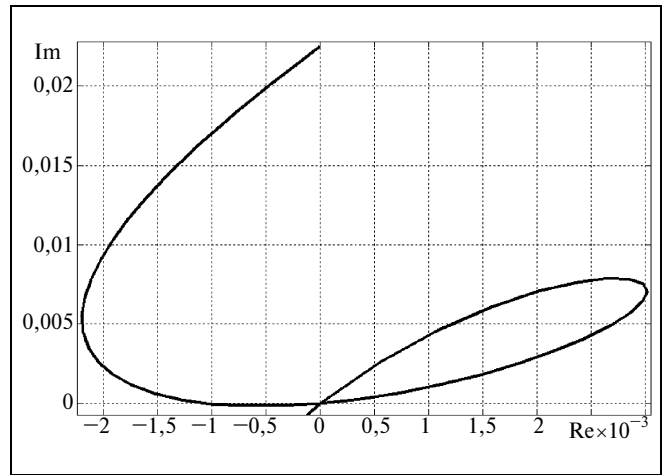


Рис. 7. Годограф оптимальной системы для случая 4

Годограф получен для полинома (5), в котором $D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[6]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^6$, $n = 10$, $n_g = 1$, $n_k = 2$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\omega_1 = 0,46$, $\omega_2 = 0,65$.

Оптимальность такой системы имеет место при выполнении следующих неравенств:

$$\operatorname{Re}_1(\omega_1^2) > 0, \quad \operatorname{Re}_1(\omega_2^2) < 0,$$

$$\operatorname{Re}_1(\omega_1^2) < 0, \quad \operatorname{Re}_1(\omega_2^2) < 0,$$

где $\omega_1 < \omega_2$ — частоты, на которых годограф пересекает начало координат, функция $\operatorname{Re}_1(\omega^2)$ определена при рассмотрении случая 2. На рис. 7 изображен годограф полинома (5) оптимальной системы. Он получен для полинома (5), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[6]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^6, \quad n = 10, \quad n_g = 1, \quad n_k = 2, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 1, \quad \omega_1 = 0,3, \quad \omega_2 = 0,5.$$

**5. СЛУЧАЙ 5:
ДВЕ ПАРЫ КОМПЛЕКСНО СОПРЯЖЕННЫХ КОРНЕЙ**

В этом случае справедливы условия

$$n_k = 2, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 2, \quad (20)$$

при которых крайними правыми корнями полиномов (5) и (6) являются две комплексно сопряженные пары корней. Условия (20) могут выполняться только при

$$\begin{aligned} \Delta_{n-2}^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}) &= \Delta_{n-2}^{(1)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}) = 0, \\ \Delta_j^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}) &> 0, \end{aligned} \quad (21)$$

где $1 < j < n - 3$, $\Delta_{n-3}^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}})$, $\Delta_{n-3}^{(1)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, k_{\text{Иоп}})$ — основной и побочный определители Гурвица. Из двух уравнений (21) невозможно найти три параметра $I_{\text{оп}}$, $k_{\text{Поп}}$ и $k_{\text{Иоп}}$. Для получения необходимого третьего уравнения воспользуемся результатами работы [6], из которой следует, что при условиях (20) имеет место касание годографа в точках пересечения им начала координат на частотах ω_1 и ω_2 . Поэтому существует полином

$$S_{1v}(\omega^2) = v \operatorname{Re}_1(\omega^2) + \operatorname{Im}_1(\omega^2),$$

где v — тангенс угла наклона касательной, корням которого также являются $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_2$, в силу чего полином от $i\omega$

$$D_{n0v}(i\omega) = \operatorname{Im}_0(\omega^2) + i\omega S_{1v}(\omega^2), \quad n_0 = 2[n/2], \quad (22)$$

где $\operatorname{Im}_0(\omega^2)$ из выражения (7), имеет корни при тех же $\omega = \pm\omega_1$ и $\omega = \pm\omega_2$. В связи с этим оказываются справедливыми два следующих уравнения:

$$\Delta_{n_0-3,v}^{(0)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, v) = \Delta_{n_0-3,v}^{(1)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, v) = 0, \quad (23)$$

где $\Delta_{n_0-3,v}^{(i)}(I_{\text{оп}}, k_{\text{Поп}}, v)$, $i = 0, 1$ — основной и побочный определители Гурвица полинома (22).

Таким образом, мы имеем четыре уравнения (21) и (23) с четырьмя неизвестными $I_{\text{оп}}$, $k_{\text{Поп}}$, $k_{\text{Иоп}}$ и v . Как и в предыдущем случае, условия (21) и (23) являются необходимыми условиями максимальной степени устойчивости системы (1), (2). На

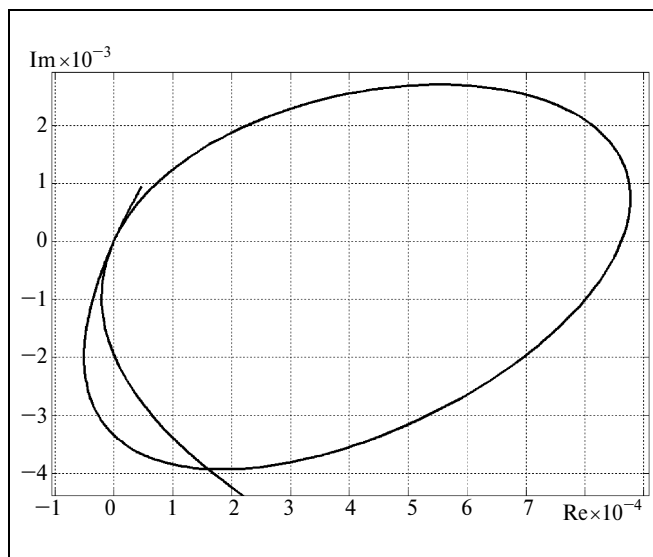


Рис. 8. Годограф неоптимальной системы для случая 5

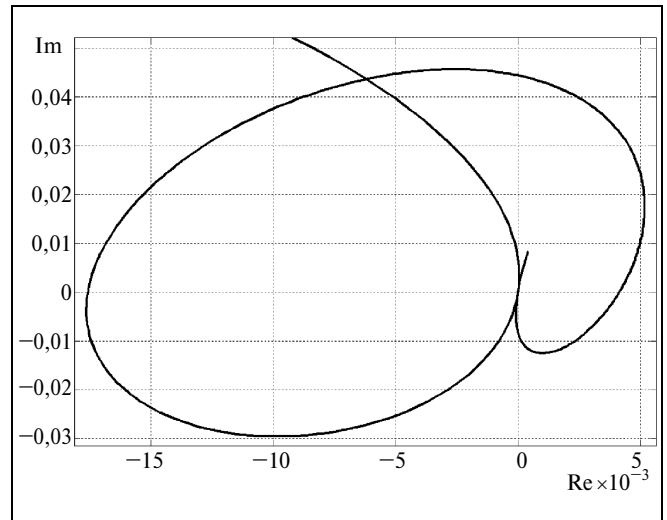


Рис. 9. Годограф оптимальной системы для случая 5

рис. 8 изображен годограф полинома (6), построенного из условий (21) и (23), но который не является годографом оптимальной системы. Он получен для полинома (5), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[6]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^6, \quad n = 9, \\ n_g = 0, \quad n_k = 2, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 1, \quad \omega_1 = 0,03, \quad \omega_2 = 0,23.$$

Для оптимальности такой системы достаточно выполнение следующего ограничения на скалярное произведение:

$$\langle (\operatorname{Re}_1(\omega_1^2), \operatorname{Im}_1(\omega_1^2)), (\operatorname{Re}_1(\omega_2^2), \operatorname{Im}_1(\omega_2^2)) \rangle < 0,$$

в котором функции $\operatorname{Re}_1(\omega^2)$ и $\operatorname{Im}_1(\omega^2)$ определены ранее (в условиях (12) и (17)), $(\operatorname{Re}_1(\omega_1^2), \operatorname{Im}_1(\omega_1^2))$ и $(\operatorname{Re}_1(\omega_2^2), \operatorname{Im}_1(\omega_2^2))$ — векторы направления годографа $Z_{n0}(i\omega)$ при $\omega = \omega_1$ и $\omega = \omega_2$ соответственно, ω_1 и ω_2 — частоты, на которых годограф (7) проходит через начало координат. На рис. 9 изображен годограф полинома (5) оптимальной системы. Любое изменение положения этого годографа в направлении касательного вектора путем вариаций значений $k_{\text{Поп}}$ и $k_{\text{Иоп}}$ приводит к переходу двух пар крайних правых корней в правую полуплоскость. Изменение в направлении, перпендикулярном этому вектору, приводит к переходу одной из пар в правую полуплоскость.

Годограф получен для полинома (5), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[6]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^6, \\ n = 9, \quad n_g = 0, \quad n_k = 2, \quad \omega_1 = 0,05, \quad \omega_2 = 0,41.$$



**6. СЛУЧАЙ 6:
ОДНА КРАТНАЯ ПАРА
КОМПЛЕКСНО СОПРЯЖЕННЫХ КОРНЕЙ**

В этом случае справедливы условия

$$n_k = 1, \quad \gamma_1 = 2, \quad (24)$$

при которых крайними правыми корнями полиномов (5) и (6) является кратная комплексно сопряженная пара корней. Условия (24) могут выполняться при

$$\begin{aligned} \Delta_{n-2}^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}) &= \Delta_{n-2}^{(1)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}) = 0, \\ \Delta_{n-2}^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}) &> 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где $1 < j < n - 3$, $\Delta_{n-2}^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп})$ и $\Delta_{n-2}^{(1)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп})$ — основной и побочный определители Гурвица. Для нахождения трех параметров $I_{оп}$, $k_{Поп}$ и $k_{Иоп}$, как и в работе [7], введем полином

$$D_{1(n-1)}^{(1)}(I_{оп}) = \text{Re}_1(\omega^2) + i\omega \text{Im}_1(\omega^2), \quad (26)$$

где функции $\text{Re}_1(\omega^2)$ и $\text{Im}_1(\omega^2)$ определены ранее. Полином (26) имеет корень на той же частоте, что и полином (5). Поэтому справедливо условие

$$\Delta_{1(n-2)}^{(0)}(I_{оп}) = 0, \quad (27)$$

где $\Delta_{1(n-2)}^{(0)}(I_{оп})$ — основной определитель Гурвица полинома (26). Трех уравнений (25) и (27) достаточно для определения параметров $I_{оп}$, $k_{Поп}$ и $k_{Иоп}$,

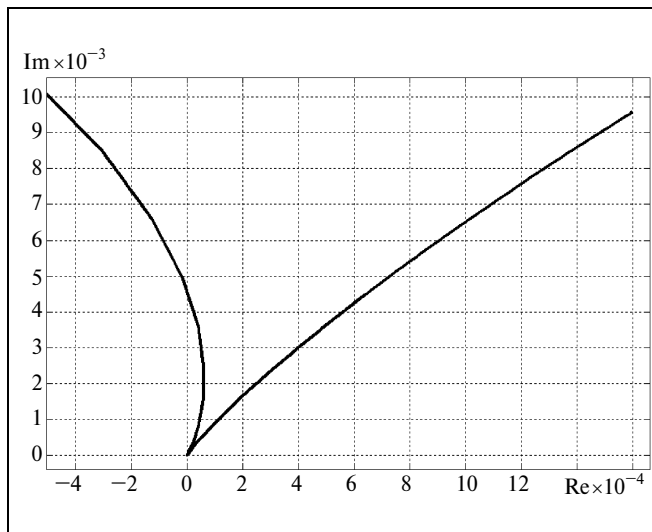


Рис. 10. Годограф оптимальной системы для случая 6

причем условия (25) и (27), как и в случае 1, являются достаточными условиями оптимальности. Вначале из уравнения (27) находится оптимальное значение степени устойчивости $I_{оп}$, затем из уравнений (25) — параметры $k_{Поп}$ и $k_{Иоп}$. На рис. 10 изображен годограф полинома (5) оптимальной системы. Он получен для полинома (5), в котором

$$\begin{aligned} D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) &= D_{1[6]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^6, \\ n &= 9, \quad n_g = 0, \quad n_k = 1, \quad \gamma_1 = 2, \quad \omega_1 = 0,2. \end{aligned}$$

**7. СЛУЧАЙ 7:
ТРИ ПАРЫ КОМПЛЕКСНО СОПРЯЖЕННЫХ КОРНЕЙ**

В этом случае справедливы условия

$$n_k = 3, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1, \quad (28)$$

при которых крайними правыми корнями полиномов (4) и (5) являются три пары комплексно-сопряженных корней. Условия (28) могут выполняться при

$$\begin{aligned} \Delta_{n-4}^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}) &= \Delta_{n-4}^{(1)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}) = \\ &= \Delta_{n-4}^{(2)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}) = 0, \\ \Delta_j^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}) &> 0, \end{aligned} \quad (29)$$

где $1 < j < n - 5$, $\Delta_{n-4}^{(0)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}) = \Delta_{n-4}^{(1)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп}) = \Delta_{n-4}^{(2)}(I_{оп}, k_{Поп}, k_{Иоп})$ — основной и побочные определители Гурвица. Условия (29) являются необходимыми условиями максимальной степени устойчивости системы (1), (2). На рис. 11 изображен годограф полинома (5), построенного при выполнении условий (29), но который не является годографом оптимальной системы.

Он получен для полинома (5), в котором

$$\begin{aligned} D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) &= D_{1[6]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^6, \\ n &= 11, \quad n_g = 0, \quad n_k = 3, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1, \\ \omega_1 &= 0,03, \quad \omega_2 = 0,15, \quad \omega_3 = 0,254. \end{aligned}$$

Для оптимальности системы (1), (2) достаточно выполнение следующих условий на скалярные произведения. Если $(\text{Re}_1(\omega_1^2), \text{Im}_1(\omega_1^2))$ — направление годографа (7) в точке пересечения начала координат на частоте ω_1 , $(\text{Re}_1(\omega_2^2), \text{Im}_1(\omega_2^2))$ — направление годографа на частоте ω_2 , $(\text{Re}_1(\omega_3^2), \text{Im}_1(\omega_3^2))$ — направление годографа на частоте ω_3 ,

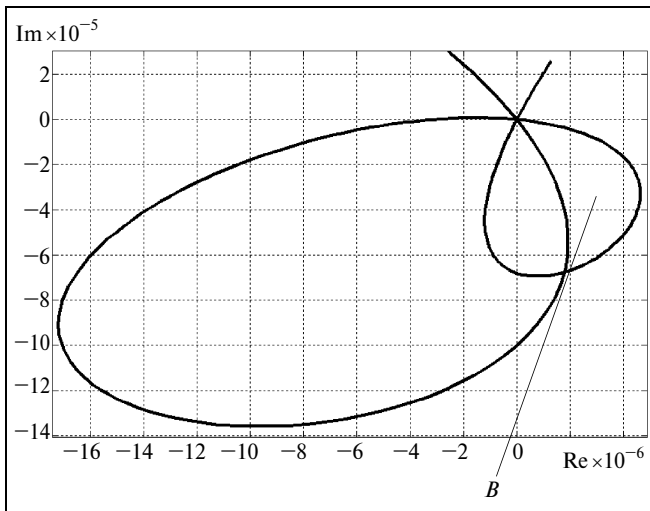


Рис. 11. Годограф неоптимальной системы для случая 7

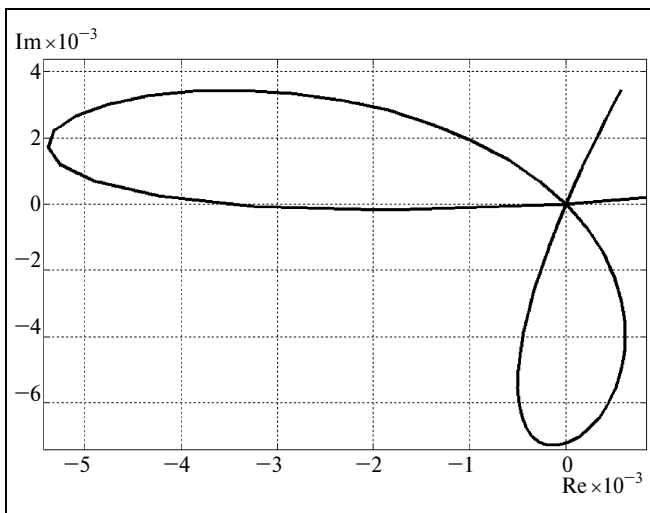


Рис. 12. Годограф оптимальной системы для случая 7

где $\text{Re}_1(\omega^2)$ и $\text{Im}_1(\omega^2)$ определяются выражением (15), то произведение скалярных произведений

$$\langle (-\text{Im}_1(\omega_1^2), \text{Re}_1(\omega_1^2)), (\text{Re}_1(\omega_2^2), \text{Im}_1(\omega_2^2)) \rangle \times \langle (-\text{Im}_1(\omega_1^2), \text{Re}_1(\omega_1^2)), (\text{Re}_1(\omega_3^2), \text{Im}_1(\omega_3^2)) \rangle < 0. \quad (30)$$

Доказательство оптимальности условий (29) и (30) основано на том, что при сдвиге путем изменения значений $k_{\text{Поп}}$ и $k_{\text{Иоп}}$ любых двух чисто мни-

мых комплексно сопряженных пар корней влево от мнимой оси плоскости λ_1 третья пара сдвигается вправо. При выполнении условия (38) отсутствует общая область устойчивости, аналогичная области B , которая была в случае, показанном на рис. 11.

На рис. 12 изображен годограф полинома (5) оптимальной системы. Он получен для полинома (5), в котором

$$D_{1[n+1-n_g-2n_k]}(\lambda_1) = D_{1[6]}(\lambda_1) = (\lambda_1 + 1)^6, \\ n = 11, \quad n_g = 0, \quad n_k = 3, \quad \gamma = 1, \\ \omega_1 = 0,1, \quad \omega_2 = 0,4, \quad \omega_3 = 0,8.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

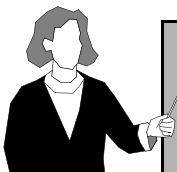
Исследованы все возможные семь случаев оптимальных по степени устойчивости решений при ПИ-законе управления и для каждого из них получены достаточные условия оптимальности. С помощью машинных методов расчета построены годографы замкнутых систем управления, для которых выполняются либо только необходимые условия оптимальности, либо достаточные. Вид построенных годографов оптимальных систем наглядно отражает геометрический смысл полученных решений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Неймарк Ю.И. Устойчивость линеаризованных систем — Л.: ЛКВВИА, 1949.
2. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. — М.: Наука, 1978.
3. Поляк Б.Т., Шербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002.
4. Грязина Е.Н. К теории D -разбиения // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 12. — С. 15–28.
5. Шубладзе А.М. Достаточные условия экстремума в системах максимальной степени устойчивости. I // Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 3. — С. 93–105.
6. Шубладзе А.М. Достаточные условия экстремума в системах максимальной степени устойчивости. II // Автоматика и телемеханика. — 1997. — № 8. — С. 67–79.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1967.

✉ (495) 334-88-81, e-mail: shub@ipu.ru

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Бутковским. □



Читайте в следующем номере статью

Цыганова В.В., Кадымова Д.С. Механизмы управления политико-экономическими системами