

# СИСТЕМА МОДЕЛИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ ПОДВИЖНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ НА БАЗЕ ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ МАТЛАВ

В.А. Кубышкин, В.С. Суховеров

*Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва*

Рассмотрены структура и состав компьютерной системы управления движением и мощностью подвижного источника нагрева. Представлены модели объекта и метод построения управления подвижным источником теплового воздействия. Описаны основные блоки системы и вариант ее исполнения в виде программного комплекса в среде MATLAB.

## ВВЕДЕНИЕ

Применение мощных электронно-лучевых и лазерных установок в технологических процессах привело к появлению систем управления с подвижными источниками воздействия на объект (плавка, сварка, термообработка, напыление пленок в вакууме). Подвижный источник обеспечивает создание определенного температурного поля для получения заданных свойств объекта. Теоретическая постановка задач подвижного управления для систем с распределенными параметрами была дана в работах [1, 2]. Технические решения систем управления электронными и лазерными лучами были реализованы с помощью аналоговых устройств. Эти устройства были довольно громоздкими, а технологии их применения достаточно сложными [3–5]. Управление движением луча также было несовершенным, поскольку закон движения луча отображался электронным осциллографом, имеющим ограниченные возможности, а изменение скорости на одном из участков движения луча приводило к изменению скорости на остальных участках, создавая дополнительные трудности управления температурным полем. В настоящее время чаще всего системы управления разрабатываются с помощью средств программирования на компьютерной базе и реализуются средствами цифровой техники. Такой подход позволяет проектировать и разрабатывать сложные системы в виде программ и программных комплексов, которые сравнительно легко изменять и

корректировать в ходе разработки. Окончательный вариант системы можно использовать в виде программного комплекса или, если необходимо, реализовать в автономном микропроцессорном устройстве управления. Цель данной работы состояла в создании программного средства, позволяющего, с одной стороны, моделировать объект и процесс его обработки для расчета программного управления подвижным источником, а с другой, управлять подвижным источником в реальной установке. Поэтому программное средство должно состоять из блока моделирования и блока управления.

В блок моделирования входят программные модули:

- моделирования процесса распространения тепла в объекте управления;
- расчета закона управления подвижным источником;
- моделирования излучения подвижного источника при выбранном законе управления (программа управления движением и мощностью источника);
- расчета температурного поля для выбранного управления;
- экранный интерфейс пользователя для интерактивной работы с программами блока моделирования.

В блок управления (в перспективе) входят программные модули:

- формирования управляющих сигналов для цифроаналоговых преобразователей (ЦАП), пропорциональных мощности и положению центра источника относительно объекта;



— автоматической коррекции мощности и скорости движения источника на каждом участке траектории, работающий по сигналу аналого-цифрового преобразователя (АЦП) сканирующего пирометра;

— экранный интерфейс пользователя для интерактивной работы с программами блока управления.

Отметим, что рассматриваемую систему управления подвижным источником можно применять для зонной очистки металлов, выплавки слитков в плоских кристаллизаторах, сварки электронным лучом линейного и кольцевого стыков, термических испытаний в электронно-лучевых установках и др.

## 1. ОБЩАЯ СХЕМА И ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

На рис. 1 показана схема системы управления подвижным источником энергии при выплавке слитков с помощью электронного луча в плоском кристаллизаторе. Электронный луч создается электронной пушкой. Его движение по поверхности расплавленного металла вдоль прямолинейной траектории управляется с помощью отклоняющей системы. Заготовка переплавляемого металла подается со скоростью  $V_{\text{мет}}$ . Попадая в зону действия электронного луча, металл расплавляется и стекает в кристаллизатор с охлаждаемыми стенками. В кристаллизаторе расплав затвердевает, и одновременно слиток вытягивается вниз со скоростью  $V_{\text{выт}}$ . Система управления формирует сигналы, управляющие мощностью электронного луча  $p(t)$  и его движением  $u(t)$ . Задача управления — в ходе технологического процесса получить заданное распределение температуры на поверхности

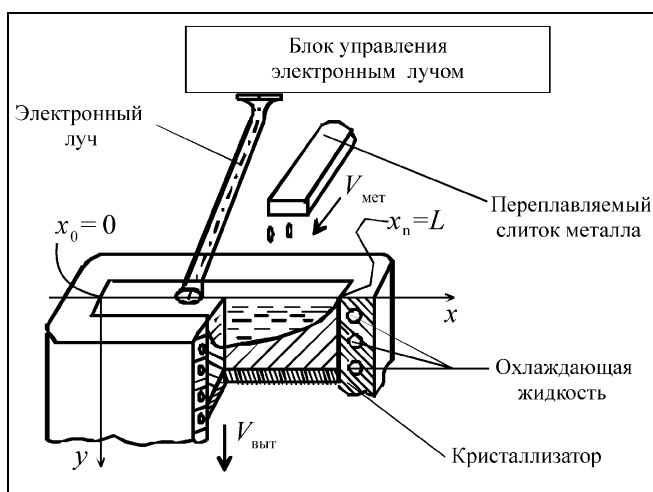


Рис. 1. Схема выплавки слитков в плоском кристаллизаторе

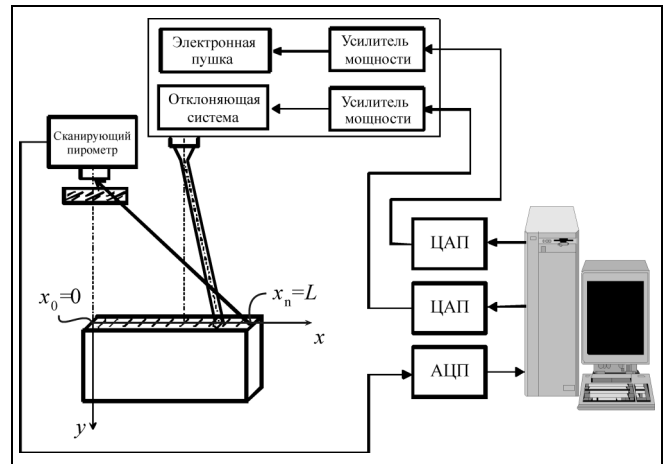


Рис. 2. Схема компьютерной системы управления подвижным источником

объекта и поддерживать его при наличии внешних возмущений. Во время работы центр источника тепла перемещается по прямолинейной траектории от ее начала, точки  $x_0 = 0$ , до конца, точки  $x_0 = L$ , и обратно. Такое движение называется циклическим или многоцикловым [6]. При этом интенсивность источника тепла можно изменять значительно медленнее прохождения центром источника отрезка  $[0, L]$ . Создание по длине объекта участков с различными заданными температурами достигается с помощью программного кусочно-непрерывного управления скоростью перемещения источника и изменения мощности источника. На рис. 2 показана принципиальная схема компьютерной системы управления подвижным источником энергии для установки, представленной на рис. 1. Отрезок  $[0, L]$  разбивается на  $n$  равных интервалов  $I_i = (x_{i-1}, x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Для каждого интервала  $I_i$  на модели рассчитываются скорость движения источника  $V_i(x)$ ,  $x \in I_i$ , соответствующий закон движения  $s(t)$  центра источника при заданном времени  $T$  прохождения отрезка  $[0, L]$  и требуемая мощность источника так, чтобы обеспечить заданное (чаще всего равномерное) распределение температуры на поверхности объекта. Сигнал с компьютера, изменяющийся пропорционально закону движения источника, через ЦАП поступает на усилитель мощности и далее на отклоняющую систему. Одновременно через второй ЦАП и соответствующий усилитель мощности на электронную пушку поступает сигнал, пропорциональный мощности источника тепла, необходимой для обеспечения заданного температурного поля. В случае отклонения на каком-либо участке температуры объекта от заданной (определяется визуально или по показаниям сканирующего пи-

рометра) корректируется скорость движения источника на этом участке, а при изменении интегральной температуры на отрезке  $[0, L]$  — мощность источника.

## 2. МОДЕЛИ ОБЪЕКТА И МЕТОД РАСЧЕТА ПРОГРАММНОГО РАСПРЕДЕЛЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Программное управление подвижным источником рассчитывается так, чтобы в установившемся режиме обеспечить в определенной области объекта состояние, близкое к заданному. Модель, используемая в системе, зависит от объекта управления. В данной системе используются одномерная по пространственным координатам модель и двумерная по пространственным координатам модель с управлением, действующим на границе.

Одномерная модель:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{a}{A} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{1}{c\rho S} F(x, t), \quad 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$\left[ \alpha Q \mp \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} = g_{0, L}, \quad Q(x, 0) = Q_0(x). \quad (2)$$

Двумерная модель:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}, \quad (x, y) \in (0, L) \times (0, H), \quad t > 0, \quad (3)$$

$$\left[ \alpha Q \mp \lambda \frac{\partial Q}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=L} = g_{0, L}, \quad (4)$$

$$\left[ -\lambda \frac{\partial Q}{\partial y} - \varepsilon \sigma^* (Q_c - Q)^4 \right]_{y=0} = F(x, t), \quad x \in (0, L), \quad (5)$$

$$Q(x, H, t) = Q_H, \quad Q(x, y, 0) = Q_0(x, y). \quad (6)$$

Здесь  $Q$  — температура объекта в точке  $x$  (или в точке  $(x, y)$  для двумерной модели) в момент  $t$ ;  $a = \lambda/c\rho$  — коэффициент температуропроводности объекта;  $\lambda$ ,  $c$  и  $\rho$  — соответственно коэффициент теплопроводности, теплоемкость и плотность материала;  $S$  — поперечное сечение одномерного объекта;  $Q_c$  — температура среды на границе  $y = 0$ ;  $Q_0$  — начальное температурное поле;  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи на границах  $x = 0$  и  $x = L$  объекта;  $\sigma^*$  — постоянная Стефана—Больцмана;  $0 \leq \varepsilon \leq 1$  — степень черноты поверхности;  $g_{0, L}$  и  $Q_H$  — заданные функции времени, определяющие теплоотвод с границ объектов,  $F(x, t)$  — подвижное воздействие вида

$$F(x, t) = p(t)\psi(x - s(t), \sigma), \quad t \geq 0, \quad (7)$$

где  $p(t)$  — закон изменения мощности подвижного источника тепла,  $s(t)$ ,  $0 \leq s(t) \leq L$ ,  $t > 0$  — закон движения центра источника тепла;  $\psi(x, \sigma)$  — функция, описывающая форму подвижного источника тепла. Параметр формы  $\sigma$  — число, определяющее степень концентрации подвижного источника тепла. В данной работе — это дисперсия, так как функция формы  $\psi(x, \sigma)$  задается в виде функции Гаусса:  $\psi(x, \sigma) = (1/2\pi\sigma)\exp((-1/2\sigma^2)x^2)$ .

Установившийся температурный режим в объекте наступает при достаточно длительном перемещении подвижного источника от точки  $x_0 = 0$  до точки  $x_n = L$  (см. рис. 2) и обратно по периодическому закону при постоянной мощности. Температурное поле в объекте в этом случае становится периодическим по времени. Для расчета периодического закона движения и мощности подвижного источника применяется метод подстановки и реализации [6].

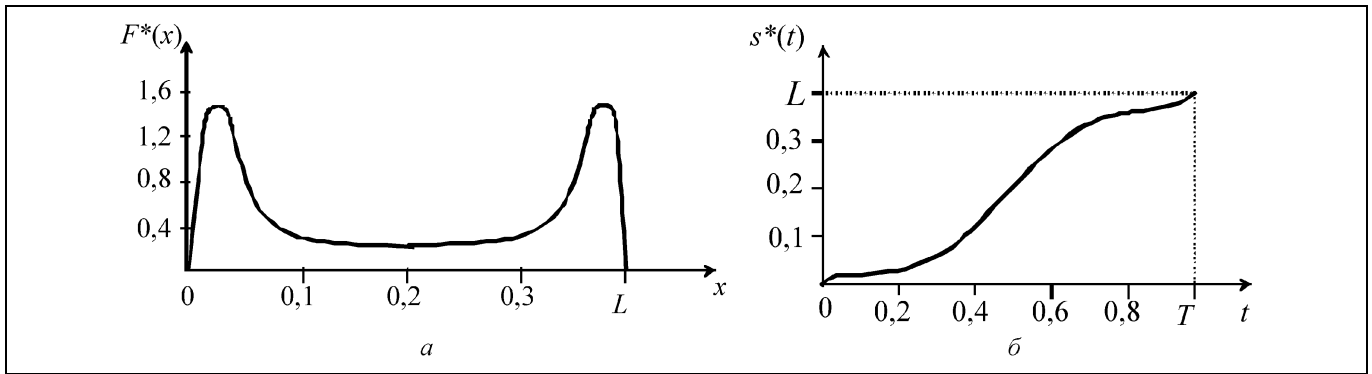
Метод реализации состоит в том, что подвижное управление источником заменяется распределенным управлением  $\bar{F}(x, t)$ , которое обеспечивает заданное температурное поле объекта. После этого определяются мощность и закон движения, которые реализуют найденное распределенное управление  $\bar{F}^*(x, t)$ .

В рассматриваемом случае требуется получить заданное температурное поле для установившегося режима, когда усредненное по времени температурное поле не изменяется во времени. Поэтому при расчетах в уравнениях (1) и (3) следует принять  $\partial Q/\partial t = 0$ , а подвижное управление  $F(x, t)$  в правых частях уравнений (1) и (5) заменить распределенным управлением  $\bar{F}(x)$ , не зависящим от времени.

Для расчета распределенного управления применяется метод подстановки [6]. Он состоит в том, что в уравнение объекта подставляется специально подобранная функция  $Q_A(x, t)$ , которая аппроксимирует с заданной точностью желаемое состояние объекта. Пусть  $Q^*(x) = Q^* = \text{const}$ ,  $0 \leq x \leq L$ . Тогда для одномерной модели аппроксимирующая функция для случая  $\lambda \gg \alpha$  и  $g_{0, L}(t) = 0$  в уравнении (2) записывается в виде:

$$Q_A(x) = \begin{cases} -k(x - \beta)^2 + Q^*, & x \in [0, \beta], \\ Q^*, & x \in [\beta, L - \beta], \\ -k(x - (L - \beta))^2 + Q^*, & x \in [L - \beta, L], \end{cases}$$

где  $k = Q^*/\beta^2$ ,  $[0, \beta]$  и  $[(L - \beta), L]$  — отрезки, на которых производится согласование аппроксимирующей функции с граничными условиями при помощи квадратичной аппроксимации. Распреде-


 Рис. 3. Распределенное (а)  $\bar{F}(x)$  и соответствующее ему подвижное (б) управление  $s^*(t)$ 

ленное управление  $\bar{F}^*(x)$  для такой задачи, рассчитанное методом подстановки функции  $Q_A(x)$ , имеет следующий вид:

$$\bar{F}^*(x) = -\lambda \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \begin{cases} 2k, & x \in [0, \beta], \\ 0, & x \in [\beta, (L - \beta)], \\ 2k, & x \in [L - \beta, L]. \end{cases}$$

Для двумерных по пространственным координатам объектов с граничным управлением метод подстановки имеет свои особенности, с которыми можно ознакомиться в работе [6]. В частности, для объекта (3)–(5) распределенное управление  $F^*(x)$ , обеспечивающее желаемое состояние объекта на поверхности  $y = 0$  и найденное методом подстановки, показано на рис. 3.

### 3. РАСЧЕТ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ И МОЩНОСТЬЮ ИСТОЧНИКА

Для расчета программного закона движения  $s^*(t)$  (в данном случае периодического с периодом  $T$ ) и мощности  $p^*$  (в данном случае постоянной) требуется решить интегральное уравнение

$$\bar{F}^*(x) = p^* \int_0^T \psi(x - s^*(t), \sigma) dt.$$

В случае концентрированного источника (малого коэффициента  $\sigma$ ) функцию  $\psi(x, \sigma)$  можно приближенно заменить функцией Дирака  $\delta(x_1)$ . Тогда мощность и закон движения можно вычислить по приближенным формулам [6]:

$$p^* = \int_0^L \bar{F}^*(x) dx, \quad s^*(t) = \tau^{-1}(t), \quad \tau^*(x) = \frac{T}{p^*} \int_0^{x_1} \bar{F}^*(\xi) d\xi,$$

где  $\tau^*(x)$  — функция, обратная функции  $s^*(t)$ . На рис. 3, б показан закон движения  $s^*(t)$ , соответст-

вующий распределенному управлению. В системе управления непрерывное распределенное управление  $\bar{F}^*(x)$  заменяется кусочно-постоянной функцией  $\bar{F}_c^*(x)$ . Для этого отрезок  $[0, L]$  разбивается на число интервалов, необходимых для эффективного управления (определяется пользователем). Значение функции  $\bar{F}_c^*(x)$  на каждом интервале будет определять в соответствии с формулами (11) величину, обратную скорости движения центра источника на данном отрезке. Действительно:

$$V(x) = \frac{ds}{d\tau} = \frac{dx}{d\tau(x)}, \quad \frac{1}{V(x)} = \frac{d\tau}{dx} = \frac{T}{p^*} \bar{F}^*(x).$$

Тогда величина  $1/V_i(x)$ , обратная скорости и кусочно-линейная функция, обратная закону движения источника на интервале  $(x_{i-1}, x_i)$ , определяются по формулам:

$$\frac{1}{V_i(x)} = \frac{T}{p^*} \bar{F}_c^*(x), \quad \tau_c^*(x) = \frac{T}{p^*} \bar{F}_c^*(x)x + \tau(x^{i-1}), \\ x^{i-1} < x \leq x^i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Далее рассчитывается закон движения источника  $s^*(t)$ . В модели невозможно учесть все факторы, влияющие на температурное поле объекта. Поэтому программный закон движения корректируется экспериментально по показаниям пирометра или визуально. Величину  $1/V_i(x)$  следует уменьшить, если на данном участке температура превышает заданную, и увеличить в противном случае. Аналогично корректируется программная мощность подвижного источника  $p^*$ . Неконтролируемые возмущения температурного поля можно компенсировать двумя способами: человеком-оператором или автоматически в соответствии с разработанным алгоритмом управления, например, непрерывным или разрывным в скользящем режиме [7].

#### 4. ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС БЛОКА МОДЕЛИРОВАНИЯ

Программный комплекс блока моделирования предназначен для интерактивного моделирования процесса термообработки. Он разработан в среде программирования MATLAB с помощью инструментария утилиты GUIDE [8, 9] и содержит программные блоки, перечисленные во Введении.

Рассмотрим подробнее программные модули и работу интерфейса программного комплекса, с помощью которого обеспечивается интерактивная работа пользователя.

Главное окно (см. третью страницу обложки) программного комплекса содержит набор визуальных компонентов различного назначения. Раскрывающийся список (позиция 1) в верхней части окна позволяет выбрать материал объекта. Панель «Исходные данные счета» (п. 3) предназначена для задания размера объекта, времени движения источника нагрева от начала объекта до его конца, задания числа интервалов кусочно-непрерывного управления, задания числа шагов интегрирования по длине объекта и по времени движения. Координатная сетка (п. 2) служит для настройки закона управления подвижным источником. Поскольку движение источника организуется с помощью кусочно-непрерывного управления, на сетку выведены кусочно-постоянная функция  $\bar{F}_c^*(x)$  (гистограмма времени прохождения центром подвижного источника интервалов  $I_i$  разбиения длины одномерного объекта) и кусочно-непрерывная функция соответствующего закона движения, отражающая прохождение источника вдоль объекта от начала до конца и обратно. Высота элемента гистограммы пропорциональна времени прохождения источником соответствующего интервала. Закон движения задается пользователем. Сначала на панели (п. 3) он задает число интервалов  $n$  кусочно-линейного управления на длине объекта. Каждому интервалу присваивается одно и то же значение времени прохождения подвижным источником. Это значение вычисляется из условия, что сумма времен всех интервалов равна времени прохождения источником длины объекта. Затем производится настройка времени прохождения подвижным источником каждого интервала.

Отмеченный для настройки интервал (панель «Выбор интервала», п. 4) выделяется другим цветом. Затем с помощью клавиатуры и мыши пользователь может изменять высоту элемента гистограммы, изменяя таким образом величину  $1/V_i$ , пропорциональную времени прохождения интер-

вала  $I_i$  подвижным источником. При этом сумма времен всех интервалов не меняется. Такая процедура позволяет получить нужный закон управления.

Панель «Параметры источника нагрева» (п. 5) служит для задания и изменения мощности и концентрации источника  $\sigma$ . Нажатие кнопки «Движение» воспроизводит на координатной сетке «Моделирование подвижного источника нагрева объекта» (п. 6) в режиме анимации перемещение источника (п. 6) со скоростями, пропорциональными скоростям на различных участках траектории. По кнопке «Счет» на панели «Движение источника» (п. 7) производится расчет температурного поля модели и последующее построение в отдельном окне температурного поля объекта при выбранном законе движения и мощности источника нагрева.

Температурное поле строится в координатах: время, положение по длине объекта и температура. На третьей странице обложки изображено температурное поле объекта для случая, когда закон движения источника таков, что время прохождения всех интервалов одинаково. Чтобы сделать разогрев объекта более равномерным по длине, необходимо увеличить время движения источника на интервалах, соответствующих концам объекта. На другом рисунке отражена ситуация, когда источник проходит концевые интервалы существенно медленнее, чем остальные. Температурное поле одномерного объекта рассчитывалось методом конечных разностей. Описание расчетной схемы моделирования приведено в Приложении.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена принципиальная схема и состав компьютерной системы управления движением и мощностью подвижного источника нагрева. Разработан и описан вариант исполнения системы в виде программного комплекса, функционирующего в среде MATLAB. Программный комплекс позволяет получать и далее поддерживать заданное температурное поле вдоль одной координаты объекта. В приведенном варианте коррекция программного управления скоростью на каждом участке траектории и мощностью источника тепла производится человеком-оператором на основании показаний пирометра или по визуальным наблюдениям. В дальнейшем предполагается автоматизация системы, в частности, создание алгоритмов и разработка программных блоков автоматической коррекции мощности и скорости движения источника на каждом участке траектории. Для осуществления автоматической коррекции управления



подвижным источником необходима информация о температурном поле объекта. Трудности автоматической коррекции связаны, в первую очередь, с отсутствием приборов (в том числе сканирующих пирометров), обеспечивающих получение достаточно точной информации о действительном распределении температур в реальных объектах.

## ПРИЛОЖЕНИЕ.

### Математический аппарат численного решения задачи

Для численного расчета температурного поля одномерного объекта с подвижным воздействием применялась двухслойная разностная схема, определенная на шеститочечном шаблоне [10–12]. На области  $\bar{D} = (0 \leq x \leq L, 0 \leq t \leq T)$ , где  $x$  — пространственная координата, а  $t$  — временная, была задана сетка:  $\omega_{ht} = \{(x_i = ih, t_j = jt), i = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, M\}$ , где  $h = L/N$ , а  $\tau = T/M$ . При этом непрерывной функции  $Q(x, t)$  ставилась в соответствие сеточная функция  $y(x_i, t_j)$ . Значение сеточной функции в узле  $(x_i, t_j)$ :  $y_i^j = y(x_i, t_j)$ .

Используя граничные условия для непрерывной функции в точках  $x_0 = 0$  и  $x_n = L$ , производим аппроксимацию для получения соответствующих сеточных значений.

Для точки  $x_0 = 0$ :  $y_0^j = k_1 y_1^j + v_1$ , где  $k_1 = \frac{k}{h\theta + k}$ ;  $v_1 = \frac{h}{h\theta + k} Q_c^1$ .

Для точки  $x_M = L$ :  $y_N^j = k_2 y_{N-1}^j + v_2$ , где  $k_2 = \frac{k}{h\theta + k}$ ;  $v_2 = \frac{h}{h\theta + k} Q_c^2$ .

Аппроксимируем уравнение теплопроводности, используя сеточную функцию:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{a}{S} \left[ \sigma \frac{y_{i-1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i+1}^{j+1}}{h^2} + (1 - \sigma) \frac{y_{i-1}^j - 2y_i^j + y_{i+1}^j}{h^2} \right] + \frac{1}{c\rho S} \varphi_i^{j+1},$$

где  $1 \leq i \leq N - 1$ ,  $0 \leq \sigma \leq 1$ ,  $\varphi_i^{j+1} = F(x_i, t_j)$ .

В результате преобразований получаем систему уравнений  $A_i y_{i-1}^{j+1} - C_i y_i^{j+1} + B_i y_{i+1}^{j+1} = -F_i^j$  с крайними условиями:

$$y_0^j = k_1 y_1^j + v_1, \quad (\text{П1})$$

$$y_N^j = k_2 y_{N-1}^j + v_2. \quad (\text{П2})$$

Далее приведена схема программы счета.

1. Задание параметров управления в соответствии с выражениями (4) — (7):

- геометрические параметры  $L$  и  $S$ ;
- теплотехнические параметры:  $a$ ,  $\lambda$ ,  $c$ ,  $\rho$  и  $\alpha$ ;
- граничные условия 1-го рода:  $\alpha_r = 1$ ,  $\lambda_r = 0$  или 3 рода:

$\alpha_r = \alpha$ ,  $\lambda_r = \lambda$ ; температура на левой границе  $Q_c^1$ ; температура на правой границе  $Q_c^2$ ;

- начальные условия  $Q_0(x)$  — аналитически или таблично;
- источник воздействия  $F(x, t)$  — аналитически;
- реальное время процесса нагрева  $T$ .

2. Задание параметров модели:  $N$  — число отрезков разбиения по оси  $x$ ;  $M$  — число отрезков разбиения по оси  $t$ .

3. Задание и расчет параметров моделирования:  $h = L/N$  — шаг по длине (для одномерного случая),  $\tau = T/M$  — шаг по времени;  $a_1 = a/S$ ;  $b_1 = 1/c\rho S$ ;  $k = \lambda_r/\alpha_r$ ;  $\theta = 1/\alpha_r$ ;  $k_1$ ;  $v_1$ ;  $k_2$ ;  $v_2$ .

4. Расчет температурного поля методом прогонки [5]:

сначала при  $i = 0$  из формулы (П1) находим:  $\alpha_1 = k_1$ ,  $\beta_1 = v_1$  и во время прямой прогонки на слое  $j$  определяем

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, N - 1;$$

затем находим на  $(j + 1)$ -м слое на величину  $y_N^{j+1} = \frac{v_2 + k_2 \beta_N}{1 - k_2 \alpha_N}$ ,

где  $v_2$  и  $k_2$  определяются из формулы (П2); при обратной прогонке вычисляем  $y_i^{j+1} = \alpha_{i+1} y_{i+1}^{j+1} + \beta_{i+1}$ ,  $i = N - 1, \dots, 1$ .

Получив значения  $y_i^{j+1}$ ,  $0 \leq i \leq N$  на слое  $j + 1$ , переходим к слою  $j + 2$ , определяем  $y_i^{j+2}$  и так далее для всех  $j = 1, 2, 3, \dots, M$ . Для  $j = 0$  значения  $y_i^0$  заданы в начальных условиях.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бутковский А.Г., Даринский Ю.В., Пустыльников Л.М. Управление распределенными системами путем перемещения источника // Автоматика и телемеханика. — 1974. — № 5.
2. Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1980.
3. Чубаров Е.П. Управление системами с подвижными источниками воздействия. — М.: Энергоатомиздат, 1985.
4. Емельянов А.Н. Исследование управляющих возможностей систем программной развертки электронного луча / В кн. Управление распределенными системами с подвижным воздействием. — М.: Наука, 1979.
5. Митрофанов В.Е. Принципы построения генераторов развертки луча в электронно-лучевых термических установках / В кн. Управление распределенными системами с подвижным воздействием. — М.: Наука, 1979.
6. Кубышкин В.А., Финягина В.И. Подвижное управление в системах с распределенными параметрами. — М.: СИНТЕГ, 2005.
7. Применение скользящих режимов для управления объектами с распределенными параметрами с подвижным многоцикловым воздействием / А.М. Брегер, А.Г. Бутковский, В.А. Кубышкин, В.И. Уткин // Автоматика и телемеханика. — 1980. — № 3. — С. 72–83.
8. Мартынов Н.Н., Иванов А.П. MATLAB 5.X. Вычисления, визуализация, программирование. — М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2000.
9. Дьяконов В.П., Абраменкова И.В. MATLAB 5.0/5.3. Система символьной математики. — М.: Нолидж, 1999.
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972.
11. Самарский А.А. Введение в численные методы. — М.: Наука, 1987.
12. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.

✉ (495) 334-76-90, e-mail: vicalkub@ipu.ru, suhoverv@ipu.ru

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Г. Бутковским. □