УДК 681.511

АНАЛОГ ГАНКЕЛЕВОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ[1]

А. Н. Жирабок

Дальневосточный государственный технический университет, г. Владивосток

Предложен способ построения аналога ганкелевой матрицы для нелинейной дискретной динамической системы на основе аналогов матриц наблюдаемости и управляемости.

ВВЕДЕНИЕ

Известно [1], что ганкелева матрица играет важную роль в теории реализации линейных динамических систем; ее можно рассматривать как математический объект, эквивалентный заданному вход-выходному отображению, генерируемому некоторой линейной системой. Об этой важности говорит также тот факт, что наряду с другими конструкциями вопросы построения и анализа этой матрицы были рассмотрены на теоретико-категорном языке в работе [2].

Известно [3], что ганкелева матрица получается в результате перемножения матриц наблюдаемости и управляемости. Поскольку для нелинейных дискретных систем могут быть построены аналоги этих матриц, представляется интересным получить аналог ганкелевой матрицы в этом случае.

Рассмотрим класс нелинейных дискретных динамических систем, описываемых уравнениями

$$x(t+1) = f(x(t), u(t)), \quad y(t) = h(x(t)), \tag{1}$$

где $x \in X \subseteq R^n$, $u \in U \subseteq R^m$, $y \in Y \subseteq R^l$ — векторы состояния, управления и выхода, f и h — в общем случае нелинейные векторные функции. Будем обозначать систему (1) через $\Sigma = (X, U, Y, f, h)$. В дальнейшем на систему (1) будут наложены некоторые ограничения.

Если f и h — линейные функции, т. е. $f(x, u) = Fx + Gu$ и $h(x) = Hx$ для некоторых матриц F, G и H соответствующих размеров, то получаем известное линейное описание:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad y(t) = Hx(t). \tag{2}$$

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 03-01-00719).

Для анализа общих свойств наблюдаемости и управляемости будем использовать конструкцию гомоморфизма систем [1, 4].

Пусть φ: $X \to X^*$ — произвольная функция. Будем называть ее гомоморфизмом системы Σ в некоторую систему $\Sigma^* = (X^*, U^*, Y^*, f^*, h^*)$ с $U^* = U$, $Y^* = Y$ и записывать φ: $\Sigma \to \Sigma^*$, если коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} X\times U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi\pi_X\times\pi_U"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ X^*\times U \arrow[r, "f^*"] & X^* \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "e_Y"] \\ X^* \arrow[r, "h^*"] & Y^*, \end{tikzcd} \tag{3}$$

т. е. $\varphi f = f^*(\varphi\pi_X \times \pi_U)$ и $h = h^*\varphi$ или $\varphi(f(x, u)) = f^*(\varphi(x), u)$ и $h(x) = h^*(\varphi(x))$ для всех $(x, u) \in X \times U$, где π_X и π_U — проекции (т. е. $\pi_X(x, u) = x$ и $\pi_U(x, u) = u$), e_Y — тождественная функция. Конструкция $\varphi\pi_X \times \pi_U$ означает, что проекции π_X и π_U выделяют из пары (x, u) соответствующие компоненты, первая из которых преобразуется функцией φ, и затем вновь формируется пара $(\varphi(x), u)$. Формальное определение знака "$\times$" в конструкции $\varphi\pi_X \times \pi_U$ будет дано в § 1.

Напомним, что функция φ называется инъективной, если из $\varphi(x) = \varphi(x^*)$ следует $x = x^*$; функция φ^*: $X \to X^*$ называется сюръективной, если для произвольного $x^* \in X^*$ существует прообраз $x \in X$ такой, что $\varphi^*(x) = x^*$; иными словами, $\varphi^*(X) = X^*$.

Для решения поставленной задачи предлагается применить специальный математический аппарат, положенный в основу работ [4 — 6]. Коротко дадим его основные положения; необходимые детали и доказательства можно найти в работе [4].

1. АЛГЕБРА ФУНКЦИЙ

Рассматриваемый математический аппарат содержит четыре основные конструкции.

- Отношения частичного предпорядка $\leqslant$ и $\ll$: для произвольных функций a: $X \to S$, b: $X \to W$ и a^*: $S^* \to X$, b^*: $W^* \to X$ будем записывать $a \leqslant b$ и $a^* \gg b^*$, если существуют функции g и g^* такие, что коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\ S \arrow[rr, "g"] & & W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X & \\ S^* \arrow[ur, "a^*"] & & W^*, \arrow[ul, "b^*"'] \arrow[ll, "g^*"'] \end{tikzcd}$$

где S, W, S^* и W^* — некоторые множества. Нетрудно видеть, что если σ_aи σ_b — разбиения, индуцируемые функциями a и b на множестве X, то $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $\sigma_a \le \sigma_b$. Дуально, если $a^*(S^*)$ и $b^*(W^*)$ — образы множеств S^* и W^* в X, то $a^* \gg b^*$ тогда и только тогда, когда $a^*(S^*) \supseteq b^*(W^*)$.

Если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$ ($a^* \ll b^*$ и $b^* \ll a^*$), будем записывать $a \approx b$ ($a^* \approx b^*$) и говорить, что эти функции эквивалентны. Нетрудно видеть, что эквивалентным функциям соответствуют одинаковые разбиения (образы).

- Операции $\times$ и $\square$: прямым произведением $a \times b$ функций a и b и прямой суммой $a^*\square b^*$ функций a^* и b^* назовем функции g и g^* такие, что коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "a"'] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "b"] & \\ S & S\square W \arrow[l, "\pi_S"'] \arrow[r, "\pi_W"] & W \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & X & \\ S^* \arrow[ur, "a^*"] \arrow[r, "\tau_{S^*}"] & S^*\square W^* \arrow[u, "g^*"] & W^*, \arrow[ul, "b^*"'] \arrow[l, "\tau_{W^*}"'] \end{tikzcd}$$

где $\times$ — прямое произведение множеств S и W, — прямая сумма множеств S^* и W^*, π_S и π_W — проекции, τ_{S^*} и τ_{W^*} — вложения [7]. Из определений прямого произведения и прямой суммы множеств следует, что функции g и g^* единственны. Введенным конструкциям можно дать эквивалентные определения:

$$a \times b = \max(g|g \leqslant a,\ g \leqslant b),$$
$$a^*\square b^* = \min(g|g \gg a^*,\ g \gg b^*).$$

Из коммутативности диаграмм (4) следуют равенства $a = \pi_S(a \times b)$, $b = \pi_W(a \times b)$, $a^* = (a^*\square b^*)\tau_{S^*}$, $b^* = (a^*\square b^*)\tau_{W^*}$.

Можно показать [4], что $a \times b = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Для линейных пространств S^* и W^* конструкцию $S^* \square W^*$ можно рассматривать как прямую сумму этих пространств [7]; в этом случае вложения имеют следующий вид: $\tau_{S^*}(s) = \begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix}$, $\tau_{W^*}(w) = \begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix}$ для всех $(s, w) \in S^* \times W^*$. Для корректного определения прямой суммы $a^*\square b^*$ в этом случае необходимо потребовать, чтобы $a^*(0) = b^*(0)$, поскольку из $a^* = (a^*\square b^*)\tau_{S^*}$ следует $a^*(0) = (a^*\square b^*)$ $\tau_{S^*}(0) = (a^*\square b^*)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$; аналогично $b^*(0) = (a^*\square b^*)\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Если же $a^*(0) = b^*(0) = 0$, то можно положить

$$g^* = a^*\square b^* = [a^*|b^*], \qquad (5)$$

откуда $g^*\begin{bmatrix} s \\ w \end{bmatrix} = [a^*|b^*]\begin{bmatrix} s \\ w \end{bmatrix} = a^*(s) + b^*(w)$ для всех $(s, w) \in S^* \times W^*$. Действительно, как следует из определения операции $\square$, функция g^* должна быть единственной, удовлетворяющей условиям $g^*\tau_{S^*} = a^*$ и $g^*\tau_{W^*} = b^*$, что и выполняется в данном случае: $g^*\tau_{S^*}(s) = g^*\begin{bmatrix} s \\ 0 \end{bmatrix} = a^*(s) + b^*(0) = a^*(s)$, $g^*\tau_{W^*}(s) = g^*\begin{bmatrix} 0 \\ w \end{bmatrix} = a^*(0) + b^*(w) = b^*(w)$ для всех $(s, w) \in S^* \times W^*$. Здесь символом "0" обозначены нулевые элементы пространств разной размерности; о чем идет речь — должно быть ясно из контекста.

- Бинарные отношения Δ и Δ^*: $(a, b) \in \Delta$ и $(a^*, b^*) \in \Delta^*$, если для некоторых функций δ и δ^* и всех $(x, u) \in X \times U$, $(s, u) \in S^* \times U$ выполняются равенства $b\ (f(x, u)) = \delta(a(x), u)$ и $b^*(\delta^*(s, u)) = f(a^*(s), u)$.
- Операторы $\mathbf{M}$ и $\mathbf{m}$: $\mathbf{M}(b)$ — это максимальная функция, образующая с функцией b пару:

$$(\mathbf{M}(b), b) \in \Delta,\ (a, b) \in \Delta \Rightarrow a \leqslant \mathbf{M}(b);$$

$\mathbf{m}\ (a^*)$ — это минимальная функция, с которой функция a^* образует пару:

$$(a^*, \mathbf{m}(a^*)) \in \Delta^*,\ (a^*, b^*) \in \Delta^* \Rightarrow \mathbf{m}(a^*) \ll b^*.$$

Правила вычисления операций и операторов и их свойства можно найти в работах [5, 6]. Там, в частности, показано, что в линейном случае, когда $b(x) = Bx$ для некоторой матрицы B и система описана моделью (2), $\mathbf{M}(b) = BF$.

Значения оператора $\mathbf{m}$ вычисляются следующим образом: $\mathbf{m}(a^*) = f(a^*\pi_{S^*} \times \pi_U)$ или $\mathbf{m}(a^*)(s, u) = f(a^*(s), u)$ для всех $(s, u) \in S^* \times U$. В линейном случае для системы (2) при $a^*(s) = A^*s$ для некоторой матрицы A^* получаем $\mathbf{m}(A^*)(s, u) = f(A^*s, u) = FA^*s + Gu$, откуда $\mathbf{m}(A^*) = [FA^*|G]$.

Приведем основные необходимые в дальнейшем свойства операций и операторов:

$$\mathbf{M}(a \times b) = \mathbf{M}(a) \times \mathbf{M}(b);$$
$$\mathbf{m}(a^*\ b^*) = \mathbf{m}(a^*) \square \mathbf{m}(b^*);$$
$$a \approx b \Rightarrow \mathbf{M}(a) \approx \mathbf{M}(b);$$
$$a^* \approx b^* \Rightarrow \mathbf{m}\ (a^*) \approx \mathbf{m}(b^*).$$

Рассмотрим вопросы наблюдаемости и управляемости в объеме, необходимом для изложения дальнейшего.

2. АНАЛИЗ НАБЛЮДАЕМОСТИ И УПРАВЛЯЕМОСТИ

Уточним используемые в дальнейшем понятия, связанные с наблюдаемостью и управляемостью. Как и в работах [4, 5], систему Σ будем называть ненаблюдаемой, если существуют состояния $x\ (t_0)$ и $x'(t_0)$ такие, что для произвольного управления $u\ (\tau)$ на интервале $[t_0, \infty)$ выполняется равенство $H\ (x\ (t_0),\ u\ (\tau)) = H\ (x'(t_0),\ u\ (\tau))$, где $H\ (x\ (t_0),\ u\ (\tau))$ — выходная реакция системы Σ в начальном состоянии $x\ (t_0)$ на управление $u\ (\tau)$, $\tau > t_0$. Систему Σ будем называть неуправляемой, если для некоторого состояния x_0 существует такое состояние x', что ни для какого конечного интервала $t_1 - t_0$ не существует управления $u(\tau)$, переводящего систему из состояния $x_0 = x(t_0)$ в состояние $x' = x(t_1)$.

В работах [4, 5] показано, что система Σ ненаблюдаема в том и только том случае, когда существует неинъективный гомоморфизм φ: $\Sigma \to \Sigma^*$, для которого справедливы неравенства $\varphi \leqslant h$, $\varphi \leqslant \mathbf{M}(\varphi)$. Выяснить существование такого гомоморфизма можно следующим образом. Положим $h^0 = h$,

$$h^{k+1} = h^k \times \mathbf{M}(h^k), \quad k = 0, 1, 2, ..., \tag{6}$$

если $h^{r+1} \approx h^r$ при некотором r, то функция $\varphi^0 = h^r$ является гомоморфизмом $\Sigma \to \Sigma^0$ для некоторой системы $\Sigma^0 = (X^0, U^0, Y^0, f^0, h^0)$ с $U^0 = U$, $Y^0 = Y$. В работе [4] показано, что функция φ^0 может быть взята в качестве критерия наблюдаемости: система Σ наблюдаема в том и только том случае, когда φ^0 инъективна.

В случае, когда последовательность функций h^0, h^1, ... содержит бесконечное число различных членов, проверка наблюдаемости системы на основе изложенного подхода невозможна. Рассмотрим, например, скалярную систему, описываемую уравнениями $x(t+1) = x(t) + \operatorname{sign}(u(t))$, $y(t) = h(x(t))$, где функция h определяется следующим образом: $h(x) = 1$ при $x = 0$, $h(x) = 0$ при $x \neq 0$. Для простоты анализа дополнительно предположим, что скалярная переменная x может принимать только целые положительные и отрицательные значения, включая 0. Изложение будем вести в терминах разбиений (как для конечного автомата).

Нетрудно видеть, что функции h соответствует разбиение $\omega = [0][1, -1, 2, -2, 3, -3,...]$ (обозначение $h \sim \omega$) в том смысле, что в один блок этого разбиения включаются состояния, для которых функция h имеет одинаковые значения (в квадратных скобках перечислены состояния, принадлежащие одному блоку разбиения). Применяя технику работы с разбиениями [8], можно показать, что $\mathbf{M}(h) \sim \mathbf{M}(\omega) = [0][1][-1][2, -2, 3, -3,...]$ и $h^1 = h \times \mathbf{M}(h) \sim \omega^1 = \omega \times \mathbf{M}(\omega) = \mathbf{M}(\omega)$, $h^2 \sim \omega^2 = [0][1][-1][2][-2][3, -3, 4, -4, ...]$. Структура последующих разбиений ясна из двух полученных; очевидно, что $\omega^i \neq \omega^{i+1}$ при любом i. Ясно также, что дискретная структура множества состояний принята только для большей наглядности изложения, аналогичный результат получится, если снять это ограничение. Вопрос анализа наблюдаемости подобных систем на настоящий момент остается открытым.

Из свойств операции $\times$ и оператора $\mathbf{M}$ и соотношения (6) следует, что $h^2 = h^1 \times \mathbf{M}(h^1) = h \times \mathbf{M}(h) \times \mathbf{M}(h \times \mathbf{M}(h)) = h \times \mathbf{M}(h) \times \mathbf{M}(h) \times \mathbf{M}^2(h) \approx h \times \mathbf{M}(h) \times \mathbf{M}^2(h)$.

По аналогии $h^r \approx h \times \mathbf{M}(h) \times ... \times \mathbf{M}^r(h)$ или $\varphi^0 \approx \begin{bmatrix} h \\ \mathbf{M}(h) \\ \vdots \\ \mathbf{M}^r(h) \end{bmatrix}$.

В линейном случае функции φ^0 соответствует матрица $\Phi^0 = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$ (матрица наблюдаемости); действительно, здесь функции h соответствует матрица H, функции $\mathbf{M}(h)$ — произведение HF, ..., функции $\mathbf{M}^r(h)$ — произведение HF^r, откуда и следует указанный результат.

Для описания задачи управляемости введем функцию ρ: $R \to X$ так, что $\rho(R) = \{x_0\}$, где R — произвольное множество; без ограничения общности будем полагать $R = \{0\}$. Поскольку при анализе управляемости используется некоторая вспомогательная система Σ^*, дополнительно потребуем, чтобы для некоторой функции ρ^*: $R \to X^*$ была коммутативной диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \\ R \arrow[ur, "\rho"] \arrow[dr, "\rho^*"'] & \\ & X^*, \arrow[uu, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

которая описывает согласование начальных состояний систем Σ^* и Σ. Отметим, что при анализе управляемости в диаграмме (3) рассматривается только левый “квадрат”, при этом его левая и правая стрелки инвертируются и функции на них заменяются на $\psi\pi_{X^*} \times \pi_U$ и ψ, соответственно; правый “квадрат” диаграммы (3) заменяется приведенной выше диаграммой. Ограничимся рассмотрением класса систем, сохраняющих 0, когда $f(0, 0) = 0$.

В работе [4] показано, что система Σ неуправляема тогда и только тогда, когда существует несюръективный гомоморфизм ψ: $\Sigma^* \to \Sigma$, для которого справедливы неравенства $\rho \ll \psi$, $\mathbf{m}(\psi) \ll \psi$.

Для выяснения существования такого гомоморфизма положим $\rho^0 = \rho$,

$$\rho^{k+1} = \rho^k \square \mathbf{m}(\rho^k), \quad k = 0, 1, 2, ... \tag{7}$$

Если $\rho^{r+1} \approx \rho^r$ при некотором r, то функция $\psi_0 = \rho^r$ является гомоморфизмом $\Sigma_0 \to \Sigma$ для некоторой системы $\Sigma_0 = (X_0, U_0, Y_0, f_0, h_0)$ с $U_0 = U$, $Y_0 = Y$. В работе [4] показано, что функция ψ_0 может быть использована при анализе управляемости: система Σ управляема в том и только том случае, когда ψ_0 сюръективна.

Можно показать, что при оговоренных выше ограничениях на класс рассматриваемых систем, т. е. когда $f(0, 0) = 0$ и $x_0 = 0$, функции ρ^k и $\mathbf{m}(\rho^k)$ удовлетворяют условиям $\rho^k(0) = 0$ и $\mathbf{m}(\rho^k)(0) = 0$. Воспользуемся методом индукции. При $i = 0$ по определению получаем $\rho^0(0) = \rho(0) = x_0 = 0$. Пусть $\rho^k(0) = 0$. Из определения оператора $\mathbf{m}$ следует $\mathbf{m}(\rho^k)(0) = f(\rho^k(0), 0) = f(0, 0) = 0$, откуда $\mathbf{m}(\rho^k)(0) = 0$. Тогда из выражения (5) следует, что функция ρ^{k+1}, определяемая равенством (7), может быть записана в виде

$$\rho^{k+1} = \rho^k \square \mathbf{m}(\rho^k) = [\rho^k | \mathbf{m}(\rho^k)], \tag{8}$$

откуда следует, что $\rho^{k+1}(0) = 0$, $k = 1, 2, ..., r$. Напомним, что символом “0” обозначены нулевые элементы пространств разной размерности.

Из свойств операции $\square$ и оператора $\mathbf{m}$, а также из соотношения (7) следует, что $\rho^2 = \rho^1 \square \mathbf{m}(\rho^1) = \rho \square \mathbf{m}(\rho) \square \mathbf{m}(\rho \square \mathbf{m}(\rho)) = \rho \square \mathbf{m}(\rho) \square \mathbf{m}(\rho) \square \mathbf{m}^2(\rho) \approx$

$\approx \rho \square \mathbf{m}(\rho) \square \mathbf{m}^2(\rho)$. По аналогии можно получить $\rho^r \approx \approx \rho \square \mathbf{m}(\rho) \square \ldots \square \mathbf{m}^r(\rho)$ или, с учетом выражения (8),

$$\rho^r \approx [\rho|\mathbf{m}(\rho)| \ldots |\mathbf{m}^r(\rho)]. \quad (9)$$

Отметим, что соотношение (9) можно рассматривать как дуальное для функции, описывающей задачу анализа наблюдаемости нелинейной дискретной системы, полученное ранее. Этот факт дополняет картину дуальности нелинейных динамических систем, описанную в работах [5, 6].

Рассмотрим линейный случай, когда система описана моделью (2) и $x_0 = 0$. Из правила вычисления оператора $\mathbf{m}$ следует: $\mathbf{m}(\rho)(0, u) = f((\rho(0), u) = F \cdot 0 + Gu$, откуда $\mathbf{m}(\rho) = G$. По определению, $\rho^1 = \rho^0 \square \mathbf{m}(\rho^0) = \rho \square \mathbf{m}(\rho) = [0|G] \approx G$. Далее, $\mathbf{m}(\rho^1)(u, u^*) = f(\rho^1(u), u^*) = FGu + Gu^*$, т. е. можно положить $\mathbf{m}(\rho^1) = [FG|G]$. Также по определению $\rho^2 = \rho^1 \square \mathbf{m}(\rho^1) = [G|FG|G] \approx [G|FG]$. Аналогично можно показать, что $\psi_0 = \rho^r \approx [G|FG| \ldots |F^{r-1}G]$ Таким образом, наш критерий управляемости — сюръективность функции ψ_0 — переходит в известный критерий — наличие полного ранга матрицы управляемости $\Psi_0 = [G|FG| \ldots |F^{n-1}G]$ которую, как справедливо отмечено в работе [3], правильнее называть матрицей достижимости.

Можно показать, что если $h^{r+1} \approx h^r$, то $h^{r+i} \approx h^r$ при всех $i > 0$, поэтому функцию φ^0 будем записывать в виде $\varphi^0 \approx h \times \mathbf{M}\ (h) \times \ldots \times \mathbf{M}^{n-1}(h)$; аналогично — для ψ_0: $\psi_0 \approx [\rho|\mathbf{m}(\rho)| \ldots |\mathbf{m}^{n-1}(\rho)]$.

3. АНАЛОГ ГАНКЕЛЕВОЙ МАТРИЦЫ

Как уже отмечалось, в линейном случае ганкелева матрица равна произведению матриц наблюдаемости и управляемости:

$$\Gamma = \Phi^0\Psi_0 = \begin{bmatrix} HG & HFG & \ldots & HF^{n-1}G \\ HFG & HF^2G & \ldots & HF^nG \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ HF^{n-1}G & HF^nG & \ldots & HF^{2n-2}G \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Аналогичный прием используем и в нелинейном случае, что приводит к композиции $\gamma = \varphi^0\psi_0$ для дискретной системы произвольного вида, которая переходит в матрицу следующего вида в нашем случае (при выполнении ограничения $f(0, 0) = 0$):

$$\gamma = \varphi^0\psi_0 \approx$$

$$\approx \begin{bmatrix} h\rho & h\mathbf{m}(\rho) & \ldots & h\mathbf{m}^{n-1}(\rho) \\ \mathbf{M}(h)\rho & \mathbf{M}(h)\mathbf{m}(\rho) & \ldots & \mathbf{M}(h)\mathbf{m}^{n-1}(\rho) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{M}^{n-1}(h)\rho & \mathbf{M}^{n-1}(h)\mathbf{m}(\rho) & \ldots & \mathbf{M}^{n-1}(h)\mathbf{m}^{n-1}(\rho) \end{bmatrix}. \quad (11)$$

В линейном случае системы, связанные отношением гомоморфизма, имеют одинаковые ганкелевы матрицы. Действительно, пусть Φ — гомоморфизм линейных систем $\Sigma \to \Sigma^*$; известно [1, 3], что матрицы этих систем связаны соотношениями $G^* = \Phi G$, $\Phi F = F^*\Phi$, $H^*\Phi = H$; нетрудно показать, что $\Phi F^k = F^{*k}\Phi$ для любого k. Тогда $HF^kG = H^*\Phi F^kG = H^*F^{*k}\Phi G = H^*F^{*k}G^*$ для любого k, т. е. элементы ганкелевой матрицы для линейных систем, связанных отношением гомоморфизма, одинаковы. Покажем, что аналогичный результат имеет место и в нелинейном случае.

По свойству оператора $\mathbf{M}$ для произвольной функции b: $X \to W$ справедливо включение $(\mathbf{M}(b), b) \in \Delta$, т. е. $b(f(x, u)) = \mu(\mathbf{M}(b)(x), u)$ для некоторой функции μ и всех $(x, u) \in X \times U$. Будем полагать, что множество V значений функции $\mathbf{M}(b)$ совпадает с образом $\mathbf{M}(b)(X)$, т. е. $\mathbf{M}(b)$ — сюръективная функция. Введем семейство функций $\{\mu_u\}$ таких, что $\mu_u(v) = \mu(v, u)$ для всех $v \in V = \mathbf{M}(b)(X)$ и $u \in U$.

Теорема. *Все функции семейства* $\{\mu_u\}$ *инъективны.*

Доказательство. Установим вначале вспомогательный результат. Пусть a: $X \to S$ — сюръективная функции, т. е. $a\ (X) = S$, и для некоторой функции b: $X \to W$ справедливо включение $(a, b) \in \Delta$, т. е. выполняется равенство $b(f(x, u)) = \delta(a(x), u)$ для некоторой функции δ и всех $(x, u) \in X \times U$. Введем семейство функций $\{\delta_u\}$: $S \to W$ таких, что $\delta_u(s) = \delta(s, u)$ для всех $s \in S = a(X)$ и $u \in U$. Пусть существуют s^0 и s^* $(s^0 \neq s^*)$ такие, что $\delta_u(s^0) = \delta_u(s^*)$ при некотором $u \in U$, т. е. функция δ_u неинъективна. Поскольку a сюръективна, то найдутся x^0 и x^* с условием $a(x^0) = s^0 \neq a(x^*) = s^*$ (см. рисунок). Определим функцию $a^\#$ так, чтобы она совпадала с a при всех x, кроме x^0 и x^*, на которых $a^\#(x^0) = a^\#(x^*) = s^*$. Ясно, что $a \leqslant a^\#$ и $b(f(x, u)) = \delta(a^\#(x), u)$.

Перейдем к доказательству основного результата. Согласно определению, $(\mathbf{M}(b), b) \in \Delta$, что эквивалентно равенству $b(f(x, u)) = \mu(\mathbf{M}(b)(x), u) = \mu_u(\mathbf{M}(b)(x))$ при всех $(x, u) \in X \times U$. Поскольку функция $\mathbf{M}(b)$ является наибольшей, удовлетворяющей последнему равенству, то из предыдущей части доказательства следует, что не существует элементов v^0, $v^* \in V = \mathbf{M}(b)(X)$ $(v^0 \neq v^*)$ таких, что $\mu_u(v^0) = \mu_u(v^*)$, т. е. функция μ_u инъективна для всех $u \in U$. Теорема доказана. ♦

Пусть φ — гомоморфизм $\Sigma \to \Sigma^*$, т. е. $\varphi f = f^*(\varphi\pi_X \times \pi_U)$. Пусть также $b = b^0\varphi$, тогда $bf = b^0\varphi f = b^0 f^*(\varphi\pi_X \times \pi_U)$. Из определения оператора $\mathbf{M}^*$ для системы Σ^* следует неравенство $b^0 f^* \geqslant \mathbf{M}^*(b^0)\pi_{X^*} \times \pi_U$, что вместе с предыдущим равенством дает соотношение $bf \geqslant (\mathbf{M}^*(b^0)\pi_{X^*} \times \pi_U) \times (\varphi\pi_X \times \pi_U) = \mathbf{M}^*(b^0)\varphi\pi_X \times \pi_U$. По определению бинарного отношения Δ это неравенство означает $(\mathbf{M}^*(b^0)\varphi, b) \in \Delta$, откуда по определению оператора $\mathbf{M}$ следует соотношение

$$\mathbf{M}(b) = \mathbf{M}\ (b^0\varphi) \geqslant \mathbf{M}^*(b^0)\varphi. \quad (12)$$

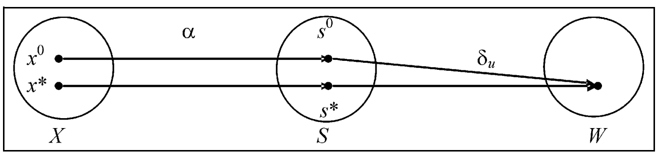

Иллюстрация к доказательству теоремы

Для получения обратного неравенства дополнительно к соотношениям $\varphi f = f^*(\varphi\pi_X \times \pi_U)$ и $b = b^0\varphi$ рассмотрим два равенства: $b(f(x, u)) = \mu(\mathbf{M}(b)(x), u)$ и $b^0(f^*(x, u)) = \mu^*(\mathbf{M}^*(b^0)(x^*), u)$ или $bf(\pi_X \times \pi_U) = \mu(\mathbf{M}(b)\pi_X \times \pi_U)$ и $b^0f^*(\varphi\pi_X \times \pi_U) = \mu^*(\mathbf{M}^*(b^0)\pi_{X^*} \times \pi_U)$, следующие из включений $(\mathbf{M}(b), b) \in \Delta$ и $(\mathbf{M}^*(b^0), b^0) \in \Delta$, соответственно. Запишем следующую цепочку равенств:

$$\mu(\mathbf{M}(b)\pi_X \times \pi_U) = bf = b^0\varphi f = b^0 f^*(\varphi\pi_X \times \pi_U) =$$
$$= \mu^*(\mathbf{M}^*(b^0)\pi_{X^*} \times \pi_U)(\varphi\pi_X \times \pi_U) = \mu^*(\mathbf{M}^*(b^0)\varphi\pi_X \times \pi_U).$$

Первый и последний члены этой цепочки дают равенство $\mu(\mathbf{M}(b)\pi_X \times \pi_U) = \mu^*(\mathbf{M}^*(b^0)\varphi\pi_X \times \pi_U)$ или $\mu_u(\mathbf{M}\ (b)) = \mu_u^*(\mathbf{M}^*(b^0)\varphi)$, справедливое при всех $u \in U$.

Представим последнее равенство в виде коммутативной диаграммы (сплошные стрелки):

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\mathbf{M}^*(b_0)\varphi"'] \arrow[dr, "\mathbf{M}(b)"] & \\
V^* \arrow[dr, "\mu_u^*"'] & & V. \arrow[ll, dashed] \arrow[dl, "\mu_u"] \\
 & W &
\end{tikzcd}$$

По аналогии с теоремой, можно показать, что μ_u^* — инъективная функция, а поскольку $\mathbf{M}(b)$ по предположению суръективна, то на основании леммы Зейгера о пополнении [1] получаем, что существует единственная функция $V \to V^*$ (пунктирная стрелка), дополняющая диаграмму до коммутативной, что позволяет установить требуемое неравенство: $\mathbf{M}(b) \leqslant \mathbf{M}^*(b^0)\varphi$. Рассматривая его вместе с неравенством (12), получаем искомое соотношение $\mathbf{M}(b^0\varphi) \leftrightarrow \mathbf{M}^*(b^0)\varphi$.

Из свойства оператора $\mathbf{M}$ и только что полученного соотношения следует цепочка соотношений: $\mathbf{M}^2(b^0\varphi) = \mathbf{M}(\mathbf{M}(b^0\varphi)) \approx \mathbf{M}(\mathbf{M}^*(b^0)\varphi) \approx \mathbf{M}^*(\mathbf{M}^*(b^0))\varphi = \mathbf{M}^{*2}(b^0)\varphi$. Аналогично можно показать, что $\mathbf{M}^i(b^0\varphi) \approx \mathbf{M}^{*i}(b^0)\varphi$; в частности, при $b = h$, $b^0 = h^*$ и $h = h^*\varphi$ получаем $\mathbf{M}^i(h) = \mathbf{M}^i\ (h^*\varphi) \approx \mathbf{M}^{*i}(h^*)\varphi$, $i = 1, 2, \ldots$

Используя правило вычисления оператора $\mathbf{m}$, получим для гомоморфизма φ: $\Sigma \to \Sigma^*$ и функций a^*: $S^* \to X$ и a^0: $S^* \to X^*$, связанных соотношением $a^0 = \varphi a^*$, следующую цепочку равенств: $\varphi\mathbf{m}(a^*) = \varphi f(a^*\pi_{S^*} \times \pi_U) = f^*(\varphi a^*\pi_{S^*} \times \pi_U) = f^*(a^0\pi_{S^*} \times \pi_U) = \mathbf{m}^*(a^0) = \mathbf{m}^*(\varphi a^*)$, первый и последний члены которой дают искомое равенство: $\varphi\mathbf{m}(a^*) = \mathbf{m}^*(\varphi a^*)$.

Далее, $\varphi\mathbf{m}^2(a^*) = \varphi\mathbf{m}(\mathbf{m}(a^*)) = \mathbf{m}^*(\varphi\mathbf{m}(a^*)) = \mathbf{m}^*(\mathbf{m}^*(\varphi a^*)) = \mathbf{m}^*(\mathbf{m}^*(a^0)) = \mathbf{m}^{*2}(a^0)$. Аналогично можно показать, что $\varphi\mathbf{m}^j(a^*) = \mathbf{m}^{*j}(a^0)$; в частности, при $a^* = \rho$ и условии $\varphi\rho = \rho^*$, означающем согласование начальных состояний систем, связанных отношением гомоморфизма φ: $\Sigma \to \Sigma^*$, получаем $\varphi\mathbf{m}^j(\rho) = \mathbf{m}^{*j}(\varphi\rho) = \mathbf{m}^{*j}(\rho^*)$, $j = 1, 2, \ldots$

Преобразуем композицию $\mathbf{M}^i(h)\mathbf{m}^j(\rho)$ для произвольных i и j: $\mathbf{M}^i(h)\ \mathbf{m}^j\ (\rho) \approx \mathbf{M}^{*i}(h^*)\varphi\mathbf{m}^j(\rho) = \mathbf{M}^{*i}(h^*)\mathbf{m}^{*j}(\rho^*)$. Таким образом, одноименные члены функций γ и γ^* для нелинейных систем, связанных отношением гомоморфизма $\Sigma \to \Sigma^*$, эквивалентны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как следует из результатов проведенного анализа, полученную матрицу (11) можно рассматривать как аналог ганкелевой матрицы (10) линейной системы. Интересная особенность матрицы (11) состоит в ее несимметричности в отличие от блочной симметричности матрицы (10). Поскольку элементы матрицы Γ являются марковскими параметрами [3], отсюда можно сделать вывод о том, что марковским параметрам линейной системы соответствуют композиции функций вида $\mathbf{M}^i(h)\mathbf{m}^j(\rho)$ (полагая, что $\mathbf{M}^0(h) = h$, $\mathbf{m}^0(\rho) = \rho$). При этом марковскому параметру HFG соответствует две композиции: $\mathbf{M}(h)\rho$ и $h\mathbf{m}(\rho)$, параметру HF^2G — три: $\mathbf{M}^2(h)\rho$, $\mathbf{M}(h)\mathbf{m}(\rho)$ и $h\mathbf{m}^2(\rho)$ и т. д. Такое “расщепление” можно считать естественным, поскольку оно нередко происходит при введении различного рода обобщений. Как и марковские параметры, композиции вида $\mathbf{M}^i(h)\mathbf{m}^j(\rho)$ можно рассматривать как инварианты дискретной нелинейной динамической системы; необходимо отметить только, что базис таких инвариантов может быть бесконечным [9].

Полученная матрица (11) может быть полезна в теоретических исследованиях по проблеме реализации дискретных нелинейных систем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971. — 400 с.
2. *Arbib M., Manes E.* Foundation of system theory: Hankel matrices // J. Comput. and Syst. Sci. — 1980. — Vol. 20, N 3. — P. 330—378.
3. *Мироновский Л. А.* Моделирование конечномерных систем. Моменты и марковские параметры. — Л.: ЛИАП, 1988. — 78 с.
4. *Жирабок А. Н., Шумский А. Е.* Управляемость, наблюдаемость, декомпозиция нелинейных динамических систем. — Владивосток: ДВГТУ, 1993. — 128 с.
5. *Жирабок А. Н.* Дуальность свойств наблюдаемости и управляемости нелинейных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. — 1998. — № 1. — С. 5—8.
6. *Жирабок А. Н.* Дуальность нелинейных динамических систем // Проблемы управления. — 2005. — № 1. — С. 13—17.
7. *Голдблат Р.* Топосы. Категорный анализ логики. — М.: Мир, 1983. — 488 с.
8. *Щербаков Н. С., Подкопаев Б. П.* Структурная теория аппаратного контроля цифровых автоматов. — М.: Машиностроение, 1982. — 191 с.
9. *Мироновский Л. А.* Функциональное диагностирование линейных динамических систем. — СПб.: МГУ-ГРИФ, 1998. — 296 с.

☎ *(4232) 45-08-64*

E-mail: zhirabok@mail.ru ❑