



# СИГНАЛЬНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

О. В. Стукач

Томский политехнический университет

Предложено новое понятие сигнално-параметрической инвариантности нелинейной системы управления и определены условия инвариантности параметров отклика системы к амплитуде входного сигнала. Рассмотрена связь классической и параметрической инвариантностей систем. Получены соотношения для расчета дефекта инвариантности и рассмотрены способы его уменьшения. Обсуждена возможность оптимизации систем управления по критерию сигнално-параметрической инвариантности.

Проблема инвариантности систем к возмущающим воздействиям была впервые поставлена в теории автоматического управления в связи с необходимостью повышения точности работы систем автоматического регулирования [1, 2]. Под инвариантностью понимают свойство системы противостоять возмущающему воздействию. Если отклик системы не зависит от возмущения, то такая система абсолютно инвариантна, и ошибка авторегулирования равна нулю. Если это свойство выполняется приближенно, то инвариантность системы относительна. В многочисленных работах по теории инвариантности были получены условия независимости реакции системы от возмущающего воздействия и фазовых координат, а также найдены условия физической реализуемости. Хороший обзор этих исследований сделан, например, в работах [3, 4].

Однако классическая теория инвариантности осталась незавершенной, поскольку в ней рассматривается только независимость отклика от возмущений [4, 5]. Это ограничивает класс решаемых задач и означает в большинстве случаев обеспечение помехоустойчивости. В зарубежных работах, появившихся значительно позже отечественных, решение задачи инвариантности рассматривается как поиск обратной связи, компенсирующей возмущение, т. е. еще более узко [6, 7]. Не устоялась терминология: например, не получивший развития термин “инвариантность до  $\epsilon$ ” менее удобен, чем употребляемая в этом же смысле “относительная инвариантность”. В работах по параметрической инвариантности, т. е. исследованию чувствительности отклика системы к изменению ее внутренних параметров, показано, что в случае линейных систем задача обеспечения параметрической инвариантности сводится к задаче сигналной инвариантности, т. е. инвариантности к внешним возмущениям. Но абсолютно не исследованным оказалось свойство неизменности параметров отклика или фазовых координат системы от каких-либо параметров воздействий. Назо-

вем это внешней, *сигнално-параметрической* инвариантностью и покажем, что она имеет гораздо большее значение, чем инвариантность в классическом смысле, причем для систем самого различного назначения.

**Цель работы** заключается в определении сигнално-параметрической инвариантности нелинейных систем управления и условий инвариантности параметров отклика системы к амплитуде воздействия.

Известно, что свойством абсолютной параметрической инвариантности обладают линейные системы. Форма их нормированного отклика не зависит от параметров воздействия. Реакция нелинейных систем в общем случае зависит от параметров воздействия. И поскольку на практике часто используются линеаризованные системы, можно попытаться найти приближение параметров нелинейной системы к линейной. Очевидно, это приведет к улучшению характеристик системы, поскольку система, оставаясь нелинейной, приобретает другое, не менее важное, свойство сигнално-параметрической инвариантности.

Воспользуемся идеей работы [2] и запишем уравнение состояния системы в виде:

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j' + b_{ij}x_j) = \begin{cases} Ef(t), & i = 1 \\ 0, & i = \overline{2, n} \end{cases}, \quad (1)$$

с откликом

$$h(t) = \sum_{j=1}^n g_j x_j, \quad (2)$$

где  $x_i$  — фазовые координаты;  $x_j'$  — их производные по времени  $t$ ;  $E$  — амплитуда входного воздействия  $f(t)$ ;  $n$  — число фазовых координат или порядок системы;  $a_{ij}$  — нелинейные функции или коэффициенты;  $b_{ij}$ ,  $g_j$  — коэффициенты. Система (1) инвариантна в классическом

смысле, если ее отклик не зависит от хотя бы одного возмущающего воздействия:

$$h(t) = \text{inv}[f(t)].$$

Назовем систему (1) сигнально-инвариантной, если хотя бы один параметр её отклика не зависит хотя бы от одного параметра воздействия. Например, соотношение  $\sigma = \text{inv}[E]$  характеризует инвариантность перерегулирования  $\sigma$  к амплитуде воздействия. Очевидно, устойчивая линейная система параметрически инвариантна. Параметры нелинейной системы в общем случае зависят от параметров воздействия, поэтому величину

$$\varepsilon = \max_E \|\delta(t) - \delta_l(t)\|/E \rightarrow \min \quad (3)$$

назовем дефектом инвариантности нелинейной системы, который показывает, насколько параметр отклика  $\delta(t)$  нелинейной системы отличается от параметра отклика  $\delta_l(t)$  линейризованной системы. Дефект инвариантности  $\varepsilon$  дает количественную оценку того, насколько неинвариантным к амплитуде воздействия  $E$  является отклик  $\delta(t)$ , поэтому соотношение (3) пригодно для оптимизации систем по критерию инвариантности. Непосредственное вычисление дефекта инвариантности связано с решением системы (1). Для практических целей, однако, требуется лишь оценка (3), что дает возможность сравнивать системы по критерию сигнально-параметрической инвариантности. Очевидно, целью оптимизации нелинейной системы является уменьшение дефекта инвариантности.

Определим условие инвариантности перерегулирования нелинейной системы к амплитуде единичного импульсного воздействия  $1(t)$ . Отклик (2) системы по окончании переходного процесса

$$h_\infty = \sum_{j=1}^n g_j x_{j\infty}.$$

Для устойчивой системы он может быть найден в результате решения системы уравнений (1) при  $a_{ij}=0$ . Введем функцию перерегулирования

$$\delta_i(t) = x_i(t)/x_{i\infty}(t) - 1. \quad (4)$$

Подставляя функцию (4) в уравнение (1), находим

$$\sum_{j=1}^n (A_{ij}\delta_j' + B_{ij}\delta_j) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (5)$$

Продифференцируем по  $E$  систему (5) и поменяем местами независимые операции  $\partial/\partial E$  и  $p = \partial/\partial t$ . Получим:

$$\sum_{j=1}^n (A_{ij}p + \delta_j' \partial A_{ij} / \partial \delta_j + B_{ij}) \partial \delta_j / \partial E = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6)$$

Система (6) линейна относительно  $\partial \delta_j / \partial E$ , поэтому для инвариантности перерегулирования по условию  $\partial \delta_j / \partial E = 0$  требуется равенство нулю определителя, полученного вычеркиванием  $j$ -го столбца и первой строки из определителя системы (6). Абсолютная инвариантность будет достигаться в случае нулевого определителя системы (6), а это возможно только для линейной системы.

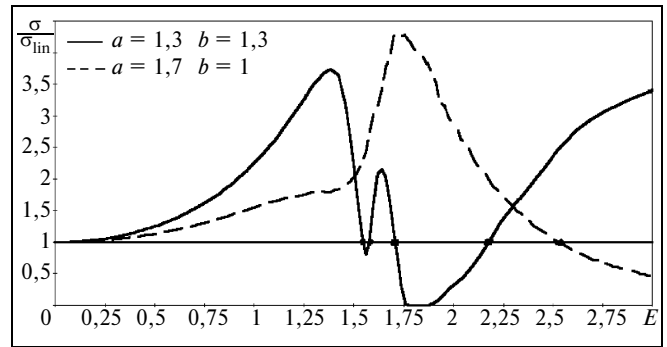


Рис. 1. Зависимость отношения перерегулирования нелинейной системы к перерегулированию линейризованной от амплитуды воздействия

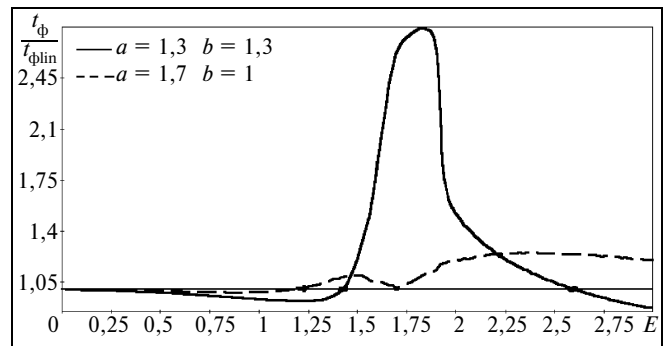


Рис. 2. Зависимость отношения времени фронта импульса нелинейной системы к времени фронта импульса линейризованной от амплитуды воздействия

В качестве примера рассмотрим уравнение инвариантной системы:

$$ax'' + bx' \sin x + x = E. \quad (7)$$

Проведем численную оптимизацию отношения перерегулирования импульсного отклика нелинейной системы (7) к перерегулированию линейризованной системы (без нелинейности  $\sin x$ ) по критерию инвариантности к амплитуде входного импульсного воздействия. Результаты численных расчетов представлены на рис. 1 (штриховые кривые — неоптимизированная система, сплошные — оптимизированная). Горизонтальная линия соответствует линейной системе. В результате оптимизации дефект инвариантности уменьшился. На рис. 2 показано полученное отношение времён фронтов импульсов, которое не оптимизировалось и поэтому оказалось не самым лучшим. На рисунках отмечены точки пересечения кривых для нелинейной и линейной систем с линейной, в которых инвариантность становится абсолютной. Это условие может быть получено из равенства нулю определителя системы (6) и для данного примера имеет вид

$$a + b \sin x + 1 = E.$$

Характерно, что этим условием нельзя воспользоваться без оптимизации. Из примера видно, что применение принципа инвариантности усложняет оптимизацию систем, так как одновременно требуются контроль



качества переходного процесса и обеспечение сигнално-параметрической инвариантности. В отличие от задачи компенсации внешних возмущений в классической теории управления реализация принципа сигнално-параметрической инвариантности имеет свои особенности. Например, в классической теории управления доказано, что принцип инвариантности основан на физическом явлении компенсации возмущения с помощью двух каналов передачи сигнала. Сигнално-параметрическая инвариантность возможна и в одноканальной нелинейной системе, поскольку оптимизацией параметров системы всегда можно добиться относительной инвариантности с допустимой точностью. Поэтому реализация условий относительной инвариантности улучшает качественные показатели систем и позволяет проектировать системы с новыми свойствами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Щипанов Г. В.* Теория и методы проектирования автоматических регуляторов // Автоматика и телемеханика. — 1939. — № 1.
2. *Лузин Н. Н., Кузнецов П. И.* К абсолютной инвариантности и инвариантности до  $\varepsilon$  в теории дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР. — 1946. — Т. 51, № 4. — С. 247—250; № 5. — С. 331—334.
3. *Менский Б. М.* Принцип инвариантности в автоматическом регулировании и управлении. — М.: Машиностроение, 1972. — 248 с.
4. *Theory of Sensitivity in Dynamic Systems, An Introduction* — Mansour Eslami, Reviewed by E. N. Rosenwasser and R. M. Yusupov // IEEE Trans. on Automatic Control. 1999. — Vol. 44, N 5. — P. 1101—1103.
5. *Aranda-Bricaire E., Kotta U.* Generalized Controlled Invariance for Discrete-Time Nonlinear Systems with an Application to the Dynamic Disturbance Decoupling Problem // IEEE Trans. on Automatic Control. 2001. — Vol. 46, N 1. P. 165—171.
6. *D'Alessandro P., De Santis E.* Controlled Invariance and Feedback Laws // IEEE Trans. on Automatic Control. — 2001. — Vol. 46, N 7. P. 1141—1146.
7. *Isidori A., Krener A., Gori-Giorgi C., Monaco S.* Nonlinear decoupling via feedback: A differential geometric approach // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1981. — Vol. 26, N 2. — P. 331—345.

☎ (3822) 26-02-99

E-mail: [tomsk@iee.org](mailto:tomsk@iee.org)

Web: <http://iee.tusur.ru/ru/pages/stukach.htm> □

## МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ "УПРАВЛЕНИЕ ИННОВАЦИЯМИ"

Первая из предполагаемой серии конференций проводимых Институтом проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук совместно с рядом ведущих научно-исследовательских институтов и вузов.

Предполагается обсудить теоретические основы и практические проблемы управления инновациями.

Основные проблемы, которым будет посвящена конференция:

- ✓ инновации и новое качество экономического роста;
- ✓ научно-техническая информация как хозяйственный ресурс и как фактор производства;
- ✓ управление технологической структурой производства на предприятии;
- ✓ макроэкономические предпосылки инновационных процессов;
- ✓ инновации и цикличность экономической динамики;
- ✓ человеческий капитал, его формирование и использование;
- ✓ институциональные аспекты стимулирования инновационных процессов;
- ✓ национальная инновационная система России;
- ✓ инновационный потенциал российских регионов;
- ✓ моделирование и прогнозирование инновационных процессов;
- ✓ инновационная политика государства;
- ✓ стратегия инновационного развития России.

В рамках конференции пройдут Первые друкеровские чтения "**Информационная экономика и современные концепции менеджмента**", посвященные памяти Петра Друкера (1909—2005), выдающегося ученого, специалиста в области институциональной экономики, менеджмента и управленческого консультирования.

*Место и время проведения — 13—15 ноября 2006 г., Москва, Институт проблем управления РАН.*

*Предполагается публикация сборника тезисов докладов к началу конференции.*

*Регистрационный взнос — 700 руб. Оплата производится по прибытии на конференцию.*

Текущую информацию о конференции можно найти на сайте ИПУ РАН: [www.ipu.ru](http://www.ipu.ru).

**Все контакты между Оргкомитетом и участниками осуществляются только по электронной почте:**

**InnovConf@mail.ru или [tas2006@ipu.ru](mailto:tas2006@ipu.ru).**