УДК 519.245.001.57

ПРИМЕНЕНИЕ БАЛАНСНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ОПИСАНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

В.А. Жевнеров

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова, г. Москва

Для количественного описания показателей качества функционирования сети в целом предложено применять балансные уравнения. Приведена структура математического аппарата, эффективность которого показана на конкретном примере.

ВВЕДЕНИЕ

Для математического моделирования процессов, происходящих в больших системах, часто применяются стохастические сети. Известный математический аппарат аналитического описания основных критериев качества функционирования стохастических систем в целом [1], таких как вероятности и моменты времени передачи, достаточно сложен для практической реализации. Задачи описания подобного вида более эффективно могут решаться с помощью уравнений балансного вида на основе потокового представления процессов функционирования сетей.

1. ПРИНЯТЫЕ УСЛОВИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Рассматривается следующая модель стохастической сети:

— сеть состоит из N узлов a_i, $i = \overline{1, N}$;

— узлы a_i и a_j соединяются ориентированными ветвями l_{ij};

— поступление и выход потоков нагрузки осуществляется только через узлы, а все операции над потоками производятся только на ветвях сети;

— отклонение (передача) потока нагрузки с узла a_i на узел a_i по ветви l_{ij} производится с вероятностью p_{ij}, вероятность p_{i0} описывает выход из сети через узел a_i.

Такое представление сети не снижает общности математической модели, но кажется более наглядным для формализации процессов, происходящих в сетях.

Под нагрузкой сети понимается некоторый входящий поток (сообщений, заявок и т. п.).

В дальнейшем для простоты изложения полагается, что в сеть на узел a_1 поступает однородный поток заявок интенсивности λ_0. Рассматривается задача описания критериев качества в виде интенсивностей, вероятностей и моментов времени передачи (обслуживания) потока.

Для аналитического описания стохастических сетей применяется правило Мейсона [2], представляющее собой топологическое уравнение для замкнутых графов в виде

$$H = 1 + (-1)^m \Sigma T(L_m) = 0, \qquad (1)$$

где $\Sigma T(L_m)$ — сумма эквивалентных весов всех петель порядка m. Вес петли определяется в данном случае как произведение значений p_{ij}, соответствующих ветвям l_{ij}, входящим в состав петли. При составлении уравнений вида (1) выходной узел сети соединяется ориентированной ветвью с входным узлом и этой ветви приписывается вес $1/\rho$, где ρ — вероятность выхода из сети через заданный узел.

Отметим, что правило Мейсона в чистом виде применимо для сетей только с одним входом и одним выходом при взаимной независимости вероятностей $\{p_{ij}\}$ и имеет вычислительную сложность порядка $N!$, что размерностях N сети порядка 10 и выше делает применение данного правила практически невозможным.

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТОКА В СЕТИ

Требуется определить распределение потока по ветвям l_{ij}, т. е. значения интенсивностей λ_{ij} и интенсивностей λ_{i0} выходящих потоков.

Система уравнений балансного вида для определения значений $\{\lambda_{ij}\}$ имеет вид:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \sum\limits_{j=2}^{N} \lambda_{j1} + \lambda_0, \quad \lambda_{j1} = \lambda_j p_{j1} \\ \lambda_i = \sum\limits_{j=1, j\neq i}^{N} \lambda_{ji}, \quad \lambda_{ji} = \lambda_j p_{ji}, \quad i = \overline{2, N} \end{cases} \tag{2}$$

где $\lambda_{ij} = \lambda_j p_{ij}$, а λ_j имеет смысл значения интенсивности суммарного потока, поступающего на узел a_j.

Значения интенсивностей λ_{i0} потоков, покидающих сеть через узлы a_i, определяются из соотношений

$$\lambda_{i0} = p_{i0}\lambda_i. \tag{3}$$

Если в сеть одновременно поступают несколько видов потоков, то система уравнений (2)—(3) составляется для каждого из них.

Если в сети для всех i выполняется $\sum\limits_{j=0}^{N} p_{ij} = 1$, это будет соответствовать условию сохранения потока в сети и, очевидно, $\lambda_{01} = \sum\limits_{i=0}^{N} \lambda_{i0}$.

3. ВЕРОЯТНОСТЬ ВЫХОДА ИЗ СЕТИ

В сеть поступает заявка на узел a_1. Требуется определить вероятности ρ_i выхода (обслуживания) заявки из сети через узел a_i.

Система балансных уравнений составляется аналогично выражениям (2)—(3) и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} p_1 = \sum\limits_{j=1}^{N} p_j p_{j1} + 1 \\ p_i = \sum\limits_{j=1}^{N} p_j p_{ji}, \quad i = \overline{2, N} \end{cases} \tag{4}$$

Значения ρ_{i0} определяются из соотношений

$$\rho_i = p_{i0} p_i. \tag{5}$$

Наглядное обоснование перехода от системы уравнений (2) к системе уравнений (4) заключается в представлении поступающей заявки в виде непрерывного потока интенсивности $\lambda_0 = p_0 = 1$. Далее этот поток распределяется по сети в соответствии с вероятностями $\{p_{ij}\}$. В этом случае значения интенсивностей выходящих потоков будут совпадать со значениями ρ_{i0} вероятностей выхода, т. е. $\rho_{i0} = \lambda_{i0}$. Такой подход основан на возможности вычисления вероятностей в виде предела отношения количества событий определенного вида к общему количеству событий на основе закона больших чисел и тождества Вальда [3]. В такой трактовке, очевидно, величины p_i имеют смысл среднего количества поступлений заявки на узлах a_i.

Применение потоковых уравнений для таких сетей сводится к составлению систем линейных уравнений вида (4) и решению их, например, методом Гаусса-Жордана. Сложность вычислений при этом оценивается примерно как N^3. Применение правила Мейсона (1), как нетрудно убедиться, имеет сложность, аналогичную сложности решения системы линейных потоковых уравнений вида (4) по правилу Крамера, т. е. пропорциональную N! Поэтому применение правила Мейсона может представлять интерес в основном для теоретических исследований.

Система уравнений (4) справедлива для общего случая зависимостей $p_{ij} = p_{ij}(\{\lambda_{ij}\})$ и не требует взаимной независимости вероятностей. Системы вида (4) составляются для всех видов поступающих заявок и в общем случае требуют совместного решения.

4. ОПИСАНИЕ МОМЕНТОВ ВРЕМЕНИ ПЕРЕДАЧИ ПО СЕТИ

Рассматривается сеть, описанная в п. 2. Дополнительно заданы $\overline{(\tau_{ij})^n}$ — моменты порядка n времени передачи заявки с узла a_i на узел a_j по ветви l_{ij}. В сеть на узел a_1 поступает однородный поток заявок интенсивности λ_{01}. Распределение потоков $\{\lambda_{ij}\}$ в сети определяется соотношениями (2)—(3). Требуется определить $\overline{(t_i)^n}$ — момент порядка n времени передачи заявки, покидающей сеть через узел a_i.

Поскольку при вычислении момента $\overline{(t_i)^n}$ усреднение производится по значениям интенсивности потоков заявок в сети, уравнения балансного вида, аналогичные уравнениям (2), принимают следующий вид:

$$\lambda_i \overline{(t_i)^n} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} \overline{(t_j + \tau_{ji})^n} = \sum_{j=1}^{N} \left(\lambda_{ji} \sum_{n=0}^{m} C_m^n \, \overline{t_j^n} \, \overline{\tau_{ji}^{m-n}} \right), \quad i = \overline{1, N}, \tag{6}$$

где $\overline{(\tau_{ji})^0} = \overline{(t_j)^0} = 1$.

Для вероятностной сети, описанной в п. 3, соотношения для момента $\overline{(t_i)^n}$ принимают вид:

$$p_i \overline{(t_i)^n} = \sum_{j=1}^{N} \left(p_j p_{ji} \sum_{n=0}^{m} C_m^n \, \overline{t_j^n} \, \overline{\tau_{ji}^{m-n}} \right), \; i = \overline{1, N}. \tag{7}$$

Значения p_i определяются из решения системы уравнений (4).

Очевидно, что для определения момента $\overline{(t_i)^n}$ в соответствии с уравнениями (6) и (7) необходимо определить значения $\overline{(t_i)^m}$, $m = \overline{1, n-1}$. Для этого следует использовать системы уравнений вида (2)—(3) — для определения значений $\{\lambda_i\}$ и $\{\lambda_{ij}\}$ — и $m - 1$ систем уравнений вида (6) или (7), составляемых для 1-го, 2-го, ..., $n - 1$-го моментов времени передачи. В общем случае требуется совместное решение всех составляемых систем уравнений.

5. ПРИМЕР ОПИСАНИЯ

В качестве примера приведем описание критериев λ, ρ, $\bar{t}$, $\overline{t^2}$ для простейшего участка сети (см. рисунок), состоящего из двух узлов a_1 и a_2 и независимо функционирующих ветвей l_{12} и l_{21}.

Поступающий с вероятностью 1 входящий поток заявок интенсивности λ_0 с вероятностью p_{12} отправляется на передачу по ветви l_{12}. Потупающие на узел a_2 заявки с вероятностью p_{21} отправляются на повторную передачу, а с вероятностью p_{20} считаются успешно переданными (выходят из сети). На ветвях l_{12} и l_{21} заданы соответствующие зависимости $\overline{\tau_{12}}$, $\overline{\tau_{12}^2}$, $\overline{\tau_{21}}$ и $\overline{\tau_{21}^2}$. Соотношения для определения значений $\{\lambda_{ij}\}$, $\{\rho_i\}$, $\{\bar{t}_i\}$ и $\{\overline{t_i^2}\}$, составляемые в соответствии с выражениями (2)—(7), принимают следующий вид:

- соотношения (2) для значений $\{\lambda_i\}$:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_0 + \lambda_2 p_{21} \\ \lambda_2 = \lambda_1 p_{12}, \end{cases} \tag{8}$$

откуда $\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_0/(1 - p_{12}p_{21}) \\ \lambda_2 = \lambda_0 p_{12}/(1 - p_{12}p_{21}) \end{cases}$ и $\begin{cases} \lambda_{12} = \lambda_1 p_{12} \\ \lambda_{21} = \lambda_2 p_{21} \\ \lambda_{20} = \lambda_2 p_{20}; \end{cases}$

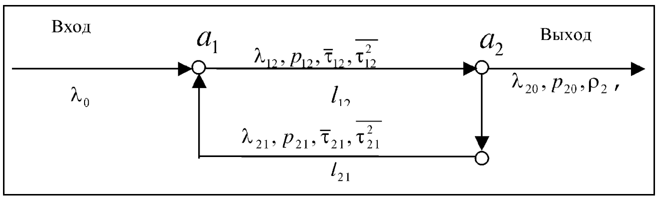

Схема простейшего участка сети

- соотношения (4) для значений $\{\rho_i\}$:

$$\begin{cases} p_1 = p_2 p_{21} + 1 \\ p_2 = p_1 p_{12}, \end{cases} \tag{9}$$

откуда $\begin{cases} p_1 = 1/(1 - p_{12}p_{21}) \\ p_2 = p_{12}/(1 - p_{12}p_{21}) \end{cases}$ и $\rho_2 = p_2 p_{20}$;

- соотношения (6) для значений $\{\bar{t}_i\}$:

$$\begin{cases} \lambda_1 \bar{t}_1 = \lambda_0 \cdot 0 + \lambda_{21}(\bar{t}_2 + \overline{\tau_{21}}) \\ \lambda_2 \bar{t}_2 = \lambda_{12}(\bar{t}_1 + \overline{\tau_{12}}); \end{cases} \tag{10}$$

- соотношения (7) для значений $\{\overline{t_i^2}\}$:

$$\begin{cases} \lambda_1 \overline{t_1^2} = \lambda_{01} \cdot 0 + \lambda_{21}(\overline{t_2^2} + 2\bar{t}_2\overline{\tau_{21}} + \overline{\tau_{21}^2}) \\ \lambda_2 \overline{t_2^2} = \lambda_{12}(\overline{t_1^2} + 2\bar{t}_1\overline{\tau_{12}} + \overline{\tau_{12}^2}). \end{cases} \tag{11}$$

В общем случае системы уравнений (8)—(11) должны решаться совместно.

Для некоторых практических задач, как видно из приведенного примера, система уравнений может допускать декомпозицию, т. е. возможно выделение независимых подсистем уравнений, результаты решения которых используются в следующих образуемых подсистемах. Обычно сначала решаются подсистемы уравнений, описывающие распределение интенсивностей потоков, затем на основе полученных результатов определяются, например, последовательно в порядке возрастания моменты времени доставки. Декомпозиция значительно снижает трудоемкость вычислений.

В заключение отметим, что основная особенность предложенного подхода состоит в обеспечении возможности сведения задачи описания сети в целом к описанию отдельных составляющих — ветвей, фрагментов, подсистем, которое может осуществляться как аналитическими, так и имитационными методами. Применение метода балансных уравнений обеспечивает возможность эффективного сочетания аналитических и имитационных методов при решении задач описания сетей в целом.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Клейнрок Л.* Коммуникационные сети. — М.: Мир, 1970.
2. *Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.* Методы анализа сетей. — М.: Мир, 1984.
3. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1967.

☎ *(095) 334-85-79*

E-mail: zhevn@ipu.rssi.ru

❑