УДК 62-505.5

ПРИМЕНЕНИЕ ЯЗЫКА СЕТЕЙ ПЕТРИ В СИСТЕМАХ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ДЕФИЦИТЕ РЕСУРСОВ

М.Ю. Копнин, В.В. Кульба, Е.А. Микрин

Рассмотрены вопросы распределения ресурсов на комплексе операций. Для моделирования комплекса операций применен язык сетей Петри с задержками в позициях. На основании построенных моделей введены понятия резерва и дефицита ресурсов. Исследованы способы управления комплексом операций в условиях дефицита ресурсов.

ВВЕДЕНИЕ

В теории сетевого планирования и управления математической моделью комплекса операций служит сетевая модель, т. е. ориентированный граф, дугам-операциям которого приписаны веса t_{ij} (продолжительности операций), а вершинам-событиям — веса t_i (сроки наступления событий). Исследованы различные типы сетевых моделей, связанные с вероятностным или детерминированным характером временных оценок и структуры комплекса операций и с видами логических операций, реализуемых событиями. Детально исследованы свойства характеристик сетей, событий и операций, рассмотрены соотношения между резервами времени событий и операций, получены условия существования резервов различных типов, предложены процедуры планирования и управления комплексами операций [1]. Однако при использовании в качестве математической модели комплекса операций сетевых моделей достаточно сложно исследовать причинно-следственные связи между событиями, параллельные процессы и конфликтные ситуации.

В данной работе в качестве математической модели комплекса операций предлагается использовать сети Петри [2, 3], которые обеспечивают не только сочетание мощного математического аппарата и наглядность представления, но и возможность моделирования параллельных процессов и конфликтных ситуаций. Кроме того, исследуются процессы планирования и управления комплексами операций при дефиците ресурсов (отрицательных резервов), характерном при управлении силами и средствами во время ликвидации причин и последствий чрезвычайных ситуаций невоенного характера.

ПРИМЕНЕНИЕ СЕТЕЙ ПЕТРИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ КОМПЛЕКСОВ ОПЕРАЦИЙ

В качестве математической модели комплекса операций будем использовать временную сеть Петри N с задержкой в позициях [3, 4]. Событию, обозначающему начало или окончание некоторой работы, поставим в соответствие переход t_i, срабатывающий мгновенно. В частности, началу и окончанию всех работ будут соответствовать переходы t_0 и t_N. Операции, обозначающей процесс выполнения некоторой работы, будет соответствовать позиция p_j со временем задержки $\gamma(p_j)$, содержательный смысл которой — время выполнения j-ой работы. Метод вычисления функции $\gamma(p_j)$ будет рассмотрен ниже.

Дадим ряд определений из теории сетевого планирования и управления в терминах языка сетей Петри.

Определение 1. *Событие t_2 непосредственно следует за событием t_1, если существует операция (позиция) p такая, что $H(t_1, p) = 1$ и $F(p, t_2) = 1$, где H и F — функции инцидентности.*

При корректном построении сетевой модели в эквивалентной сети Петри каждая позиция имеет один вход и один выход, так как два события сетевой модели могут быть связаны лишь одной операцией.

Определение 2. *Операция p_2 непосредственно следует за операцией p_1, если существует событие (переход) t такой, что $F(p_1, t) = 1$ и $H(t, p_2) = 1$.*

Определение 3. *Путем $W(t', t'')$ от события t' к событию t'' назовем последовательность событий ($t_{k_0} = t'$, t_{k_1}, t_{k_2}, ..., $t_{k_n} = t''$) такую, что для любых t_{k_j} и $t_{k_{j+1}}$ событие $t_{k_{j+1}}$ непосредственно следует за событием t_{k_j}, а $p_{k_{j+1}}$ — соединяющая их операция.*

Для оценивания времени выполнения работ сопоставим каждой позиции (работе) три функции: $\tau_{опт}(p_i)$, $\tau_{пес}(p_i)$, $\tau_{вер}(p_i)$ — соответственно оптимистическое, пессимистическое и наиболее вероятное время выполнения i-й работы.

Эти три оценки даются экспертами для каждого вида работ. По ним можно вычислить среднее время $\tau_{ср}(p_i)$ выполнения i-й работы [5]. Эта величина и выбирается в качестве времени задержки маркера в i-ой позиции: $\gamma(p_i) = \tau_{ср}(p_i)$. Она определяется следующим образом:

$$\tau_{ср}(p_i) = \frac{\tau_{опт}(p_i) + 4\tau_{вер}(p_i) + \tau_{пес}(p_i)}{6}. \qquad (1)$$

Дисперсия в позиции p_i вычисляется следующим образом:

$$\sigma^2(p_i) = \left(\frac{\tau_{пес}(p_i) - \tau_{опт}(p_i)}{6}\right)^2.$$

В сети используются маркеры одного типа. Наличие маркера в позиции p_j означает, что i-я работа выполняется в данный момент времени. Добавим ко множеству позиций P две особые позиции: $p_{нач}$ и $p_{кон}$. Первая из них соответствует началу всех работ и предшествует переходу t_0; $^\bullet p_{нач} = \varnothing$, $p^\bullet_{нач} = \{t_0\}$. Вторая соответствует окончанию всех работ и следует непосредственно за окончанием t_N всех работ в сетевой модели; $^\bullet p_{кон} = \{t_N\}$, $p^\bullet_{кон} = \varnothing$. Здесь и далее $^\bullet p$ означает множество переходов, для которых позиция p является входной, а $p^\bullet$ — множество переходов, для которых эта позиция является выходной. Аналогично, $^\bullet t$ — множество позиций, которые являются входными для перехода t, а $t^\bullet$ — множество его выходных позиций.

Начальную маркировку μ_0 сети N зададим следующим образом:

$$\begin{cases} \mu_0(p_{нач}) = 1 \\ \mu_0(p_i) = 0, i = 1, ..., M, \text{где } M \text{ — число операций} \\ \mu_0(p_{кон}) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $N = \{P, T, F, H, \mu_0, \gamma\}$ — временная сеть Петри, в которой $P = \{p_i\} \cup p_{нач} \cup p_{кон}$, где p_i — операции сетевой модели; $T = \{t_i\}$, где t_i — события сетевой модели; F и H — функции инцидентности, получаемые непосредственно из сетевой модели; μ_0 — начальная маркировка; $\gamma = \gamma(p_i)$ — функция задержки в позиции p_j.

Эквивалентная сетевой модели сеть Петри безопасна, так как сетевая модель не содержит циклов и начальная маркировка сети Петри содержит один маркер (рис. 1).

Рассмотрим время, необходимое для получения некоторого слова $l \in L(N)$ свободного языка сетей Петри. Пусть $l = (l', t_k)$. Поскольку переходы срабатывают мгновенно, то время $\theta(l)$ получения слова l соответствует времени, прошедшему с начала работы сети Петри до срабатывания перехода t_k. Переход t_k однозначно определяет слово l при заданных задержках в позициях сети, так что $\theta(l) = \theta(t_k)$.

Пусть время $\theta(t_i)$ — это наиболее ранний возможный срок свершения i-го события. Обозначим его через $T_E(t_k)$. Он может быть вычислен из соотношений

$$\begin{cases} T_E(t_0) = 0 \\ T_E(t_i) = \max\limits_{p_j \in {}^\bullet t_i}(T_E(t_j) + \gamma(p_j)), \text{где } t_j \in {}^\bullet p_j, \end{cases} \qquad (2)$$

т. е. он определяется как максимум суммарного времени задержек по всем путям, ведущим из t_0 в t_i.

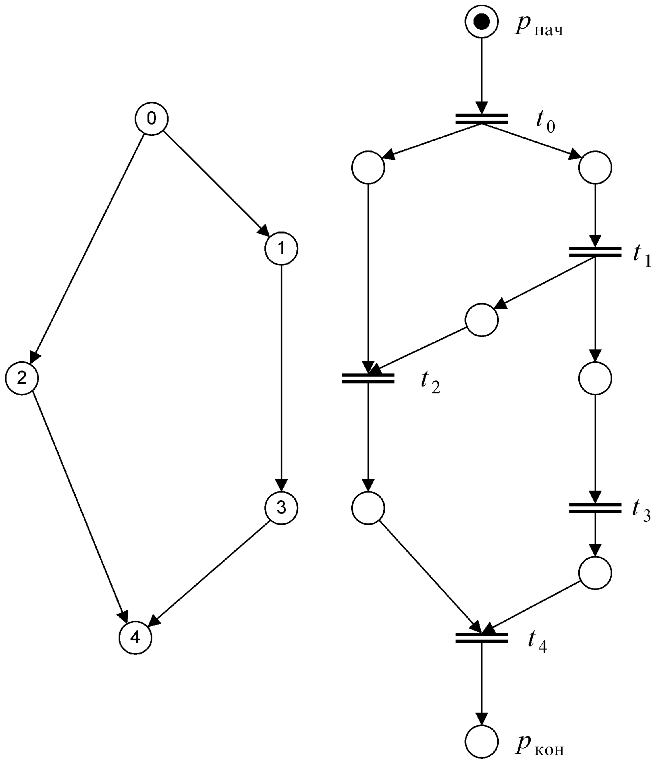

Рис. 1. Сетевая модель (слева) и эквивалентная ей сеть Петри

При этом условие срабатывания перехода t выглядит следующим образом: переход t может сработать, если $\forall p_j \in {}^\bullet t$, верно, что $\mu(p_j) > 0$ и $\theta - T_E(t) \geq \gamma(p_j)$, где μ — текущая разметка сети, а θ — время, прошедшее с начала функционирования сети. Новая маркировка вычисляется по формуле:

$$\mu'(p) = \begin{cases} 1, p \in t^\bullet \\ 0, p \in {}^\bullet t \\ \mu(p), \text{иначе.} \end{cases}$$

При планировании комплекса операций для некоторых переходов (событий) может быть задан директивный срок $T_S(t_i)$, не позже которого должно произойти данное событие. Обычно задается срок окончания всех работ $T_S(t_N)$, сроки же завершения промежуточных событий могут быть заданы или отсутствовать в зависимости от важности этих событий. Для всех t_i может быть рассчитан наиболее поздний допустимый срок $T_L(t_i)$ возникновения события t_i, при котором не нарушаются директивные сроки окончания работ. Для его расчета можно воспользоваться выражением

$$\begin{cases} T_L(t_N) = T_S(t_N) \\ T_L(t_i) = \min\limits_{p_k \in t_i^\bullet}(T_L(t_k) - \gamma(p_k)), \text{где } t_k \in p_k^\bullet. \end{cases}$$

Таким образом, любому переходу t_i ставятся в соответствие две функции: $T_L(t_i)$ и $T_E(t_i)$.

Определение 4. *Резервом* $R(t_i)$ *для i-го события назовем разность* $T_L(t_i) - T_E(t_i)$.

Содержательно это резерв времени, который имеется для достижения i-го события.

Определение 5. *Резервом* $R(W(t', t''))$ *назовем сумму резервов для всех событий, лежащих на этом пути:*

$$R(W(t', t'')) = \sum_{t_i \in W(t', t'')} R(t_i).$$

Определение 6. *Путь* $W_{\text{кр}}(t', t'')$ *с минимальным резервом назовем критическим:*

$$R(W_{\text{кр}}) = \min_{W_i \in W(t', t'')} R(W_i).$$

Можно рассчитать вероятность $P(t_i, T_S(t_i))$ наступления некоторого события t_i в срок $T_S(t_i)$:

$$P(t_i, T_S(t_i)) = P_{\text{ном}}\left(\frac{T_S(t_i) - T_E(t_i)}{\sqrt{\sum_{\sigma_{T_E}} \sigma(p_j)^2}}\right),$$

где $P_{\text{ном}}(x)$ — нормальное распределение величины x, а $\sigma_{T_E} = \{\sigma(p_j)\colon p_j \in W(t_0, t_i)\}$, т. е. дисперсии в позициях, лежащих на пути от начального перехода t_0 к переходу t_i.

Определение 7. *Критический путь* $W_{\text{кр}}$ *от события* t_0 *к событию* t_N *назовем критическим путем выполнения всех работ.*

В зависимости от резерва на этом пути можно говорить об избытке ($R(W_{\text{кр}}) > 0$), недостатке ($R(W_{\text{кр}}) < 0$) и критическом количестве ($R(W_{\text{кр}}) = 0$) ресурсов. Удовлетворительным решением задачи считается такое распределение ресурсов, когда $T_E(t_N) \leqslant T_S(t_N)$, т. е. представляется возможным закончить все работы не позже директивного срока.

Если $T_E(t_N) > T_S(t_N)$ и выполнение всех работ в срок маловероятно, можно прибегнуть к перераспределению ресурсов: определить избыток или недостаток ресурсов для любого события t_i и, основываясь на этой информации, принять решение о перераспределении ресурсов с целью уменьшить время $T_E(t_N)$ до значения, не превышающего директивного срока $T_S(t_N)$. Перераспределение ресурсов выражается в задании новых временных оценок $\tau_{\text{опт}}(p_i)$, $\tau_{\text{пес}}(p_i)$ и $\tau_{\text{вер}}(p_i)$ для некоторых операций p_i. Лицо, принимающее решение (ЛПР), может снять некоторое количество ресурсов с операции p_i, лежащей на пути к событию t', резерв которого положителен, и передать его на операцию p_j, лежащую на пути к событию с отрицательным резервом (т. е. нехваткой ресурсов).

В зависимости от количества ресурсов для операции p_i эксперт может оценить оптимистическое, пессимистическое и наиболее вероятное время выполнения этой операции. Для нового распределения ресурсов можно снова рассчитать значение $T_E(t_N)$ и сравнить его с директивным сроком $T_S(t_N)$. Если путем перераспределения ресурсов не удается уменьшить время $T_E(t_N)$ до значения, не превышающего директивного срока $T_S(t_N)$, то имеет смысл пересмотреть директивные сроки выполнения всех работ или привлечь резервы извне.

Рассмотрим процесс распределения ресурсов более детально. Пусть имеется K видов ресурсов. Через r_i^j обозначим количество ресурса i-го типа, используемое при выполнении j-й операции. Если данный тип ресурса не используется при выполнении j-й операции, то $r_i^j = 0$. Время выполнения операции зависит от используемых ресурсов, поэтому временные оценки $\tau_{\text{опт}}(p_j)$, $\tau_{\text{пес}}(p_j)$ и $\tau_{\text{вер}}(p_j)$ можно рассматривать как функции r_i^j, ..., r_K^j: $\tau_{\text{опт}}(r_i^j, ..., r_K^j)$, $\tau_{\text{пес}}(r_i^j, ..., r_K^j)$, $\tau_{\text{вер}}(r_i^j, ..., r_K^j)$. Далее по формулам (1) и (2) рассчитывается время $T_E(t_N)$. Таким образом, задачу о распределении ресурсов можно поставить следующим образом: выполнить работу как можно быстрее, не превысив срока $T_S(t_N)$ и затратив имеющиеся ресурсы. Математическая формулировка этой задачи выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \min T_E(t_N) \\ T_E(t_N) \le T_S(t_N) \\ \sum_{j=1}^{M} r_i^j \le r_i^0,\ i = 1, ..., K, \end{cases}$$

где третье условие означает ограничения на ресурсы i-го типа. Может быть поставлена задача выполнения работ в срок при минимальных затратах ресурсов:

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{M} r_i^j \\ T_E(t_N) \le T_S(t_N) \\ \sum_{j=1}^{M} r_i^j \le r_i^0,\ i = 1, ..., K. \end{cases}$$

Также можно поставить задачу о выполнении работ в срок при минимальных затратах на ресурсы:

$$\begin{cases} \min \sum_{i=1}^{K} c_i \sum_{j=1}^{M} r_i^j \\ T_E(t_N) \le T_S(t_N) \\ \sum_{j=1}^{M} r_i^j \le r_i^0,\ i = 1, ..., K, \end{cases}$$

где c_i — стоимость единицы ресурсов i-го типа.

Часто приходится планировать выполнение работ в условиях нехватки времени и ресурсов. Если не удается уменьшить время $T_E(t_N)$ до значения, не превышающего срока $T_S(t_N)$, т. е. выполнить работы в установленный срок, то имеет смысл говорить о дефиците времени.

Определение 8. *Дефицитом времени для достижения события* t_i *назовем разность* $D(t_i) = T_E(t_i) - T_S(t_i)$.

Очевидно, что $D(t_i) = -R(t_i)$. Будем говорить о наличии резерва времени для достижения события t_i, если $T_E(t_i) < T_S(t_i)$, т. е. $R(t_i) > 0$, и о дефиците времени в противном случае, т. е., если $D(t_i) > 0$.

Определение 9. *Дефицитом $D(W(t', t''))$ на пути W назовем суммарный дефицит времени для всех событий, лежащих на этом пути:*

$$D(W(t', t'')) = \sum_{t_i \in W(t', t'')} D(t_i).$$

Определение 10. *Путь $W_{кр}(t', t'')$ с максимальным дефицитом времени назовем критическим:* $D(W_{кр}) = \max_{W_i \in W(t', t'')} D(W_i)$.

Определение 11. *Общим дефицитом времени назовем дефицит времени для завершения всех работ:* $D_0 = D(t_N) = T_E(t_N) - T_S(t_N)$.

Для уменьшения общего дефицита времени необходимо выделить дополнительные ресурсы для выполнения некоторых работ, лежащих на критическом пути $W_{кр}(t_0, t_N)$. При этом могут возникнуть новые критические пути.

В условиях дефицита времени задача распределения ресурсов может ставиться следующим образом: минимизировать общий дефицит времени, используя имеющиеся в распоряжении ресурсы, т. е. выполнить работы как можно быстрее. Математическая формулировка этой задачи выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \min D(t_N) \\ \sum_{j=1}^{M} r_i^j \le r_i^0, \ i = 1, ..., K, \end{cases}$$

где второе условие означает ограничения на ресурсы i-го типа.

Некоторые виды работ могут иметь первостепенную важность и в любом случае должны быть выполнены в срок. События $t_i^{кр}$, соответствующие окончанию таких работ, назовем критическими. Обозначим через $T^{кр}$ множество всех критических событий. В этом случае задача распределения ресурсов может быть поставлена следующим образом:

$$\begin{cases} \min D(t_N) \\ T_E(t_i) \le T_S(t_i), \ t \in T^{кр} \\ \sum_{j=1}^{M} r_i^j \le r_i^0, \ i = 1, ..., K, \end{cases}$$

где $T_S(t_i)$ – срок окончания i-ой критической работы.

Если перераспределение ресурсов на сети не приводит к удовлетворительным результатам, может быть пересмотрена последовательность выполнения работ и скорректирована структура сети Петри. На полученной таким образом новой сети Петри ставятся аналогичные задачи.

ОБОБЩЕННЫЙ ДЕФИЦИТ

Пусть имеется график работ, представленный некоторой сетевой моделью. Временные оценки выполнения некоторой работы (наиболее вероятная, оптимистическая и пессимистическая) являются функциями ресурсов, выделенных на выполнение этой работы.

Поскольку некоторые из запланированных работ могут быть сходными по природе и различаться лишь объемом затрачиваемых ресурсов, то целесообразно разделить работы по видам. Для выполнения различных работ одного вида требуются ресурсы одного и того же вида. Подобное разделение позволит понизить размерность решаемых в дальнейшем оптимизационных задач.

Пусть в процессе выполнения работ могут быть использованы ресурсы K видов $r_1, ..., r_K$ для выполнения M видов работ. Тогда каждой запланированной работе p_j будет соответствовать пара: q_j – вид работы $q_j \in \{1, ..., M\}$ и h_j – объем работы ($h_j \geqslant 0$).

Каждый ресурс единичной мощности может выполнять различные виды работ с различной эффективностью. Можно ввести матрицу эффективности размерности $K \times M$, элементы k_{ij} которой равны эффективности выполнения некоторой единицы работы j-го вида i-ым единичным ресурсом. Таким образом, некоторую работу может выполнять средство, для этой работы не предназначенное, но справляющееся с ней с ненулевой эффективностью.

При корректном задании матрицы эффективности время выполнения работы p_j вида q_j и объема h_j является функцией суммарной эффективности ресурсов, выделенных на ее выполнение:

$$\tau_j = h_j \cdot f\left(\sum_{i=1}^{N} n_{ij} k_{iq_j}\right),$$

где n_{ij} – мощность i-го ресурса, выделенного на выполнение работы p_j.

Если в качестве эффективности k_{ij} взять величину, обратную времени выполнения единицы работы j-го вида i-ым единичным ресурсом, то

$$\tau_j = \frac{h}{\sum_{i=1}^{N} n_{ij} k_{iq_j}}. \quad (3)$$

Оценка эффективности k_{ij} может быть трех видов: оптимистическая, пессимистическая и наиболее вероятная, и временнбя оценка τ_j может быть также трех видов.

Введем понятие обобщенного дефицита.

Для некоторого события t_i определим наиболее раннее возможное время его наступления $T_E(t_i)$ описанным ранее образом, т. е. как максимум суммарного времени выполнения работ по всем путям, ведущим в событие t_i из начальной вершины. Для события t_i может быть задан директивный срок $T_S(t_i)$, не позже которого должно произойти данное событие. Если событие не произошло в срок $T_S(t_i)$, то имеют место некоторые потери. Дефицитом времени для достижения события t_i была названа разность $D(t_i) = T_E(t_i) - T_S(t_i)$. В случае, если эта разность отрицательна, будем считать, что $D(t_i) = 0$. Для события t_i введем функцию потерь $e_i(t)$, которая моделирует потери в результате просрочки директивного времени наступления i-го события на время t.

Определение 12. *Обобщенным дефицитом для достижения события t_i назовем величину $D_0(t_i) = e(T_E(t_i) - T_S(t_i))$.*

Содержательный смысл обобщенного дефицита — потери, возникающие при наличии временного дефицита для достижения события t_i. Наиболее важные события, невыполнение которых в срок приносит большие потери, имеют более крутую функцию потерь e_i. Можно установить пороговое значение потерь, превышение которого недопустимо, т. е. для события t_i могут быть введены ограничения: $D_0(t_i) \leqslant E_i$.

Определение 13. *Обобщенным дефицитом $D_0(W(t', t''))$ на пути W назовем суммарный обобщенный дефицит для всех событий, лежащих на этом пути:*

$$D_0(W(t', t'')) = \sum_{t_i \in W(t', t'')} D_0(t_i). \tag{4}$$

По аналогии с обобщенным дефицитом для событий может быть определен обобщенный дефицит для их последовательности и установлено пороговое значение потерь для пути W, превышение которого недопустимо: $D_0(W(t', t'')) \leqslant E_{t't''}$.

По аналогии с определением 6 может быть введено понятие критического пути в смысле обобщенного дефицита.

Определение 14. *Путь $W_{\text{кр}}(t', t'')$ с максимальным обобщенным дефицитом назовем критическим.*

Критический путь в смысле обобщенного дефицита может не совпадать с критическим путем в смысле дефицита времени, который, в свою очередь, отличается от критического пути в терминах сетевого планирования.

Теперь может быть поставлена задача минимизации обобщенного дефицита (суммарных потерь) при некоторых ограничениях на ресурсы, которые могут быть двух типов: невосполнимые и восполнимые. Ограничение на невосполнимые ресурсы выглядит следующим образом:

$$\sum_{j=1,\ldots,M} n_{ij} \leqslant N_i,$$

т. е. суммарная мощность i-го ресурса ограничена на всем комплексе работ величиной N_i.

Ограничение на восполнимые ресурсы выглядит следующим образом:

$$\sum_{j=1,\ldots,M} n_{ij}(\theta') \leqslant N_i,$$

т. е. одновременно может быть использована ограниченная мощность i-го ресурса. Здесь $n_{ij}(\theta')$ — мощность i-го ресурса, выделенная для выполнения j-ой работы в момент времени θ'. Считается, что переброска ресурсов с одних работ на другие происходит мгновенно.

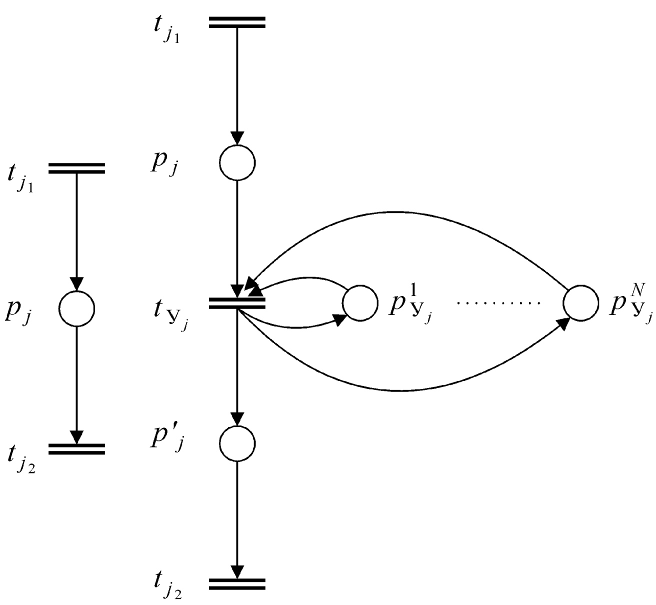

Рис. 2. Фрагмент сети с управляющим переходом и управляющими позициями

Для моделирования обобщенного дефицита в терминах сетей Петри поставим в соответствие каждому событию сетевой модели переход t_i, а каждой операции (работе) — позицию p_j, как это делалось ранее. На этой сети зададим начальную маркировку μ_0 такую, что в начальной позиции находится один маркер ω, а остальные позиции пусты. Наличие маркера ω в позиции p_j означает, что в данный момент выполняется j-ая работа. Заменим каждую позицию p_j фрагментом сети, показанном на рис. 2.

Время задержки маркеров в позициях p_j, p_j', $p^1_{У_j}$, ..., $p^N_{У_j}$ равно нулю. Время срабатывания перехода $t_{У_j}$ равно времени выполнения соответствующей работы и зависит от количества поступающих на него маркеров.

Число маркеров, находящихся в позициях $p^1_{У_j}$, ..., $p^N_{У_j}$, соответствует емкости ресурса r_i, выделенного для выполнения работы p_j. Управляющие позиции могут быть объединены в сеть Петри, моделирующую, например, транспортную сеть для переброски ресурсов с одних работ на другие. Суммарная мощность маркеров, моделирующих выделенные ресурсы, на сети ограничена и может уменьшаться при срабатывании управляющих переходов. Это может означать истощение ресурсов по мере их участия в выполнении работ.

При срабатывании управляющего перехода $t_{У_j}$ маркер переходит в позицию p_j' (работа выполнена), после чего может сработать переход t_{j_2}.

Время срабатывания управляющего перехода вычисляется по формуле (3). На основании времен выполнения работ, полученных по формуле (1), по формуле (2) может быть вычислен наиболее ранний возможный срок достижения событий. Далее по формуле (4) вычисляется обобщенный дефицит D_0.

Начальная маркировка выглядит следующим образом: один маркер находится в позиции $p_{нач}$, а в управляющих позициях находится то количество маркеров, которое выделено для выполнения соответствующих работ. В процессе функционирования сети Петри вычисляется и оценивается обобщенный дефицит. В случае его неприемлемости можно перераспределить ресурсы или, по возможности, привлечь новые ресурсы извне.

При дефиците ресурсов важно выделение операций, повреждение которых вызовет невыполнение работ в заданный срок или выход из строя всей системы. Множество таких операций назовем множеством уязвимости комплекса операций.

Определение 15. *Множеством уязвимости комплекса операций назовем множество $R_a = \{t_i\}$, такое, что $t_i \in R_a$, если при исключении операции t_i из комплекса операций $T_E(t_N) > T_S(t_N)$.*

Операции $t_i \in R_a$ назовем критическими операциями. Отметим, что в системе могут оказаться операции, исключение которых из комплекса операций не повлечет существенного изменения срока выполнения всех работ.

Определение 16. *Множеством избыточности комплекса операций назовем множество $R_И = \{t_i\}$, такое, что $t_i \in R_И$, если при исключении операции t_i из комплекса операций $T_E(t_N) < T_S(t_N) + \delta$, где δ — допустимое отклонение от директивного срока.*

При дефиците ресурсов встает задача минимизации потерь путем перераспределения имеющихся ресурсов. Выделение множества уязвимости позволяет выявить «тонкие места» комплекса операций, которые нужно обеспечить ресурсами в первую очередь. Ресурсы можно привлечь, сняв их с избыточных операций $t_i \in R_И$. Однако при таком перераспределении ресурсов могут появиться новые критические операции.

В процессе перераспределения ресурсов между операциями следует определить, какие из операций наиболее важные, а выполнением каких можно пренебречь. Для этого определим приоритетность среди операций.

Пусть невыполнение операции t_i влечет за собой невыполнение множества операций $\{t_j\}$.

Определение 17. *Множество $R_a^i = t_i \cup \{t_j\}$ назовем множеством отказа для операции t_i.*

Множество отказа для операции содержит саму эту операцию, а также те операции, к невыполнению которых она приводит.

Пусть c_i — ущерб, к которому приведет невыполнение одной операции t_i.

Определение 18. *Суммарным ущербом от невыполнения операции t_i назовем величину $C_i = \sum_{j \in R_a^i} c_i$.*

В процессе перераспределения ресурсов операции могут быть проранжированы в соответствии с их суммарным ущербом C_i.

Если внутренних ресурсов системы недостаточно для выполнения работ в срок, то необходимо привлечь дополнительные ресурсы извне для обеспечения выполнения работ $t_i \in R_a$ или реструктурировать систему с целью уменьшения мощности множества уязвимости. В этом случае целесообразно ввести дополнительные операции, которые будут дублировать критические операции из множества уязвимости. В результате введения новых операций возможно возникновение дополнительных избыточных операций. Избыточные операции, с одной стороны, отвлекают на себя дополнительные ресурсы, но, с другой стороны, они могут дублировать критические операции, делая систему более устойчивой к повреждениям.

Вновь созданная структура комплекса операций, в свою очередь, может быть исследована на наличие критических операций.

МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ В УСЛОВИЯХ ДЕФИЦИТА РЕСУРСОВ

При дефиците ресурсов ставятся задачи такого их перераспределения, чтобы сохранить работоспособность системы и уменьшить время достижения конечного результата.

Можно выделить три группы методов анализа системы и управления ресурсами в условиях их дефицита:

- выделение критических событий и попытка максимизировать вероятность их предотвращения благодаря реструктуризации системы и отказа от ряда работ;
- выделение магистральных путей и перераспределение ресурсов с целью максимального обеспечения ими множества магистральных путей;
- определение «курса действий», когда на каждом шаге моделирования определяется ближайшая цель, перераспределяются ресурсы для её достижения и, по достижении, повторно анализируется система для выявления новой цели.

Выделение критических событий. Под таковыми понимаются события, возникновение которых приводит к выходу системы из строя. Ставится задача минимизации вероятности возникновения таких событий путем перераспределения ресурсов или реструктуризации системы. Цель этой задачи состоит в уменьшении мощности множества уязвимости R_a. Основные методы её решения состоят в дублировании критических операций, обеспечении критических событий дополнительными ресурсами (возможно, из-за отказа от других видов работ) и реструктуризации системы с введением новых технологических цепочек.

В соответствие каждому событию (переходу) сети N ставится вероятность его возникновения $P(t_i)$, которая может быть рассчитана как сумма произведений вероятностей получения слов терминального языка сетей Петри, содержащих переход t_i:

$$P(t_i) = 1 - \prod_{\substack{m \in L(t_0, t_N) \\ t_i \in l_m}} \left(1 - \prod_{t_k \in l_m} P(t_k)\right).$$

При дублировании критической операции система выйдет из строя, если все операции из дублирующей группы выйдут из строя. Вероятность возникновения критической ситуации на этом звене вычисляется как произведение вероятностей возникновения каждой из операций, входящих в дублирующую группу.

Вероятность выхода системы из строя может быть вычислена как вероятность возникновения хотя бы одного события из множества уязвимости R_a:

$$P_{\text{авар}} = 1 - \prod_{t_i \in R_a}\left(1 - \prod_{\substack{m \in L(t_0, t_N) \\ t_i \in l_m}} \left(1 - \prod_{t_k \in l_m} P(t_k)\right)\right),$$

которая минимизируется введением ряда новых путей выполнения работ, моделируемых словами языка сетей Петри $L(t_0, t_N)$. При наличии ограничений на множестве $L(t_0, t_N)$ старые пути могут быть отброшены.

Математическая формулировка этой задачи выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \min\limits_{L(t_0, t_N)} \left[1 - \prod\limits_{t_i \in R_a}\left(1 - \prod\limits_{\substack{m \in L(t_0, t_N) \\ t_i \in l_m}} \left(1 - \prod\limits_{t_k \in l_m} P(t_k)\right)\right)\right] \\ R(L(t_0, t_N)) \le r, \end{cases}$$

где $R(L(t_0, t_N))$ — некоторая мера, вводимая на множестве слов языка сетей Петри, а r — некая ограничительная константа. В качестве меры может быть принята суммарная мощность используемых в системе ресурсов.

Выделение магистральных путей. Магистральным путем назовем такой путь $W_M(t_0, t_N)$, что при выполнении всех лежащих на этом пути работ достигается конечная цель комплекса операций. Задача состоит в максимальном обеспечении ресурсами всех операций множества магистральных путей, возможно, отказавшись от других работ. При использовании языка сетей Петри магистральным путем будет любое слово терминального языка сетей Петри $l_i \in L(t_0, t_N)$, полученное при достижении конечной маркировки.

Магистральным множеством назовем множество $R_m = \{t_k\}$, в которое входят все работы магистральных путей $W_{M_i}(t_0, t_N)$. Операция t_i принадлежит множеству $W_{M_i}(t_0, t_N)$, если найдется такое слово языка сетей Петри $l_j \in L(t_0, t_N)$, что $t_i \in l_j$. Дополнение магистрального множества $\overline{R}_m$ будет содержать те работы, от которых можно отказаться, сохранив систему в работоспособном состоянии. Высвободившиеся ресурсы можно распределить по оставшимся работам магистрального множества путей. Оптимизационная задача в этом случае имеет вид:

$$\begin{cases} \min D(t_N) \\ \sum\limits_{j=1}^{M} r_i^j \le r_i^0,\ i = 1, ..., K \\ r_i^j = 0,\ t_j \in \overline{R}_a,\ i = 1, ..., K. \end{cases}$$

Определение «курса действий». Данный метод предполагает динамическое перераспределение ресурсов по мере развития системы. Его применение может не приводить к оптимальному решению проблемы с точки зрения конечной цели, но он позволяет более чутко реагировать на изменения, происходящие в системе, и минимизировать текущие потери.

На n-ом шаге итерации ставится некоторая цель t_n и решается задача перераспределения ресурсов с целью максимально быстрого ее достижения:

$$\begin{cases} \min T_E(t_n) \\ \sum\limits_{j=1}^{M} r_i^j \le r_i^0,\ i = 1, ..., K, \end{cases}$$

где второе условие означает ограничения на ресурсы i-го типа. Может быть поставлена задача выполнения работ в срок при минимальных затратах ресурсов:

$$\begin{cases} \min \sum\limits_{i=1}^{K}\sum\limits_{j=1}^{M} r_i^j \\ T_E(t_n) \le T_S(t_n) \end{cases}$$

или задача выполнения работ с использованием ресурсов минимальной стоимости:

$$\begin{cases} \min \sum\limits_{i=1}^{K} c_i \sum\limits_{j=1}^{M} r_i^j \\ T_E(t_n) \le T_S(t_n) \\ \sum\limits_{j=1}^{M} r_i^j \le r_i^0,\ i = 1, ..., K. \end{cases}$$

По достижении цели ставится очередная $(n + 1)$-ая цель и решается аналогичная задача.

Здесь следует различать два типа ресурсов: неиссякаемые ресурсы, количество которых на каждом шаге остается постоянным (единицы техники и, с некоторыми ограничениями, людские ресурсы), и иссякаемые ресурсы, имеющие некий лимит и расходующиеся по мере выполнения работ (это могут быть материалы, топливо, провизия и т. д.). С учетом этого оптимизационная задача на n-ом шаге итерации имеет вид:

$$\begin{cases} \min T_E(t_n) \\ \sum_{j=1}^{M} r_i^j \le r_i^0, r_i \in R_I \\ \sum_{j=1}^{M} r(n)_i^j \le r_i^0 - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{M} r_i^j(t), r_i \in R_{II}, \end{cases}$$

где R_I и R_{II} — множество ресурсов первого и второго типов.

Оптимальность «курса действий» главным образом зависит от выбора последовательности целей t_n. Задача выбора целевой последовательностей $\{t_n\}$ в общем случае является переборной задачей и может быть решена методом ветвей и границ. На практике ближайшая цель выбирается ЛПР эвристически.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основании модели комплекса операций, построенной с использованием языка сетей Петри с задержками, введены понятия резерва и дефицита ресурсов. Поставлены задачи оптимального распределения ресурсов и получены способы управления комплексом операций в условиях дефицита ресурсов.

В дальнейшем, на основании введенных понятий резерва и дефицита ресурсов, могут быть введены понятия эффективности и гибкости комплекса операций в целом. С помощью вновь введенных понятий могут быть поставлены задачи не только оптимального распределения ресурсов на имеющемся комплексе операций, но и построения оптимальной структуры самого комплекса: добавление новых операций, их удаление или изменение способа из выполнения. Может быть введена операция предпочтения для комплексов операций, реализующих одну и ту же функцию.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурков В.Н., Ланда Б.Д., Ловецкий С.Е.* и др. Сетевые модели и задачи управления. — М.: Сов. радио, 1967.
2. *Питерсон Дж.* Теория сетей Петри и моделирование систем. — М.: Мир, 1984.
3. *Berthomieu B., Diaz M.* Modelling and verification of time dependent systems using time Petri nets // IEEE Trans. on Software Eng. — 1991. — Vol. 17, N. 3. — P. 259 — 273.
4. *Макаров И.М., Назаретов В.М., Кульба А.В., Швецов А.Р.* Сети Петри с разноцветными маркерами // Техническая кибернетика. — 1987. — № 6.
5. *Бурков В.Н., Ловецкий С.Е.* Методы решения экстремальных задач комбинаторного типа // Автоматика и телемеханика. — 1968. — № 11.

☎ *(095) 334-90-09*

E-mail: kulba@ipu.rssi.ru

❑

ABSTRACTS

Durgarian I.S., Pashchenko F.F.

COMBINED STATISTICAL CRITERIA AND THE MODELS OPTIMAL SUBJECT TO A CLASS OF CRITERIA

The problems of stochastic system modeling and identification subject to combined criteria are considered. Criteria equivalence conditions are formulated. Equivalence conditions for the models built subject to different identification criteria are derived.

Kopnin M.Yu., Kul'ba V.V., Mikrin E.A.

APPLICATION OF PETRI NET TOOLS IN NETWORK PLANNING AND MANAGEMENT SYSTEMS UNDER RESOURCE DEFICIT CONDITIONS

The problems of resource allocation over a set of operations are considered. Petri nets with position delays are applied for modeling an operation set. Based on the models developed, the concepts of stockpile and resource deficit are introduced. The ways of operation set management under resource deficit conditions are investigated.