

ISSN 1819-3161

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

1/2015

CONTROL  SCIENCES

Редакционный совет

Акад. РАН С.Н. Васильев, акад. РАН С.В. Емельянов, чл.-корр. РАН И.А. Каляев, акад. РАН В.А. Левин, чл.-корр. РАН Н.А. Махутов, акад. РАН Е.А. Микрин, чл.-корр. РАН П.П. Пархоменко, чл.-корр. РАН А.Ф. Резчиков, акад. РАН Е.А. Федосов

Редколлегия

Д-ра техн. наук Ф.Т. Алескеров, В.Н. Афанасьев, Н.Н. Бахтадзе, канд. техн. наук Л.П. Боровских (зам. гл. редактора), д-ра техн. наук В.Н. Бурков, В.А. Виттих, В.М. Вишневский, А.А. Дорофеюк, д-р экон. наук В.В. Клочков, д-ра техн. наук С.А. Краснова, О.П. Кузнецов, В.В. Кульба, А.П. Курдюков, д-ра физ.-мат. наук А.Г. Кушнер, А.А. Лазарев, д-ра техн. наук В.Г. Лебедев, А.С. Мандель, д-р биол. наук А.И. Михальский, д-р экон. наук Р.М. Нижегородцев, чл.-корр. РАН Д.А. Новиков (гл. редактор), д-ра техн. наук Б.В. Павлов, Ф.Ф. Пашенко (зам. гл. редактора), д-р физ.-мат. наук Л.Б. Рапопорт, д-ра техн. наук Е.Я. Рубинович, В.Ю. Рутковский, д-р физ.-мат. наук М.В. Хлебников, д-р техн. наук А.Д. Цвиркун, д-р физ.-мат. наук П.Ю. Чеботарёв, д-р техн. наук И.Б. Ядыкин

Руководители региональных редакционных советов

Владивосток – д-р техн. наук О.В. Абрамов (ИАПУ ДВО РАН)
Волгоград – д-р физ.-мат. наук А.А. Воронин (ВГУ)
Воронеж – д-р техн. наук С.А. Баркалов (ВГАСУ)
Курск – д-р техн. наук С.Г. Емельянов (ЮЗГУ)
Липецк – д-р техн. наук А.К. Погодаев (ЛГТУ)
Пермь – д-р техн. наук В.Ю. Столбов (ПНИПУ)
Ростов-на-Дону – д-р техн. наук Г.А. Угольницкий (ЮФУ)
Самара – д-р техн. наук В.Г. Засканов (СГАУ)
Саратов – д-р техн. наук В.А. Твердохлебов (ИПТМУ РАН)
Уфа – д-р техн. наук Б.Г. Ильясов (УГАТУ)



CONTROL SCIENCES

**Научно-технический
журнал**

6 номеров в год

ISSN 1819-3161

Издается с 2003 года

УЧРЕДИТЕЛЬ

**Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН**

Главный редактор

чл.-корр. РАН

Д.А. Новиков

**Заместители главного
редактора**

Л.П. Боровских, Ф.Ф. Пашенко

Редактор

Т.А. Гладкова

Выпускающий редактор

Л.В. Петракова

Издатель

ООО «Сенсидат-Плюс»

Адрес редакции
117997, ГСП-7, Москва,
ул. Профсоюзная, д. 65, к. 410.

Тел./факс (495) 334-92-00

E-mail: pu@ipu.ru

Интернет: <http://pu.mtas.ru>

Оригинал-макет
и электронная версия
подготовлены
ИП Прохоров О. В.

Фото на четвертой странице обложки
Е.Г. Александрова

Отпечатано в ИПУ РАН

Заказ № 14

Подписано в печать
10.02.2015 г.

Журнал зарегистрирован
в Министерстве Российской
Федерации по делам печати,
телерадиовещания и средств
массовых коммуникаций

Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС 77-49203 от 30 марта 2012 г.

Журнал входит в Перечень ведущих
рецензируемых журналов и изданий,
в которых должны быть опубликованы
основные научные результаты
диссертаций на соискание ученой
степени доктора и кандидата наук

Подписные индексы:

80508 и 81708 в каталоге Роспечати;
38006 в объединенном каталоге

«Пресса России»

Цена свободная

© Федеральное государственное
бюджетное учреждение науки
Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

1.2015

СОДЕРЖАНИЕ

Обзоры

Горбанева О.И., Угольников Г.А., Усов А.Б. Модели коррупции
в иерархических системах управления 2

Математические проблемы управления

Масталиев Р.О. Необходимые условия оптимальности особых управлений
в задаче оптимального управления дискретно-непрерывной
системой 11

Системный анализ

Щербатов И.А. Распределение локальных целей в компонентных структурах
сложных слабоформализуемых систем 19

Информационные технологии в управлении

Миронов А.М., Михеев А.Г., Пятацкий В.Е. Алгоритм проверки
ограниченности числа точек управления в экземпляре бизнес-процесса. . . 30

Управление в социально-экономических системах

Богомолова И.С., Гриненко С.В., Задорожная Е.К. Индекс человеческого
развития и гендерное равенство: взаимообусловленность показателей 38

Зверев О.В., Хаметов В.М. Квантильное хеджирование опционов
европейского типа на неполных рынках без трения. Ч. 2. Минимаксное
хеджирование. 47

Яндыбаева Н.В., Кушников В.А. Математические модели, алгоритмы
и комплексы программ для мониторинга эффективности образовательной
деятельности вуза. 53

Горошко И.В., Бондаренко Ю.В. Согласование социальных
и экономических показателей развития региона: понятие
и механизмы 63

Ростова Е.П. Модель стимулирования при управлении рисками
в системе промышленных предприятий 73

Спирина В.С. Постановка задачи управления объектами коммерческой
недвижимости с учетом потребительских предпочтений 81

* * *

Contents and abstracts 88

МОДЕЛИ КОРРУПЦИИ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

О.И. Горбанева, Г.А. Угольников, А.Б. Усов

Представлена концепция математического моделирования коррупции в иерархических системах управления. Сформулированы основные положения концепции, даны определения основных используемых при моделировании понятий. Построены и исследованы ряды последовательно усложняемых моделей административной и экономической коррупции в статическом и динамическом случаях. Выявлены зависимости коррупционного поведения и описаны возможности борьбы с коррупцией при различных значениях параметров моделей.

Ключевые слова: иерархическая система управления, коррупция, оптимизационные и теоретико-игровые модели.

ВВЕДЕНИЕ

Пионерской работой по математическому моделированию коррупции считается статья С. Роуз-Аккерман [1]. Указанная работа является адаптацией идей Г. Беккера, относящихся к моделированию абстрактного рода преступлений и методике выбора соответствующих наказаний [2]. Согласно Беккеру, борьба с преступностью целесообразна, если в ее результате сокращение ущерба от преступности превысит затраты на борьбу. Эти идеи развиты в монографиях Роуз-Аккерман [3, 4].

Подробный обзор и анализ статических моделей коррупции в иерархических организациях дан в работе А. Мишры [5], где имеется обширная библиография. Детальный разбор моделей этого класса приводится также в учебном пособии [6]. Среди работ российских авторов отметим работы [7–11].

Количество публикаций по динамическим моделям коррупции в иерархических системах управления не слишком велико. В основном такие модели являются многошаговыми теоретико-игровыми, в которых динамика управляемой системы явно не описывается. В одной из первых работ этого направления [12] рассматривается рекурсивная постановка задачи, в которой учитывается, что если контролер вступает в сделку с проверяемым, то он сам может быть пойман и ему, в свою очередь, придется включиться в коррупционную це-

почку уже в качестве дающей стороны. Авторы показали, что при определенных условиях повышение вероятности наказания имеет больший эффект в борьбе с коррупцией, чем увеличение штрафа. В статье [13] рассматривается двухшаговая модель «принципал — контролер — агент», в которой принципал использует нелегальный характер сделок контролера и исполнителя и может благодаря этому в долгосрочном периоде получить больший выигрыш, чем в краткосрочном. В статье [14] показано, что при правильном определении значений переговорной силы институциональные особенности китайской системы лицензирования делают коррупцию структурно устойчивым исходом, а некоторые действия по контролю могут привести к контринтуитивным последствиям. В качестве адекватной меры борьбы с коррупцией предлагается введение конкуренции среди лицензирующих органов. В работе [15] изучается «цепочка» бюрократических органов, которую должен пройти предприниматель для одобрения своего проекта. Детально характеризуются равновесия в «триггерных» стратегиях, позволяющих минимизировать социальные потери от коррупции. В статье [16] изучается влияние природных ресурсов на коррупцию и его зависимость от качества демократических институтов. На основе теоретико-игровой модели показано, что природная рента увеличивает коррупцию только при слабых институтах. В работе [17] исследуется роль «несклонности



к вине» у чиновников на основе модели повторяющейся психологической игры. Изучается зависимость поведения чиновников и лоббирующих структур от общественных ожиданий, которые могут быть постоянными или меняться со временем. Отдельно отметим статьи [18, 19], в которых исследуются модели экономического роста с учетом коррупции.

Авторская концепция моделирования коррупции в иерархических системах управления [20–37] основывается на положениях, сформулированных в § 1. В основном настоящая статья представляет собой реферативное изложение авторского подхода к моделированию коррупции, подробно изложенного в монографии [38].

1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

- Базовой схемой моделирования служит иерархическая система «принципал — супервайзер — агент-объект» в различных модификациях и ее теоретико-игровое исследование. В динамических моделях состояние объекта описывается явно, в статических рассматривается только воздействие агента на объект. Коррупции подвержен средний уровень управления (супервайзер), верхний уровень управления (принципал) считается некоррупцированным и выполняет функции борьбы с коррупцией.
- Предполагаются известными определенные требования устойчивого развития управляемой системы (объекта). В динамических моделях они формулируются в терминах состояния объекта, а в статических — в терминах воздействия агента на объект. Если требования устойчивого развития выполняются, то задача принципала считается решенной даже при наличии коррупции.
- Пары «принципал — супервайзер» и «супервайзер — агент» состоят в отношениях «ведущий — ведомый». Ведущий игрок (принципал или супервайзер соответственно) для достижения своих целей применяет методы принуждения (преимущественно административно-законодательные воздействия) и побуждения (преимущественно экономические воздействия); при математической формализации принуждение означает воздействие ведущего на множество допустимых стратегий ведомого (как правило, без обратной связи), а побуждение — на функцию выигрыша ведомого (как правило, с обратной связью).
- Различаются административная коррупция, при которой за взятку ослабляются административные требования, и экономическая коррупция, при которой взятка позволяет ослабить экономические требования верхнего уровня управления.

При моделировании административная коррупция означает принуждение агента супервайзером с обратной связью по размеру взятки, а экономическая коррупция — побуждение агента супервайзером с дополнительной обратной связью по размеру взятки.

- Коррупция представляет собой угрозу устойчивому развитию объекта, поскольку взяточнику выгодно в обмен на взятку ослаблять требования устойчивого развития. С другой стороны, коррупция есть специфическая форма обратной связи в иерархических системах управления, в силу которой управляющие воздействия становятся функциями размера взятки.
- Коррупция существует в форме попустительства и вымогательства. При попустительстве законодательно установленный набор услуг гарантируется, а дополнительные послабления предоставляются в обмен на взятку. При вымогательстве взятка требуется уже для предоставления базового уровня услуг, в противном случае требования ужесточаются.
- Поведение взяточника характеризуется сговорчивостью, т. е. готовностью ослабить административные или экономические требования в обмен на взятку, и жадностью, т. е. ценой этих послаблений. Предложен набор количественных показателей сговорчивости и жадности.
- Взятка может представлять собой часть выигрыша, получаемого агентом благодаря административным или экономическим послаблениям («откат»), либо некоторую абсолютную сумму («откуп»). В обоих случаях переменную взятки удобно считать долей от коррупционного выигрыша либо от общего дохода агента соответственно.
- При описании коррупции в иерархических системах управления с учетом требований устойчивого развития применимы дескриптивный и нормативный подходы. В случае дескриптивного подхода функции административной или экономической коррупции считаются известными, и основная задача состоит в идентификации их параметров по статистическим данным. В случае нормативного подхода вид функции взяточничества определяется в результате решения оптимизационной или теоретико-игровой задачи.
- Исследование коррупции в системе «принципал — супервайзер — агент» возможно с трех позиций. Если функция взяточничества известна, то с позиции агента коррупция может быть описана оптимизационной моделью. С позиции супервайзера возникает иерархическая параметрическая игра. С позиции принципала задача борьбы с коррупцией заключается в нахождении таких значений параметров управления, при которых с учетом

найденной оптимальной стратегии супервайзера удовлетворяются требования устойчивого развития.

- Задача идентификации (выбора класса используемых функций и определения численных значений параметров) здесь отнюдь не тривиальная и требует проведения специальных исследований и экспертиз. Методологический смысл идентификации состоит в том, что каждый набор значений параметров определяет конкретную социально-экономико-политическую систему, подверженную коррупции.

- Целесообразно строить «генетические» ряды последовательно усложняемых моделей, все более точно описывающих реальные феномены коррупции в иерархических системах управления. Основная логическая схема такого усложнения в статике имеет вид «оптимизационные модели — иерархические игры двух лиц — иерархические игры трех лиц», а в динамике — «задачи оптимального управления — иерархические динамические игры двух лиц — иерархические динамические игры трех лиц».

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОРРУПЦИИ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Статические модели

Последовательность статических моделей коррупции имеет вид «оптимизационная модель — иерархическая игра двух лиц — иерархическая игра трех лиц». В случае экономической коррупции последняя модель в базовой форме может быть записана как

$$J_p(p, r, b) = (1 - p)r \rightarrow \max, \quad 0 \leq p \leq \bar{p}, \quad (1)$$

$$J_S(p, r, b) = pr + b \rightarrow \max, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad (2)$$

$$J_A(p, r, b) = -r - b \rightarrow \max, \quad 0 \leq b \leq 1. \quad (3)$$

Здесь J_p , J_S и J_A — функции выигрыша принципала, супервайзера и агента соответственно, p — доля собранных налогов, идущая на поощрение супервайзера, $\bar{p}$ — максимально возможное для принципала значение p , r — налоговая ставка, r_0 — законодательный размер налоговой ставки, b — доля дохода агента, идущая на взятки. Предполагается, что при наличии экономической коррупции $r = r(b)$, т. е. реальный размер налоговой ставки может зависеть от взятки (например, налоговый инспектор может закрыть глаза на налоговую недоимку или исчисление налогов по незаконной льготной схеме).

С позиции агента рассматривается задача оптимизации (3) при заданной функции $r(b)$. Например, при $r(b) = r_0 - Ab^k$, $k > 0$, оптимальный для агента размер взятки есть

$$b^* = \begin{cases} (kA)^{1/(1-k)}, & 0 < k < 1, \\ 0, & k > 1 \wedge 0 < A < 1, \\ 1, & k > 1 \wedge 1 < A < 1 + r_0. \end{cases}$$

Следующим элементом «генетического ряда» служит модель (2), (3), рассматриваемая как игра Гермейера Γ_2 [39]. В этом случае ε -оптимальная гарантирующая стратегия супервайзера имеет вид

$$\tilde{r}^*(b) = \begin{cases} 0, & b = r_0 - \varepsilon, \\ r_0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для иерархической игры трех лиц (1)–(3) можно вывести условия выгоды взятки $p\Delta r < b < \Delta r$, $\Delta r = r_0 - r(b)$.

В случае административной коррупции иерархическая игра трех лиц в базовой форме может быть записана как

$$J_p(q, s, u, b) = -M|s - s_0| \rightarrow \max, \quad 0 \leq q \leq \bar{s}, \quad (4)$$

$$J_S(q, s, u, b) = bf(u) \rightarrow \max, \quad q \leq s \leq \bar{s}, \quad (5)$$

$$J_A(q, s, u, b) = (1 - b)f(u) \rightarrow \max, \\ 0 \leq u \leq 1 - s, \quad 0 \leq b \leq 1. \quad (6)$$

Здесь J_p , J_S и J_A — вновь функции выигрыша принципала, супервайзера и агента соответственно; b — доля дохода агента, идущая на взятки; u — усилие агента; $f(u)$ — доход агента как функция его усилия; s — переменная управления супервайзера такая, что величина $1 - s$ ограничивает сверху усилие агента («квота»); s_0 — законодательно установленное значение s ; $\bar{s}$ — максимально возможное значение s ; q — переменная управления принципала, ограничивающая величину s снизу; M — коэффициент штрафа, налагаемого на принципала при нарушении условия устойчивого развития $s = s_0$. Предполагается, что при наличии административной коррупции $s = s(b)$, т. е. в обмен на взятку супервайзер может увеличивать квоту (например, разрешать больший вылов рыбы или выдавать разрешительные лицензии недостаточно подготовленным соискателям).

С позиции агента рассматривается задача оптимизации (6) при заданной функции $s(b)$. Поскольку естественно считать, что функция $f(u)$ мо-



нотонно возрастает, то задачу (6) можно переписать в виде

$$J_A(b) = (1 - b)f(1 - s(b)) \rightarrow \max, \quad 0 \leq b \leq 1.$$

Например, при $g(b) = (1 - b)(s_0 + Ab)^k$ оптимальный для агента размер взятки

$$b^* = \begin{cases} 0, & A < s_0/k, \\ \frac{kA - s_0}{(1 - k)A}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Следующим элементом «генетического ряда» служит модель (5), (6), рассматриваемая как игра Гермейера Γ_2 . В этом случае при $f(u) = \sqrt{u}$ ε -оптимальная гарантирующая стратегия супервайзера имеет вид

$$\tilde{s}^*(b) = \begin{cases} 0, & b = 1 - \varepsilon - \sqrt{1 - \bar{s}}, \\ \bar{s}, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (7)$$

При рассмотрении полной модели (4)–(6) как принципал, так и агент могут применять стратегии принуждения либо побуждения. Если они оба применяют принуждение, то при $f(u) = \sqrt{u}$ ε -оптимальная гарантирующая стратегия супервайзера имеет вид

$$\tilde{s}^*(b) = \begin{cases} q, & b = 1 - \varepsilon - \sqrt{1 - \bar{s}}, \\ \bar{s}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

и тогда выбором $q = s_0$ принципал обеспечивает выполнение требований устойчивого развития. В остальных случаях ε -оптимальная гарантирующая стратегия супервайзера имеет вид (7), и принципал не может воздействовать на супервайзера.

2.2. Динамические модели

Последовательность динамических моделей коррупции имеет вид «задача оптимального управления — иерархическая динамическая игра двух лиц — иерархическая динамическая игра трех лиц». Без существенного ограничения общности будем говорить о задачах оптимальной эксплуатации биоресурсов. В этом случае уравнение динамики управляемой системы с начальными условиями можно записать в виде

$$\frac{dx}{dt} = h(x(t)) - u(t)x(t), \quad x(0) = x_0. \quad (8)$$

Здесь $x(t)$ — биомасса эксплуатируемой (например, рыбной) популяции, $u(t)$ — доля вылова, h — некоторая функция динамики численности одно-

родной популяции; x_0 — значение биомассы в начальный момент времени. В качестве примера функции $h(x(t))$ рассмотрим функцию Мальтуса, т. е. $h(x(t)) = \varepsilon x(t)$, $\varepsilon = \text{const}$.

Общий доход от рыболовства равен aux , где a — цена единицы биомассы (зависимость от времени для простоты опускаем). Будем считать, что доля r этой величины (где r можно трактовать как налоговую ставку с учетом возможной коррупции) изымается в пользу принципала (государства), а доля $1 - r$ остается агенту (рыболовному предприятию). Возможны и другие интерпретации переменной экономического воздействия r , например, штраф. В свою очередь, принципал отдает долю p от своей части в качестве зарплаты (или премии) супервайзеру (чиновнику службы рыбного хозяйства), а долю $1 - p$ оставляет себе. Наконец, агент выделяет долю b своего дополнительного дохода при налоговой ставке, которая в результате коррупции фактически оказывается меньше законодательно установленной r_0 , на взятку супервайзеру. Таким образом, целевой функционал агента можно записать в виде

$$J_A(r(\cdot), u(\cdot), b(\cdot)) = \int_0^T (a(1 - r(t))u(t) - ab(t)(r_0 - r(t))u(t) - cu^2(t)x(t))dt \rightarrow \max. \quad (9)$$

Здесь $cu^2(t)$ — затраты агента на вылов доли биомассы $u(t)$; T — период рассмотрения; $a(r_0 - r(t))u(t)x(t)$ — налоговая недоимка (экономия агента на недоплате налогов, на которую супервайзер «закрывает глаза» за взятку); $ab(t)(r_0 - r(t))u(t)x(t)$ — «откат» агента супервайзеру с этой суммы.

При экономической коррупции налоговая ставка представляет собой функцию доли взятки, определяющей размер отката. Если рассмотрение ведется с позиции агента, то эта функция считается заданной. Например, можно использовать нелинейную функцию попустительства вида

$$r(b(t)) = r_0(1 - b^k(t)), \quad k = \text{const}. \quad (10)$$

Здесь в левой части стоит фактическая ставка налога, первое слагаемое правой части r_0 — ее законодательное значение, а второе слагаемое — его послабление в обмен на взятку. В частности, $r(0) = r_0$, $r(1) = 0$. Подставляя значение (10) в целевой функционал (9), получаем

$$J_A(r(\cdot), u(\cdot), b(\cdot)) = \int_0^T (a(1 - r_0 + r_0 b^k(t) - r_0 b^{k+1}(t))u(t) - cu^2(t)x(t))dt. \quad (11)$$

Добавляя ограничения на управления

$$0 \leq b(t) \leq 1; \quad 0 \leq u(t) \leq 1, \quad (12)$$

получаем задачу оптимального управления (8), (11), (12). Конечно, наряду с функцией (10) можно использовать и другие функции экономической коррумпции. Большой интерес представляет идентификация функции $r(b)$ на основе фактических данных о коррупции. Мы оставляем эту непростую задачу для дальнейших исследований.

Если рассмотрение ведется с позиции супервайзера, то функция $\tilde{r}(t) = r(b(t))$ ищется как решение игры типа Γ_{2t} между супервайзером и агентом [39]. Целевой функционал супервайзера можно записать в виде

$$J_S(\cdot) = \int_0^T ([p(t)r(t) + b(t)(r_0 - r(t))]au(t)x(t) - K\mu(r_0 - r(t)))dt \rightarrow \max. \quad (13)$$

Он рассматривается с ограничениями на управления

$$0 \leq r(t) \leq r_0. \quad (14)$$

Второе слагаемое в подынтегральной функции в выражении (13) представляет собой штраф, налагаемый на супервайзера при обнаружении налоговой недоимки, где K — размер штрафа, μ — вероятность поимки. Значения K и μ характеризуют возможности принципала по борьбе с коррупцией (т. е. обеспечению условия $r(t) = r_0$) путем побуждения. В целом, соотношения (8), (9) и (12)–(14) определяют дифференциальную иерархическую игру двух лиц вида Γ_{2t} .

Наконец, целевой функционал принципала можно записать как

$$J_P(p(\cdot), r(\cdot), u(\cdot), b(\cdot)) = \int_0^T [au(t)x(t)(1 - p(t))r(t) - M(x(t) - \bar{x})^2]dt \rightarrow \max. \quad (15)$$

Здесь $\bar{x}$ — значение биомассы, оптимальное для устойчивого состояния популяции; M — коэффициент штрафа, налагаемого на принципала при отклонении текущего значения биомассы от оптимального. Предполагается, что принципал применяет метод побуждения, которому соответствует управляющая переменная

$$0 \leq p(t) \leq 1. \quad (16)$$

Первое слагаемое в подынтегральной функции в выражении (15) означает доход принципала, второе — штраф, налагаемый на него при нарушении

требований устойчивого развития. В целом соотношения (8), (9) и (12)–(16) определяют дифференциальную иерархическую игру трех лиц. Ее регламент зависит от применяемых принципалом методов управления. Если принципал применяет побуждение — то игра Γ_{1t} или Γ_{2t} в зависимости от того, считается ли функция $p(t)$ зависящей только от времени или также от управления супервайзера. Игра между супервайзером и агентом всегда имеет вид Γ_{2t} [35], поскольку при описании коррупции принципиально наличие обратной связи по размеру взятки.

Задача оптимального управления (8), (11), (12) решается аналитически (вид решения опустим в силу громоздкости). Для решения динамических иерархических игр двух и трех лиц предлагаются алгоритмы, основанные на изложенных в работе [40] идеях.

Последовательность динамических моделей административной коррупции структурно аналогична представленной выше. Различие заключается в том, что теперь квота на долю вылова представляет собой функцию взятки, что приводит к задаче оптимального управления со связанными ограничениями. Для решения таких задач и динамических иерархических игр на их основе построены соответствующие алгоритмы.

3. ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ КОРРУПЦИИ В ИЕРАРХИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Разработаны прикладные модели коррупции при управлении производственными системами и инвестиционно-строительными проектами, модели борьбы с хищениями электроэнергии, модели распределения ресурсов с учетом коррупции, динамические модели эксплуатации биоресурсов и контроля качества водных ресурсов. Ввиду ограниченного объема статьи рассмотрим только два примера.

3.1. Модели коррупции при управлении инвестиционно-строительными проектами

Рассмотрим модель экономической коррупции в постановке:

$$g_1(r, b) = (k + b)f(r) - pMb \rightarrow \max, \quad 0 \leq r \leq 1,$$

$$g_2(r, b) = (1 - b)f(r) \rightarrow \max, \quad 0 \leq b \leq 1. \quad (17)$$

Пусть агент участвует в конкурсе, проводимом супервайзером; здесь r — выделяемый при победе на конкурсе ресурс (в долях от единицы), $f(r)$ — доход агента от его использования, k — коэф-



фициент заинтересованности супервайзера в эффективном использовании ресурса (в долях от единицы), b — доля взятки, p — вероятность обнаружения взятки, M — штраф супервайзера в случае обнаружения взятки. Положим $f(r) = a\sqrt{r}$ и будем считать, что $\tilde{r} = r(b)$. Применение теории Гермейера дает оптимальную гарантирующую стратегию супервайзера в виде

$$\tilde{r}^*(b) = \begin{cases} 1, & b = b^* = \begin{cases} 1, & a > pM, \\ 0, & a < pM, \end{cases} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (18)$$

Стратегия (18) эффективна при $a > pM$; в этом случае справедливо $g_1(r^*, b^*) = a > 0 = g_1(0, 0)$. При $a < pM$ стратегия (18) эффективна лишь формально, так как в любом случае оптимальной стратегией агента является отказ от дачи взятки, при этом $g_1(0, 0) = g_1(r^P, 0) = 0$. Итак, коррупция экономически невыгодна агенту, если его производственные возможности меньше ущерба супервайзера при обнаружении взятки, в противном случае агенту приходится давать максимальную взятку.

Обобщим модель (17) для случая древовидной структуры управления с супервайзером и несколькими агентами в виде

$$g_S(r, b) = \sum_{i=1}^n (k + b_i) a_i \sqrt{r_i} - pM \sum_{i=1}^n b_i \rightarrow \max, \\ \sum_{i=1}^n r_i = 1, \quad r_i \geq 0,$$

$$g_i(r_i, b_i) = a_i(1 - b_i) \sqrt{r_i} \rightarrow \max, \\ 0 \leq b_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Здесь $a_i \sqrt{r_i}$ — производственная функция i -го агента, a_i — тип агента, характеризующий его производственные возможности, r_i — выделяемый i -му агенту ресурс в обмен на взятку b_i . Суммарный доход системы определяется величиной $G = \sum_{i=1}^n a_i \sqrt{r_i}$; условие $G \geq A$ можно трактовать как требование устойчивого развития.

В рамках дескриптивного подхода к моделированию рассмотрим сначала бескоррупционный механизм распределения ресурсов пропорционально производственным возможностям агентов вида

$$\tilde{r}_i^0 = r_i(a_1, \dots, a_n) = a_i \left/ \sum_{j=1}^n a_j \right., \quad b_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$\text{В этом случае } G_0 = \sum_{i=1}^n a_i \sqrt{r_i} \left/ \sqrt{\sum_{j=1}^n a_j} \right., \quad g_S^0 = kG^0.$$

Теперь рассмотрим коррупционный механизм распределения ресурсов пропорционально размерам взяток

$$\tilde{r}_i^b = r_i(b_1, \dots, b_n) = b_i \left/ \sum_{j=1}^n b_j \right., \quad i = 1, \dots, n.$$

На нижнем уровне управления возникает игра агентов в нормальной форме

$$g_i(b_1, \dots, b_n) = a_i(1 - b_i) \sqrt{b_i} \left/ \sqrt{\sum_{j=1}^n b_j} \right. \rightarrow \max, \\ 0 \leq b_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n. \quad (19)$$

Равновесие по Нэшу в игре (19) имеет вид $b_1 = \dots = b_n = b^*$, $b^* = \frac{n-1}{3n-1}$, откуда $r_i(b^*, \dots, b^*) = 1/n$, $i = 1, \dots, n$. Тогда

$$G^b = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n a_i;$$

$$g_S^b = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(k + \frac{n-1}{3n-1} \right) \sum_{i=1}^n a_i - \frac{pMn(n-1)}{3n-1}.$$

Для сравнения результатов в бескоррупционном и коррупционном случаях положим $n = 2$ и рассмотрим два характерных варианта.

1) $a_1 = a_2 = a$.

$$G^0 = \frac{2a\sqrt{a}}{\sqrt{2a}} = a\sqrt{2}, \quad g_S^0 = ka\sqrt{2},$$

$$G^b = \frac{1}{\sqrt{2}} 2a = a\sqrt{2} = G^0,$$

$$g_S^b = \frac{1}{\sqrt{2}} (k - 1/5) 2a = \frac{(5k+1)a\sqrt{2} - 2pM}{5},$$

$$g_S^b - g_S^0 = a\sqrt{2} - 2pM/5.$$

Таким образом, при равенстве производственных возможностей агентов суммарные доходы системы в коррупционном и бескоррупционном случаях совпадают. Чтобы сделать коррупционный механизм невыгодным для супервайзера, необходимо обеспечить выполнение условия $2pM > a\sqrt{2}$.

$$2) a_1 = 2a, a_2 = a.$$

$$G^0 = \frac{2a\sqrt{2a} + a\sqrt{a}}{\sqrt{a+2a}} = \frac{a\sqrt{3}(2\sqrt{2}+1)}{3}, \quad g_S^0 = kG^0,$$

$$G^b = \frac{1}{\sqrt{2}} 3a = \frac{3a\sqrt{2}}{2}, \quad g_S^b = \frac{3a(\sqrt{2}) - 4pM}{10},$$

$$G^0 - G^b = \frac{a}{2} (2\sqrt{6} + \sqrt{3} - 3\sqrt{2}) \approx 1,2a > 0,$$

$$g_S^b - g_S^0 = (5ka(9\sqrt{2} - 4\sqrt{6} - 2\sqrt{3}) + 9a\sqrt{2} - 12pM)/30 \approx (a(12,7 - 0,25k) - 12pM)/30.$$

Таким образом, при двукратном различии производственных возможностей агентов суммарный доход системы при коррупции снижается. Чтобы сделать коррупцию невыгодной для супервайзера, следует обеспечить выполнение условия (приближенного) $12pM > a(12,7 - 0,25k)$.

3.2. Модели борьбы с хищениями электроэнергии

Рассмотрим иерархическую систему вида принципал (энергетическая компания) — супервайзер (работник-контролер) — агент (обслуживаемое предприятие). Обозначим: p — доля от дохода компании, идущая на премию работнику; q — доля выявленных случаев подлога; b — доля «отката»; s — сообщаемое контролером значение энергопотребления, кВт·ч; r — истинное значение энергопотребления, кВт·ч, c — цена 1 кВт·ч электроэнергии, руб.; a — затраты компании на выявление всех случаев подлога, руб.; M — штраф за подлог, руб./кВт·ч.

Тогда имеем: cs — доход компании; pcs — премия работника; $c(r - s)$ — цена скрытого энергопотребления (доход от недоплаты); $bc(r - s)$ — «откат»; aq — затраты компании на контроль; $Mq(r - s)$ — штраф при выявлении подлога в размере $r - s$.

Модель можно записать в виде

$$g_p(p, q, s) = (1 - p)cs - aq \rightarrow \max, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad 0 \leq q \leq 1, \quad (20)$$

$$g_S(p, q, s, b) = pcs + (bc - Mq)(r - s) \rightarrow \max, \quad 0 \leq s \leq r, \quad (21)$$

$$g_A(s, b) = c(1 - b)(r - s) \rightarrow \max, \quad 0 \leq b \leq 1. \quad (22)$$

Рассмотрим сначала ситуацию с позиции агента с функцией выигрыша (22). Пусть функция

«информационной коррупции» $s = s(b)$ известна. В простейшем иллюстративном случае будем считать ее линейной функцией размера взятки: $s(b) = r(1 - b)$.

Таким образом, в отсутствие коррупции ($b = 0$) контролер сообщает принципалу истинное значение потребления $s = r$, а при максимально возможном «откате» $b = 1$ не показывает потребление вообще ($s = 0$). Тогда задача оптимизации агента имеет вид

$$g_A(b) = crb(1 - b) \rightarrow \max, \quad 0 \leq b \leq 1,$$

ее очевидное решение $b^* = 1/2$, при этом

$$s^* = r/2, \quad g_A(b^*) = cr/4, \quad cb^*(r - s^*) = cr/4,$$

$$g_p(p, q, s^*) = (1 - p)cr/2 - aq.$$

Далее, рассматривая задачу оптимизации супервайзера (20), получаем условие неманипулируемости механизма передачи информации о потреблении электроэнергии:

$$Mq \geq c(b - p). \quad (23)$$

В этом случае $s^* = r$, т. е. супервайзеру выгодно сообщать истинное значение энергопотребления. Заметим, что при нарушении условия (23) супервайзеру, напротив, выгодно вообще не показывать энергопотребление ($s^* = 0$).

Теперь рассмотрим иерархическую игру Γ_2 (21), (22) супервайзера и агента, считая управления принципала p, q параметрами. Тогда оптимальная гарантирующая стратегия супервайзера (т. е. механизм управления, который он сообщает агенту в качестве правила своего поведения) имеет вид

$$\tilde{s}^*(b) = \begin{cases} r, & Mq > c(b - p), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Это правило побуждает агента выбирать долю отката из условия $b > r + Mq/c$, чтобы избежать применения супервайзером стратегии наказания $r^P(b) = r$. Итак, при любом «откате» супервайзеру выгодно сообщать истинную информацию об энергопотреблении, если выполнено условие неманипулируемости (23), и вообще не показывать (на практике — максимально занижать) его значение, если условие (23) нарушается. Поэтому для борьбы с хищениями принципал должен обеспечить выполнение условия (23) различными методами иерархического управления (принуждением или



побуждением). Решения задач принуждения и побуждения имеют вид соответственно

$$q^* = \begin{cases} 1, & c(b-p)/M > 1, \\ c(b-p)/M, & 0 \leq c(b-p)/M \leq 1, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$p^* = \begin{cases} 1, & b - Mq/c > 1, \\ b - Mq/c, & 0 \leq b - Mq/c \leq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Ясно, что чем больше доля «отката», тем значительнее должны быть усилия принcipала по борьбе с коррупцией как административными, так и экономическими методами. При некоторых значениях параметров оптимальное решение становится экономически нереальным (принципал должен отдать все средства на премию или контроль).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем основные результаты, полученные при моделировании коррупции в иерархических системах управления (ИСУ).

- Разработана концепция моделирования коррупции в ИСУ на основе теории управления устойчивым развитием, ее основные положения апробированы при построении конкретных моделей.
- Построены и исследованы теоретические статические модели административной и экономической коррупции в одно-, двух- и трехуровневых системах управления («генетические ряды» моделей вида «задача оптимизации — иерархическая игра двух лиц — иерархическая игра трех лиц»). Обосновано различие между указанными типами коррупции, а также между попустительством и вымогательством при математической формализации. Предложены показатели сговорчивости и жадности взяточника. Найдены зависимости стратегий поведения взяточника от параметров модели.
- Построены и исследованы теоретические динамические модели административной и экономической коррупции в одно-, двух- и трехуровневых системах управления («генетические ряды» моделей вида «задача оптимального управления — динамическая иерархическая игра двух лиц — динамическая иерархическая игра трех лиц»). Даны определения равновесий принуждения и побуждения с учетом требований устойчивого развития при коррупции, предложены алгоритмы их нахождения.
- Построены и исследованы статические оптимизационные и теоретико-игровые модели управ-

ления инвестиционно-строительными проектами в условиях коррупции, реализован и апробирован соответствующий программный комплекс.

- Построены и исследованы модели управления качеством производственных систем различной структуры в условиях коррупции.
- Построены и исследованы динамические ряды моделей управления качеством водных ресурсов и эксплуатации биологических ресурсов в условиях коррупции.
- Построены и исследованы модели распределения ресурсов в ИСУ с учетом коррупции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rose-Ackerman S.* The Economics of Corruption // *Journal of Public Economics*. — 1975. — N 4. — P. 187–203.
2. *Becker G.* Crime and Punishment: An Economic Approach // *Journal of Political Economy*. — 1968. — N 76. — P. 169–218.
3. *Rose-Ackerman S.* Corruption: A Study in Political Economy. — N.-Y.: Academic Press, 1978. — 258 p.
4. *Rose-Ackerman S.* Corruption and Government: Causes, Consequences and Reform. — Cambridge University Press, 1999. — 266 p.
5. *Mishra A.* Corruption, hierarchies and bureaucratic structure. In *International Handbook on the Economics of Corruption* / Ed. S. Rose-Ackerman. — Edward Elgar. — 2006. — P. 189–215.
6. *Лекции по экономике коррупции* / М.И. Левин, Е.А. Левина, Е.В. Покатович. — М.: Изд. дом Высшей школы экономики, 2011. — 360 с.
7. *Васин А.А., Картунова П.А., Уразов А.С.* Модели организации государственных инспекций и борьбы с коррупцией // *Математическое моделирование*. — 2010. — Т. 22, № 4. — С. 67–89.
8. *Васин А.А., Николаев П.В., Уразов А.С.* Механизмы подавления коррупции // *Журнал новой экономической ассоциации*. — 2011. — № 10. — С. 10–30.
9. *Левин М.И., Цирик М.Л.* Коррупция как объект математического моделирования // *Экономика и математические методы*. — 1998. — Т. 34, № 3. — С. 40–62.
10. *Полтерович В.М.* Факторы коррупции // *Экономика и математические методы*. — 1998. — Т. 34, № 3. — С. 30–39.
11. *Выборнов Р.А.* Модели и методы управления организационными системами с коррупционным поведением участников. — М.: ИПУ РАН, 2006. — 110 с.
12. *Basu K., Bhattacharya S., Mishra A.* Notes on bribery and the control of corruption // *Journal of Public Economics*. — 1992. — N 48. — P. 349–359.
13. *Olsen T.E., Torsvik G.* Collusion and Renegotiations in Hierarchies: A Case of Beneficial Corruption // *International Economic Review*. — 1998. — Vol. 39, N 2. — P. 143–157.
14. *Yang D.* Corruption by monopoly: Bribery in Chinese enterprise licensing as a repeated bargaining game // *China Economic Review*. — 2005. — N 16. — P. 171–188.
15. *Lambert-Mogiliansky A., Majumdar M., Radner R.* Strategic analysis of petty corruption: Entrepreneurs and bureaucrats // *Journal of Development Economics*. — 2007. — N 83. — P. 351–367.
16. *Bhattacharya S., Hodler R.* Natural resources, bureaucracy and corruption // *European Economic Review*. — 2010. — N 54. — P. 608–21.
17. *Balafoutas L.* Public beliefs and corruption in a repeated psychological game // *Journal of Economic Behavior and Organization*. — 2011. — N 78. — P. 51–59.

18. Blackburn K., Forgues-Puccio G.F. Financial liberalization, bureaucratic corruption and economic development // Journal of International Money and Finance. — 2010. — N 29. — P. 1321–1339.
19. Cerqueti R., Coppier R. Economic growth, corruption and tax evasion // Economic Modeling. — 2011. — N 28. — P. 489–500.
20. Рыбасов Е.А., Угольников Г.А. Математическое моделирование иерархического управления эколого-экономическими системами с учетом коррупции // Компьютерное моделирование. Экология. — 2004. — Вып. 2. — С. 46–65.
21. Угольников Г.А., Горбанева О.И. Задача распределения ресурсов в организационной системе с учетом коррупции и ее экологические приложения // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2007. — № 1. — С. 43–47.
22. Денин К.И., Угольников Г.А. Теоретико-игровая модель коррупции в системах иерархического управления // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2010. — № 1. — С. 192–198.
23. Угольников Г.А., Усов А.Б. Управление устойчивым развитием иерархических систем в условиях коррупции // Проблемы управления. — 2010. — № 6. — С. 19–26.
24. Угольников Г.А., Усов А.Б. Устойчивое развитие систем управления с учетом коррупции // Математическая теория игр и ее приложения. — 2010. — Т. 2, вып. 4. — С. 106–119.
25. Угольников Г.А., Денин К.И. Математические модели коррупции. Теория и приложения — LAP Lambert Academic Publishing, 2011. — 152 с.
26. Розин М.Д., Суций С.Я., Угольников Г.А. Методологические аспекты моделирования борьбы с коррупцией как фактором социальной конфликтности и терроризма // Научная мысль Кавказа. Междисциплинарные и специальные исследования. — 2011. — № 2 (18). — С. 32–51.
27. Antonenko A.A., Ougolnitsky G.A., Usov A.B. Static Models of Corruption in Hierarchical Control Systems // Contributions to game theory and management. Vol. V. Collected papers presented on the Fifth International Conference Game Theory and Management / Eds L. Petrosyan, N. Zenkevich. — SPb.: Graduate School of Management SPbU, 2012. — P. 20–32.
28. Угольников Г.А., Усов А.Б. Статические модели коррупции в системах контроля качества водных ресурсов // Проблемы управления. — 2012. — № 4. — С. 38–44.
29. Антоненко А.В., Угольников Г.А., Усов А.Б. Статические модели борьбы с коррупцией в иерархических системах управления // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2013. — № 4. — С. 165–176.
30. Горбанева О.И., Угольников Г.А. Статические модели учета фактора коррупции при распределении ресурсов в трехуровневых системах управления // Управление большими системами. — 2013. — Вып. 42. — С. 195–216.
31. Chernushkin A.A., Ougolnitsky G.A., Usov A.B. Dynamic Models of Corruption in Hierarchical Control Systems // Contributions to game theory and management. Vol. VI. Collected papers presented on the Sixth International Conference Game Theory and Management / Editors L. Petrosyan, N. Zenkevich. — SPb.: Graduate School of Management SPbU, 2013. — P. 63–74.
32. Antonenko A.V., Ougolnitsky G.A. Static Models of Corruption in Hierarchical Systems // Advances in Systems Science and Application. — 2013. — Vol. 13, N 1. — P. 37–52.
33. Gorbaneva O.I., Ougolnitsky G.A. Purpose and Non-Purpose Resource Use Models in Two-Level Control Systems // Advances in Systems Science and Application. — 2013. — Vol. 13, N 4. — P. 378–390.
34. Угольников Г.А., Усов А.Б. Моделирование коррупции в трехуровневых системах управления // Проблемы управления. — 2014. — № 1. — С. 53–62.
35. Горбанева О.И., Угольников Г.А. Теоретико-игровые модели распределения ресурсов при управлении качеством речной воды в условиях коррупции. Ч. 1 // Эвристические алгоритмы и распределенные вычисления. — 2014. — Т. 1, вып. 1. — С. 16–24.
36. Горбанева О.И., Угольников Г.А. Теоретико-игровые модели распределения ресурсов при управлении качеством речной воды в условиях коррупции. Ч. 2 // Там же, вып. 2. — С. 21–29.
37. Угольников Г.А., Усов А.Б. Модели борьбы с административной коррупцией в иерархических системах управления // Математическая теория игр и ее приложения. — 2014. — Т. 6, вып. 1. — С. 73–90.
38. Горбанева О.И., Угольников Г.А., Усов А.Б. Моделирование коррупции в иерархических системах управления. — Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2014. — 412 с.
39. Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. — М.: Радио и связь, 1982. — 144 с.
40. Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. — М.: Радио и связь, 1991. — 288 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Бурковым.

Горбанева Ольга Ивановна — канд. физ.-мат. наук, доцент,
✉ gorbaneva@mail.ru,

Усов Анатолий Борисович — д-р физ.-мат. наук, профессор,
✉ usov@math.rsu.ru,

Угольников Геннадий Анатольевич — д-р физ.-мат. наук,
зав. кафедрой, ☎ (863) 297-51-14, ✉ ougoln@mail.ru,
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону.

Новая книга

Горбанева О.И., Угольников Г.А., Усов А.Б. Моделирование коррупции в иерархических системах управления: монография. — Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2014. — 412 с. (ISBN 978-5-9905703-6-8).

Представлена авторская концепция математического моделирования коррупции в иерархических системах управления. Сформулированы основные положения концепции. Построены и исследованы теоретические модели административной и экономической коррупции в статических и динамических постановках, а также прикладные модели управления организационными и эколого-экономическими системами в условиях коррупции.

Для специалистов по прикладной математике, математической экономике и организационному управлению, аспирантов и студентов соответствующих специальностей, а также сотрудников органов государственного управления.

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМОЙ¹

Р.О. Масталиев

Для задач, описываемых системой разностных и интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра, получено необходимое условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. Исследован особый в смысле принципа максимума Понтрягина случай, для которого выведено общее необходимое условие оптимальности управлений.

Ключевые слова: разностные и интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра, ступенчатая задача, необходимое условие, оптимальность, принцип максимума, особое управление.

ВВЕДЕНИЕ

Многие встречающиеся на практике процессы носят ступенчатый характер и встречаются в задачах управления химико-технологическими процессами [1, 2], автоматизированными производственными системами конвейерного типа [3, с. 28–37], в задачах оценки качества состояния воды в бассейне реки в зависимости от выбросов промышленными предприятиями загрязняющих веществ [4], примерами могут служить процессы роста растений [5, с. 88–96], динамика шагающего аппарата [6–8] и др.

Для моделирования систем, в которых протекают ступенчатые процессы, часто применяются интегральные уравнения или же их разностные аналоги (см., например, работы [6–12] и др.). В работах [13–18] изучены задачи оптимального управления, описываемые интегральными и разностными уравнениями типа Вольтерра, доказаны необходимые условия оптимальности, найдены условия управляемости и др.

Настоящая работа посвящена исследованию особых в смысле принципа максимума Понтрягина управлений задач оптимального управления,

описываемых разностными и интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u, v) = \varphi(x(t_1)) + \phi(y(t_2)) \quad (1.1)$$

при ограничениях

$$x(t+1) = \sum_{\tau=t_0}^t f(t, \tau, x(\tau), u(\tau)),$$

$$t \in T_1 = \{t_0, t_0 + 1, t_0 + 2, \dots, t_1 - 1\},$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (1.2)$$

$$\dot{y}(t) = \int_{t_1}^t g(t, \tau, y(\tau), v(\tau)) d\tau, \quad t \in T_2 = [t_1, t_2],$$

$$y(t_1) = G(x(t_1)).$$

Здесь t_0, t_1, t_2, x_0 — заданы, причем разность $t_1 - t_0$ — натуральное число; $\varphi(x)$ и $\phi(x)$ — заданные, дважды непрерывно дифференцируемые скалярные функции; $f(t, \tau, x, u)$, $(g(t, \tau, y, v))$ — заданная n (m)-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по $x(y)$ до второго порядка включительно; $G(x)$ — заданная, дважды непрерывно дифференцируемая m -мерная вектор-функция; $u(t)$ — r -мерный вектор управляющих воздействий со значениями из

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития науки при Президенте Азербайджанской Республики (грант № EIF/GAM-2-2013-2(8)-25/06/1).

заданного непустого и ограниченного множества U ; $v(t)$ — r -мерный кусочно-непрерывный на отрезке T_2 вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества V , т. е.

$$\begin{aligned} u(t) &\in U \subset R^r, \quad t \in T_1, \\ v(t) &\in V \subset R^q, \quad t \in T_2. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Пару $(u(t), v(t))$ с вышеприведенными свойствами назовем допустимым управлением, а соответствующий процесс $(u(t), v(t), x(t), y(t))$ — допустимым процессом.

Наша цель состоит в исследовании случая вырождения принципа максимума Понтрягина (особого случая [19]) в рассматриваемой задаче.

2. ФОРМУЛА ПРИРАЩЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА

Считая $(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t))$ оптимальным процессом, обозначим через $(\bar{u}(t) = u^o(t) + \Delta u(t) \in U, \bar{v}(t) = v^o(t) + \Delta v(t) \in V, \bar{x}(t) = x^o(t) + \Delta x(t), \bar{y}(t) = y^o(t) + \Delta y(t))$ произвольный допустимый процесс и запишем формулу для приращения функционала:

$$\begin{aligned} \Delta S(u^o, v^o) &= S(\bar{u}, \bar{v}) - S(u^o, v^o) = \\ &= \varphi(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x^o(t_1)) + \phi(\bar{y}(t_2)) - \phi(y^o(t_2)). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ясно, что приращение $(\Delta x(t), \Delta y(t))$ траектории $(x^o(t), y^o(t))$ удовлетворяет системе отношений

$$\begin{aligned} \Delta x(t+1) &= \sum_{\tau=t_0}^t [f(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - \\ &- f(\tau, \tau, x^o(\tau), u^o(\tau))], \quad t \in T_1, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\Delta x(t_0) = 0, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{y}(t) &= \int_{t_1}^t [g(\tau, \bar{y}(\tau), \bar{v}(\tau)) - g(\tau, \tau, y^o(\tau), v^o(\tau))] d\tau, \\ t &\in T_2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\Delta y(t_1) = G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1)). \quad (2.5)$$

Обозначим через $(\psi(t), p(t))$ пока неизвестную $(n+m)$ -мерную вектор-функцию.

Умножая обе части соотношений (2.2) и (2.4) соответственно на $\psi(t)$ и $p(t)$ скалярно, затем соответственно суммируя и интегрируя полученные тождества по множествам T_1 и T_2 , получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi(t) \Delta x(t+1) &= \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi(\tau) [f(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - \\ &- f(\tau, \tau, x^o(\tau), u^o(\tau))], \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} p(t) \Delta \dot{y}(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^t p(\tau) [g(\tau, \bar{y}(\tau), \bar{v}(\tau)) - \\ &- g(\tau, \tau, y^o(\tau), v^o(\tau))] d\tau dt. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ясно что,

$$\begin{aligned} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi(t) \Delta x(t+1) &= \\ &= \psi(t_1-1) \Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi(t-1) \Delta x(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} p(t) \Delta \dot{y}(t) dt &= \\ &= p(t_2) \Delta y(t_2) - p(t_1) \Delta y(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}(t) \Delta y(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом выражения (2.5)

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} p(t) \Delta \dot{y}(t) dt &= p(t_2) \Delta y(t_2) - p(t_1) (G(\bar{x}(t_1)) - \\ &- G(x^o(t_1))) - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}(t) \Delta y(t) dt. \end{aligned}$$

Принимая во внимания эти тождества, формула приращения (2.1) записывается в виде

$$\begin{aligned} \Delta S(u^o, v^o) &= \varphi(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x^o(t_1)) + \phi(\bar{y}(t_2)) - \\ &- \phi(y^o(t_2)) + \psi(t_1-1) \Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi(t-1) \Delta x(t) - \\ &- \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi(\tau) [f(\tau, \bar{x}(\tau), \bar{u}(\tau)) - f(\tau, \tau, x^o(\tau), u^o(\tau))] + \\ &+ p(t_2) \Delta y(t_2) - p(t_1) (G(\bar{x}(t_1)) - G(x^o(t_1))) - \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}(t) \Delta y(t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^t p(\tau) [g(\tau, \bar{y}(\tau), \bar{v}(\tau)) - \\ &- g(\tau, \tau, y^o(\tau), v^o(\tau))] d\tau dt. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Введем обозначения

$$H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = \sum_{\tau=t}^{t_1-1} \psi'(\tau) f(\tau, \tau, x, u),$$

$$M(t, y(t), v(t), p(t)) = \int_t^{t_2} p'(\tau) g(\tau, \tau, y, v) d\tau,$$

$$N(x) = p'(t_1-1) G(x),$$

где «штрих» — знак транспонирования.



Тогда формула приращения (2.8) представляет-
ся в виде

$$\begin{aligned} \Delta S(u^o, v^o) = & \varphi(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x^o(t_1)) + \phi(\bar{y}(t_2)) - \\ & - \phi(y^o(t_2)) + \psi(t_1 - 1)\Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi(t-1)\Delta x(t) - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))] + \\ & + p(t_2)\Delta y(t_2) - (N(\bar{x}(t_1)) - N(x^o(t_1))) - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}(t)\Delta y(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} [M(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t), p(t)) - \\ & - M(t, y^o(t), v^o(t), p(t))]\Delta y(t)dt. \end{aligned}$$

Для простоты дальнейшего изложения введем обозначения:

$$\begin{aligned} \Delta_{u(\tau)} f(t, \tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) &= f(t, \tau, x^o(\tau), u(\tau)) - \\ &- f(t, \tau, x^o(\tau), u^o(\tau)), \\ \Delta_{u(t)} H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) &= H(t, x^o(t), u(t), \psi(t)) - \\ &- H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)), \\ \Delta_{u(t)} H_x(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) &= H_x(t, x^o(t), u(t), \psi(t)) - \\ &- H_x(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)), \\ \Delta_{v(t)} M(t, y^o(t), v^o(t), p(t)) &= M(t, y^o(t), v(t), p(t)) - \\ &- M(t, y^o(t), v^o(t), p(t)), \\ \Delta_{v(t)} M_y(t, y^o(t), v^o(t), p(t)) &= M_y(t, y^o(t), v(t), p(t)) - \\ &- M_y(t, y^o(t), v^o(t), p(t)). \end{aligned}$$

Применяя формулу Тейлора, для приращения (2.8) после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} \Delta S(u^o, v^o) = & \varphi_x(x^o(t_1))\Delta x(t_1) + \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\varphi_{xx}(x^o(t_1))\Delta x(t_1) + \\ & + \phi_y(y^o(t_2))\Delta y(t_2) + \frac{1}{2}\Delta y'(t_2)\phi_{yy}(y^o(t_2))\Delta y(t_2) + \\ & + \psi(t_1 - 1)\Delta x(t_1) + \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \psi(t-1)\Delta x(t) - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{\bar{u}} H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} H_x(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))\Delta x(t) - \\ & - \frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta x'(t)H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))\Delta x(t) - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{\bar{u}} H_x(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))\Delta x(t) + p(t_2)\Delta y(t_2) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - N_x(x^o(t_1))\Delta x(t_1) - \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)N_{xx}(x^o(t_1))\Delta x(t_1) - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}(t)\Delta y(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} \Delta_{\bar{v}} M(t, y^o(t), v^o(t), p(t))\Delta y(t)dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} M_y(t, y^o(t), v^o(t), p(t))\Delta y(t)dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \Delta_{\bar{v}} M_y(t, y^o(t), v^o(t), p(t))\Delta y(t)dt - \\ & - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \Delta y'(t)M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p(t))\Delta y(t)dt + \\ & + \eta(\Delta u, \Delta v). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь по определению

$$\begin{aligned} \eta(\Delta u, \Delta v) = & o_1(\|\Delta x(t_1)\|^2) + o_2(\|\Delta y(t_2)\|^2) - o_3(\|\Delta x(t_1)\|^2) - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} o_4(\|\Delta x(t)\|^2) - \int_{t_1}^{t_2} o_5(\|\Delta y(t)\|^2)dt - \\ & - \frac{1}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta x'(t)\Delta_{\bar{u}} H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))\Delta x(t) - \\ & - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \Delta y'(t)\Delta_{\bar{v}} M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p(t))\Delta y(t)dt, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где величины $o_i(\cdot)$, $i = \overline{1, 5}$, определяются соответственно из разложений:

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{x}(t_1)) - \varphi(x^o(t_1)) &= \varphi_x(x^o(t_1))\Delta x(t_1) + \\ & + \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)\varphi_{xx}(x(t_1))\Delta x(t_1) + o_1(\|\Delta x(t_1)\|^2), \\ \phi(\bar{y}(t_2)) - \phi(y^o(t_2)) &= \phi_y(y^o(t_2))\Delta y(t_2) + \\ & + \frac{1}{2}\Delta y'(t_2)\phi_{yy}(y^o(t_2))\Delta y(t_2) + o_2(\|\Delta y(t_2)\|^2), \\ N(\bar{x}(t_1)) - N(x^o(t_1)) &= N_x(x^o(t_1))\Delta x(t_1) + \\ & + \frac{1}{2}\Delta x'(t_1)N_{xx}(x(t_1))\Delta x(t_1) + o_3(\|\Delta x(t_1)\|^2), \\ H(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t), \psi(t)) - H(t, x^o(t), \bar{u}(t), \psi(t)) &= \\ & = H_x(t, x^o(t), \bar{u}(t), \psi(t))\Delta x(t) + \\ & + \frac{1}{2}\Delta x'(t)H_{xx}(t, x^o(t), \bar{u}(t), \psi(t))\Delta x(t) + o_4(\|\Delta x(t_1)\|^2), \\ M(t, \bar{y}(t), \bar{v}(t), p(t)) - M(t, y^o(t), \bar{v}(t), p(t)) &= \\ & = M_y(t, y^o(t), \bar{v}(t), p(t))\Delta y(t) + \\ & + \frac{1}{2}\Delta y'(t)M_{yy}(t, y^o(t), \bar{v}(t), p(t))\Delta y(t) + o_5(\|\Delta y(t)\|^2). \end{aligned}$$

Если предположить, что вектор-функция $(\psi(t), p(t))$ — решение задачи

$$\psi(t-1) = H_x(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)),$$

$$\psi(t_1-1) = -\varphi_x(x^o(t_1) + N_x(x^o(t_1))),$$

$$\dot{p}(t) = M_y(t, y^o(t), v^o(t), p(t)),$$

$$p(t_2) = -\phi_y(y^o(t_2)),$$

то формула приращения (2.9) примет вид:

$$\begin{aligned} \Delta S(u^o, v^o) = & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{\bar{u}} H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) + \\ & + \frac{1}{2} \Delta x(t_1) [\varphi_{xx}(x^o(t_1)) - N_{xx}(x^o(t_1))] \Delta x(t_1) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta x(t) H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) \Delta x(t) - \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{\bar{u}(t)} H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) \Delta x(t) - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \Delta_{\bar{v}} M(t, y^o(t), v^o(t), p(t)) dt + \\ & + \frac{1}{2} \Delta y(t_2) \phi_{yy}(y^o(t_2)) \Delta y(t_2) - \\ & - \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \Delta y(t) M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p(t)) \Delta y(t) dt - \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \Delta_{\bar{v}} M_y(t, y^o(t), v^o(t), p(t)) \Delta y(t) dt + \\ & + \eta(\Delta u, \Delta v). \end{aligned} \quad (2.11)$$

3. СПЕЦИАЛЬНОЕ ПРИРАЩЕНИЕ КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА И НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Если предположить, что множество

$$\begin{aligned} f(t, \tau, x^o(\tau), U) = \\ = \{\alpha: \alpha = f(t, \tau, x^o(\tau), u), u \in U\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

выпукло, то специальное приращение допустимого управления $u^o(t)$ можно определить по формуле $\Delta u_\varepsilon(t) = u(t; \varepsilon) - u^o(t)$, $t \in T_1$, где $\varepsilon \in [0, 1]$ произвольное число, а $u(t; \varepsilon) \in U$, $t \in T_1$, такие допустимые управляющие функции, что

$$\begin{aligned} \Delta u_{(t; \varepsilon)} f(t, \tau, x^o(\tau), u^o(\tau)) = \\ = \varepsilon \Delta_{u(t)} f(t, \tau, x^o(\tau), u^o(\tau)). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь $u(\tau) \in U$, $\tau \in T_1$, — произвольное допустимое управление, соответствующее допустимому управлению $u(t; \varepsilon)$.

Пусть $\Delta v(t) = 0$. Обозначим через $(\Delta x_\varepsilon(t), \Delta y_\varepsilon(t))$ специальное приращение оптимальной траектории $(x^o(t), y^o(t))$, соответствующее специальному приращению управления $(u^o(t), v^o(t))$.

Из оценок, установленных в работах [15, с. 155—156; 20, с. 259—263; 21, с. 37—38] и других следует

$$\|\Delta x_\varepsilon(t)\| \leq L_1 \varepsilon, t \in T_1 \cup t_1,$$

$$\|\Delta y_\varepsilon(t)\| \leq L_2 \varepsilon, t \in T_2 \cup t_2, \quad (3.3)$$

где L_1 и L_2 — положительные постоянные.

Поэтому из формулы (2.10) следует, что

$$\eta(\Delta u, 0) = o(\varepsilon^2). \quad (3.4)$$

Из разложения соотношений (2.2)—(2.5) по формуле Тейлора следует

Лемма. Для специального приращения $(\Delta x_\varepsilon(t), \Delta y_\varepsilon(t))$ траектории $(x^o(t), y^o(t))$ справедливы оценки:

$$\Delta x_\varepsilon(t) = \varepsilon a(t) + o(\varepsilon; t),$$

$$\Delta y_\varepsilon(t) = \varepsilon b(t) + o(\varepsilon; t). \quad (3.5)$$

Здесь $a(t)$ и $b(t)$ — соответственно решения уравнений:

$$\begin{aligned} a(t+1) = & \sum_{\tau=t_0}^t [f_x(t, \tau, x^o(\tau), u^o(\tau))a(\tau) + \\ & + \Delta_{\bar{u}(\tau)} f(t, \tau, x^o(\tau), u^o(\tau))], \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{b}(t) = & \int_{t_1}^t [g_y(t, \tau, y^o(\tau), v^o(\tau))b(\tau) + \\ & + \Delta_{\bar{v}(\tau)} g(t, \tau, y^o(\tau), v^o(\tau))] d\tau, \end{aligned}$$

$$b(t_1) = G_x(x^o(t_1))a(t_1). \quad (3.7)$$

Принимая во внимание выражения (3.2)—(3.5) в формуле (2.11), приходим к разложению

$$\begin{aligned} \Delta S(u^o, v^o) = & -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{u(t)} H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) + \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[a(t_1) [\varphi_{xx}(x^o(t_1)) - N_{xx}(x^o(t_1))] a(t_1) - \right. \\ & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} a(t) H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) a(t) - \\ & - 2 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{u(t)} H_x(t, x^o(t), y^o(t), \psi(t)) a(t) + \end{aligned}$$



$$+ b(t_2)\phi_{yy}(y^o(t_2))b(t_2) - \int_{t_1}^{t_2} b(t)M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p(t))b(t)dt \Big] + o(\varepsilon^2). \quad (3.8)$$

Если же специальное приращение оптимального управления $(u^o(t), v^o(t))$ определить по формулам

$$\Delta u(t) = 0, \quad t \in T_1, \\ \Delta v_\delta(t) = \begin{cases} v - v^o(t), & t \in [\theta, \theta + \delta), \\ 0, & t \in T_2/[\theta, \theta + \delta), \end{cases} \quad (3.9)$$

где $\theta \in [t_1, t_2)$ — произвольная точка непрерывности управляющей функции $v^o(t)$, $\delta > 0$ — достаточно малое произвольное число такое, что $\theta + \delta < t_2$, $v \in V$ — произвольный вектор, то из указанных выше оценок следует что,

$$\Delta x(t) = 0, \\ \|\Delta y_\varepsilon(t)\| \leq L_3\delta, \quad (3.10)$$

где $L_3 = \text{const} > 0$.

Поэтому из формулы (2.10) следует, что

$$\eta(0, \Delta v) = o(\delta^2). \quad (3.11)$$

В этом случае на основании леммы

$$\Delta_\delta x(t) = 0, \\ \Delta_\delta y(t) = \delta b(t) + o(\delta; t). \quad (3.12)$$

В дальнейшем нам понадобится утверждение [20, с. 26]:

$$\int_{\theta}^{\theta+\delta} \Delta_v M(t, y^o(t), v^o(t), p(t))dt = \\ = \delta \Delta_v M(\theta, y^o(\theta), v^o(\theta), p(\theta)) + o(\delta). \quad (3.13)$$

Принимая во внимания соотношения (3.9)–(3.13), в формуле (2.11) приходим к разложению

$$\Delta S(0, \Delta v) = -\delta \Delta_v M(\theta, y^o(\theta), v^o(\theta), p(\theta)) + \\ + \frac{\delta^2}{2} \left[b(t_2)\phi_{yy}(y^o(t_2))b(t_2) - \int_{t_1}^{t_2} b(t)M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p(t))b(t)dt - \right. \\ \left. - 2\Delta_v M_y(\theta, y^o(\theta), v^o(\theta), p(\theta))b(\theta) \right] + o(\delta^2). \quad (3.14)$$

Из разложений (3.8) и (3.14) в силу произвольности $\varepsilon \in [0; 1]$ и δ следует принцип максимума

Понтрягина [22]: вдоль оптимального процесса $(u^o(t), v^o(t), x^o(t), y^o(t))$ неравенства

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{u(t)} H(t, x^o(t), u^o(t), \psi^o(t)) \leq 0, \\ \Delta_v M(\theta, y^o(\theta), v^o(\theta), p^o(\theta)) \leq 0 \quad (3.15)$$

выполняются для всех $u(t) \in U, t \in T_1, v \in V, \theta \in T_2$.

Этот результат, как было отмечено в работе [22], представляет собой необходимое условие оптимальности первого порядка. Изучим случай вырождения этого условия.

Определение. Если соотношения

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{u(t)} H(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) = 0, \\ \Delta_v M(\theta, y^o(\theta), v^o(\theta), p(\theta)) = 0 \quad (3.16)$$

выполняются для всех $u(t) \in U, t \in T_1, v \in V, \theta \in T_2$,

то допустимое управление $(u^o(t), v^o(t))$ назовем особым в смысле принципа максимума Понтрягина управлением. ♦

Из определения ясно, что для особых управлений условие максимума Понтрягина (3.15) вырождаясь, теряет свое содержательное значение.

Таким образом, возникает необходимость в дальнейшем исследовании особых в смысле принципа максимума Понтрягина управлений.

С учетом условия (3.16) из разложения (3.8) следует неравенство

$$a(t_1)[\phi_{xx}(x^o(t_1)) - N_{xx}(x^o(t))a(t_1) - \\ - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} a(t)H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t))a(t) - \\ - 2 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_u H(t, x^o(t), u^o(t), p(t))a(t) + \\ + b(t_2)\phi_{yy}(y^o(t_2))b(t_2) - \\ - \int_{t_1}^{t_2} b(t)M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p(t))b(t)dt] \geq 0, \quad (3.17)$$

а из разложения (3.14) — неравенство

$$b(t_2)\phi_{yy}(y^o(t_2))b(t_2) - \int_{t_1}^{t_2} b(t)M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p(t))b(t)dt - \\ - 2\Delta_v M_y(\theta, y^o(\theta), v^o(\theta), p(\theta))b(\theta) \geq 0. \quad (3.18)$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 1. Если множество (3.1) выпукло, то для оптимальности особого в смысле принципа максимума Понтрягина управления $(u^o(t), v^o(t))$ в зада-

че (1.1)—(1.3) необходимо, чтобы неравенства (3.17) и (3.18) выполнялись для всех $u(t) \in U$, $t \in T_1$ и $v \in V$, $\theta \in T_2$. ♦

Неравенства (3.17) и (3.18) являются общим, но трудно проверяемым необходимым условием оптимальности особых управлений. С его помощью удастся получить различные необходимые условия оптимальности особых управлений, непосредственно выраженные через параметры задачи (1.1)—(1.3).

Поскольку уравнения (3.6) и (3.7) — соответственно линейное неоднородное разностное и интегральное уравнения типа Вольтерра относительно $a(t)$ и $b(t)$, то их решения можно представить (см. например, работы [23—26]) в виде

$$a(t) = \sum_{s=t_0}^{t-1} \left[\sum_{\tau=s}^{t-1} R(t, \tau+1) \times \right. \\ \left. \times \Delta_{u(s)} f(\tau, s, x^o(s), u^o(s)) \right], \quad (3.19)$$

$$b(t) = \int_{t_1}^t \int_s^t Q(t, \tau) \Delta_{v(s)} g(\tau, s, y^o(s), v^o(s)) ds d\tau + \\ + Q(t, t_1) G_x(x^o(t_1)) a(t_1). \quad (3.20)$$

Здесь $R(t, \tau)$ и $Q(t, \tau)$ — матричные функции соответствующих размерностей, являющиеся решениями задач

$$\begin{cases} R(t+1, s) = \sum_{\tau=s}^t R(t+1, \tau+1) f_x(\tau, s, x^o(s), u^o(s)), \\ s \leq t, \\ R(t+1, t+1) = E_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{Q}_s(t, s) = \int_s^t Q(t, \tau) g_y(\tau, s, x^o(s), v^o(s)) d\tau, \\ Q(t, t) = E_2 \end{cases}$$

где E_1 и E_2 — единичные матрицы соответствующих размерностей.

Далее, представление (3.20), с учетом представления (3.19) записывается в виде

$$b(t) = \int_{t_1}^t \int_s^t Q(t, \tau) \Delta_{v(s)} g(\tau, s, y^o(s), v^o(s)) ds d\tau + \\ + Q(t, t_1) G_x(x^o(t_1)) \sum_{s=t_0}^{t_1-1} \sum_{\tau=s}^{t_1-1} R(t_1, \tau+1) \times \\ \times \Delta_{u(s)} f(\tau, s, x^o(s), u^o(s)). \quad (3.21)$$

Учитывая независимость допустимых управляющих функций $u(t)$ и $v(t)$, положим $v(t) \equiv v^o(t)$, $t \in T_2$. Тогда представления (3.19) и (3.21) примут соответственно вид:

$$a(t) = \sum_{s=t_0}^{t-1} \left[\sum_{\tau=s}^{t-1} R(t, \tau+1) \times \right. \\ \left. \times \Delta_{u(s)} f(\tau, s, x^o(s), u^o(s)) \right], \quad (3.22)$$

$$b(t) = \sum_{s=t_0}^{t_1-1} \sum_{\tau=s}^{t_1-1} Q(t, t_1) G_x(x^o(t_1)) R(t_1, \tau+1) \times \\ \times \Delta_{u(s)} f(\tau, s, x^o(s), u^o(s)). \quad (3.23)$$

Если же положить $u(t) \equiv u^o(t)$, $t \in T_1$, то из представлений (3.19) и (3.21)

$$a(t) = 0, \quad t \in T_1,$$

$$b(t) = \int_{t_1}^t \int_s^t Q(t, \tau) \Delta_{v(s)} g(\tau, s, y^o(s), v^o(s)) ds d\tau. \quad (3.24)$$

Представления (3.22) и (3.23) позволяют убедиться в справедливости тождеств:

$$a(t_1) [\varphi_{xx}(x^o(t_1)) - N_{xx}(x^o(t_1))] a(t_1) = \\ = \left(\sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1} \left[\sum_{\tau=\alpha}^{t_1-1} R(t, \tau+1) \Delta_{u(\alpha)} f(\tau, \alpha, x^o(\alpha), u^o(\alpha)) \right] \right) \times \\ \times [\varphi_{xx}(x^o(t_1)) - N_{xx}(x^o(t_1))] \times \\ \times \left(\sum_{\beta=t_0}^{t_1-1} \sum_{\tau=\beta}^{t_1-1} R(t, \tau+1) \Delta_{v(\beta)} f(\tau, \beta, x^o(\beta), u^o(\beta)) \right), \quad (3.25)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} a(t) H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) a(t) = \\ = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left(\sum_{\alpha=t_0}^{t-1} \sum_{\tau=\alpha}^{t-1} R(t, \tau+1) \Delta_{u(\alpha)} f(\tau, \alpha, x^o(\alpha), u^o(\alpha)) \right) \times \\ \times H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) \times \\ \times \left(\sum_{\beta=t_0}^{t-1} \sum_{\tau=\beta}^{t-1} R(t, \tau+1) \Delta_{v(\beta)} f(\tau, \beta, x^o(\beta), u^o(\beta)) \right), \quad (3.26)$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \Delta_{u(t)} H_x(t, x(t), u(t), \psi(t)) a(t) = \\ = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t-1} \sum_{\tau=s}^{t-1} \Delta_{u(t)} H_x(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) \times \\ \times R(t, \tau+1) \Delta_{u(s)} f(\tau, s, x^o(s), u^o(s)), \quad (3.27)$$



$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} b(t) M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p(t)) b(t) dt = \\
 & = \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1} \sum_{\tau=\alpha}^{t_1-1} \Delta_{u(\alpha)} f(\tau, \alpha, x^o(\alpha), u^o(\alpha)) \times \right. \right. \\
 & \times R(t, \tau+1) G_x(x^o(t_1)) Q(t, t_1) \Big) M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p(t)) \times \\
 & \times \left(\sum_{\beta=t_0}^{t_1-1} \sum_{\tau=\beta}^{t_1-1} \Delta_{u(\beta)} f(\tau, \beta, x^o(\beta), u^o(\beta)) \times \right. \\
 & \times R(t, \tau+1) G(x^o(t_1)) Q(t, t_1) \Big) \Big] dt, \quad (3.28)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b(t_2) \phi_{yy}(y^o(t_2)) b(t_2) &= \sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1} \sum_{\tau=\alpha}^{t_1-1} Q(t_2, \tau) G(x^o(t_1)) \times \\
 & \times \Delta_{u(\alpha)} f(\tau, \alpha, x^o(\alpha), v^o(\alpha)) \phi_{yy}(y^o(t_2)) \times \\
 & \times \sum_{\beta=t_0}^{t_1-1} \sum_{\tau=\beta}^{t_1-1} Q(t_2, \tau) G_x(x^o(t_1)) \times \\
 & \times \Delta_{u(\beta)} f(\tau, \beta, x^o(\beta), v^o(\beta)). \quad (3.29)
 \end{aligned}$$

Учитывая тождества (3.25)–(3.29), из выражения (3.17) получим неравенство

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1} \left[\sum_{\tau=\alpha}^{t_1-1} R(t, \tau+1) \Delta_{u(\alpha)} f(\tau, \alpha, x^o(\alpha), u^o(\alpha)) \right] \right) \times \\
 & \times [\phi_{xx}(x^o(t_1)) - N_{xx}(x^o(t_1))] \times \\
 & \times \left(\sum_{\beta=t_0}^{t_1-1} \sum_{\tau=\beta}^{t_1-1} R(t, \tau+1) \Delta_{v(\beta)} f(\tau, \beta, x^o(\beta), u^o(\beta)) \right) - \\
 & - \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left(\sum_{\alpha=t_0}^{t-1} \sum_{\tau=\alpha}^{t-1} R(t, \tau+1) \Delta_{u(\alpha)} f(\tau, \alpha, x^o(\alpha), u^o(\alpha)) \right) \times \\
 & \times H_{xx}(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) \times \\
 & \times \left(\sum_{\beta=t_0}^{t-1} \sum_{\tau=\beta}^{t-1} R(t, \tau+1) \Delta_{u(\beta)} f(\tau, \beta, x^o(\beta), u^o(\beta)) \right) - \\
 & - 2 \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{s=t_0}^{t-1} \sum_{\tau=s}^{t-1} \Delta_{u(t)} H_x(t, x^o(t), u^o(t), \psi(t)) \times \\
 & \times R(t, \tau+1) \Delta_{u(s)} f(\tau, s, x^o(s), u^o(s)) - \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1} \sum_{\tau=\alpha}^{t_1-1} \Delta_{u(\alpha)} f(\tau, \alpha, x^o(\alpha), u^o(\alpha)) \times \right. \right. \\
 & \times R(t_1, \tau+1) G_x(x^o(t_1)) Q(t, t_1) \Big) M_{yy}(t, y^o(t), v^o(t), p(t)) \times \\
 & \times \left(\sum_{\beta=t_0}^{t_1-1} \sum_{\tau=\beta}^{t_1-1} \Delta_{u(\beta)} f(\tau, \beta, x^o(\beta), u^o(\beta)) \times \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times R(t, \tau+1) G(x^o(t_1)) Q(t, t_1) \Big) \Big] dt + \\
 & + \sum_{\alpha=t_0}^{t_1-1} \sum_{\tau=\alpha}^{t_1-1} Q(t_2, t_1) G(x(t)) \Delta_{u(\alpha)} f(\tau, \alpha, x^o(\alpha), v^o(\alpha)) \times \\
 & \times \phi(y^o(t)) \sum_{\beta=t_0}^{t_1-1} \sum_{\tau=\beta}^{t_1-1} Q(t_2, t_1) G(x^o(t_1)) \times \\
 & \times \Delta_{u(\beta)} f(\tau, \beta, x^o(\beta), v^o(\beta)) \geq 0. \quad (3.30)
 \end{aligned}$$

Далее, используя представление (3.24), получаем справедливость тождеств:

$$\begin{aligned}
 b(t_2) \phi_{yy}(y^o(t_2)) b(t_2) &= \\
 & = \int_t^{t_2} \int_{\alpha}^{t_2} \Delta_{v(\alpha)} g(\tau, \alpha, y^o(\alpha), v^o(\alpha)) Q(t_2, \tau) d\alpha d\tau \phi_{yy}(y^o(t)) \times \\
 & \times \int_{t_1}^{t_2} \int_{\beta}^{t_2} \Delta_{v(\beta)} g(\tau, \beta, y^o(\beta), v^o(\beta)) Q(t_2, \tau) d\beta d\tau, \quad (3.31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_1}^{t_2} b(t) M(t, y^o(t), v^o(t), p(t)) b(t) dt = \\
 & = \int_{t_1}^{t_2} \left[\int_{t_1}^t \int_{\alpha}^t \Delta_{v(\alpha)} g(\tau, \alpha, y^o(\alpha), v^o(\alpha)) d\alpha d\beta M(t, y(t), v(t), p(t)) \times \right. \\
 & \times \left. \int_{t_1}^t \int_{\beta}^t \Delta_{v(\beta)} g(\tau, \beta, y^o(\beta), v^o(\beta)) Q(t, \tau) d\beta d\tau \right] dt, \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \Delta_v M(\theta, y^o(\theta), v^o(\theta), p(\theta)) b(\theta) = \\
 & = \int_{t_1}^{\theta} \int_{\alpha}^{\theta} \Delta_v M_y(\theta, y^o(\theta), v^o(\theta), p(\theta)) Q(\theta, \tau) \times \\
 & \times \Delta_{v(\alpha)} g(\tau, \alpha, y^o(\alpha), v^o(\alpha)) d\alpha d\tau. \quad (3.33)
 \end{aligned}$$

Принимая во внимание тождества (3.31)–(3.33), из неравенства (3.18) получаем, что вдоль оптимального особого в смысле принципа максимума Понтрягина управления $(u^o(t), v^o(t))$

$$\begin{aligned}
 & \int_t^{t_2} \int_{\alpha}^{t_2} \Delta_{v(\alpha)} g(\tau, \alpha, y^o(\alpha), v^o(\alpha)) Q(t_2, \tau) d\alpha d\tau \phi_{yy}(y^o(t)) \times \\
 & \times \int_{t_1}^{t_2} \int_{\beta}^{t_2} \Delta_{v(\beta)} g(\tau, \beta, y^o(\beta), v^o(\beta)) Q(t, \tau) d\beta d\tau - \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_{t_1}^t \int_{\alpha}^t \Delta_{v(\alpha)} g(\tau, \alpha, y^o(\alpha), v^o(\alpha)) d\alpha d\beta M(t, y(t), v(t), p(t)) \times \\
 & \times \int_{t_1}^t \int_{\beta}^t \Delta_{v(\beta)} g(\tau, \beta, y^o(\beta), v^o(\beta)) Q(t, \tau) d\beta d\tau dt -
 \end{aligned}$$

$$- 2 \int_{t_1}^{\theta} \int_{\alpha}^{\theta} \Delta_v M_y(\theta, y^o(\theta), v^o(\theta), p(\theta)) Q(\theta, \tau) \times \\ \times \Delta_{v(\alpha)} g(\tau, \alpha, y^o(\alpha), v^o(\alpha)) d\alpha d\tau \geq 0. \quad (3.34)$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. Если множество (3.1) выпукло, то для оптимальности особого в смысле принципа максимума Понтрягина управления $(u^o(t), v^o(t))$ в задаче (1.1)–(1.3) необходимо, чтобы неравенства (3.30) и (3.34) выполнялись для всех $u(t) \in U$, $t \in T_1$ и $v \in V$, $\theta \in T_2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Посредством модификации метода приращений для задач оптимального управления, описываемых разностными и интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра, получено необходимое условие оптимальности первого порядка в форме принципа максимума Понтрягина. Исследован случай вырождения необходимого условия оптимальности первого порядка и получены необходимые условия оптимальности второго порядка.

Полученные условия оптимальности носят оригинальный характер и являются аналогами результатов, полученных для задач управления, описываемых дифференциальными и разностными уравнениями. Они могут найти приложения в различных областях современной теории оптимального управления.

Результаты работы могут быть полезны при дальнейшей разработке теории необходимых условий оптимальности для задач управления, описываемых уравнениями Вольтерра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Островский Г.М., Волин Ю.М. Моделирование сложных химико-технологических схем. — М.: Химия, 1975. — 311 с.
2. Агафонова И.А., Гулин Л.Л., Расина И.В. Математическое моделирование и оптимизация процесса метилирования дина-триевой соли сульфаминоантипина / Деп. в ВИНТИ, 10.11.1978, № 3457. — 19 с.
3. Кулебякин А.А. Управление системами и процессами в машиностроении: уч. пособие. — Ярославль: Изд-во ЯГТУ, 2008. — 129 с.
4. Лемперт А.А., Урбанович Д.Е. Оптимизация сбросов загрязняющих веществ в бассейне реки при экологических ограничениях // География и природные ресурсы. Спец. выпуск. — 2004. — С. 212–215.
5. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995. — 301 с.
6. Белецкий В.В. Динамика двуногой ходьбы // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1975. — № 3. — С. 3–14.
7. Гурман В.И., Орлов А.Г. Достаточные условия оптимальности сложных процессов // Автоматика и телемеханика. — 1978. — № 4.

8. Гурман В.И., Орлов А.Г. Сложные процессы двуногой ходьбы / Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. — 1979. — № 95.
9. Арсенашвили А.И., Тадумадзе Т.А. Необходимые условия оптимальности для управляемых систем с переменной структурой и непрерывными условиями преемственности // Тр. ИПМ им. И.Н. Веква Тбилисского гос. ун-та. — 1998. — Т. 27. — С. 35–48.
10. Исмаилов Р.Р., Мансимов К.Б. Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления // Журнал выч. мат. и мат. физики. — 2006. — № 10. — С. 1758–1770.
11. Батурин В.А., Лемперт А.А. Многоэтапные процессы и методы улучшения в задачах оптимального управления // Вычислительные технологии. — 2003. — Т. 8. — С. 103–108.
12. Гурман В.И. К теории оптимальных дискретных процессов // Автоматика и телемеханика. — 1973. — № 6.
13. Монастырский М.А. Оптимальное управление системами, описываемыми интегральными уравнениями Вольтерра // Автоматика и телемеханика. — 1975. — № 1. — С. 29–36.
14. Мансимов К.Б., Абдуллаев А.А. Исследование особых управлений в одной задаче управления двумерными интегральными уравнениями типа Вольтерра // Автоматика и вычислительная техника. — 2006. — № 4. — С. 72–81.
15. Абдуллаев А.А., Мансимов К.Б. Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра. — Баку: Элм, 2013. — 224 с.
16. Абдуллаев А.А. Об одной задаче управления, описываемой системой интегральных уравнений типа Вольтерра // Известия АН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат. наук. — 1995. — № 5–6. — С. 46–49.
17. Mansimov K.B., Mastaliyev R.O. Necessary first and second order optimality conditions in problems of control described by a system of Volterra difference equations // Journal Automatic Control and Computer Sciences. — 2008. — Vol. 42, N 2. — P. 71–76.
18. Масталиев Р.О. Об одной ступенчатой задаче оптимального управления дискретными системами // Вестник Бакинско-го ун-та. Сер. физ.-мат. наук. — 2010. — № 1. — С. 33–39.
19. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Особые оптимальные управления. — М.: Наука, 1973. — 256 с.
20. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления. — Минск: Наука и техника, 1974. — 274 с.
21. Мансимов К.Б. Дискретные системы. — Баку: Изд-во БГУ, 2002. — 114 с.
22. Масталиев Р.О. Об одной ступенчатой задаче оптимального управления с дискретно-непрерывной системой // Известия АН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат. наук. — 2014. — № 1. — С. 64–69.
23. Колмановский В.Б. Об асимптотических свойствах решений некоторых нелинейных систем Вольтерра // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 4. — С. 42–51.
24. Колмановский В.Б. Об асимптотической эквивалентности решений некоторых разностных уравнений // Автоматика и телемеханика. — 2001. — № 4. — С. 47–55.
25. Васильева А.Б., Тихонов А.Н. Интегральные уравнения. — М.: Изд-во МГУ, 1989. — 550 с.
26. Цалюк З.Б. Интегральные уравнения Вольтерра // Итоги науки и техники. Сер. Математический анализ. — 1977. — Т. 15. — С. 131–198.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Афанасьевым.

Масталиев Рашад Огтай оглы — д-р философии по математике, ст. науч. сотрудник, Институт систем управления им. акад. А. Гусейнова НАН Азербайджана, г. Баку, ☎ (994) 012-510-93-72, ✉ mastaliyevrashad@gmail.com.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ ЦЕЛЕЙ В КОМПОНЕНТНЫХ СТРУКТУРАХ СЛОЖНЫХ СЛАБОФОРМАЛИЗУЕМЫХ СИСТЕМ

И.А. Щербатов

С позиций системного подхода формализованы понятия цели и структуры цели сложной слабоформализуемой системы. Сформулированы прямая (назначение локальных целей для определенного числа компонентов) и обратная (формирование необходимого набора компонентов, обеспечивающих достижение фиксированного числа целей) задачи распределения локальных целей компонентов в компонентных структурах рассматриваемого класса сложных систем. Предложены методики решения прямой и обратной задач для группы мобильных робототехнических систем. Рассмотрен пример, свидетельствующий о применимости синтезированной методики для решения задачи распределения локальных целей в компонентных структурах сложных слабоформализуемых систем.

Ключевые слова: локальная цель, компонент, прямая и обратная задачи, распределение целей, сложная слабоформализуемая система, многоагентная технология, мобильная робототехническая система.

ВВЕДЕНИЕ

Цель — модель желаемого будущего [1] или состояние, к которому направлено движение системы [2]. Выделяются два понятия цели: «цель деятельности» (актуальная, конкретная цель) и «цель-стремление» (цель-идеал, потенциальная цель) [3]. В основном работы по проблемно-целевому анализу систем, формированию целей и путей их достижения связаны с декомпозицией некоторой цели (например, глобальной) на ограниченное множество подцелей [4, 5]. При декомпозиции главной цели из множества подцелей формируется графоподобная структура — дерево иерархии целей [6].

В соответствии с теоретико-множественным представлением [3] и терминологическим базисом [7] определим сложную слабоформализуемую многокомпонентную систему как

$$S = \langle I, OS, E, MH, CN \rangle, \quad (1)$$

где $I = \{I_G, I_z\}$ — совокупность целей (глобальных I_G и локальных I_z); $OS = \{KomS, OrgS, GoS\}$ — совокупность структур (компонентных $KomS$, орга-

низационных $OrgS$ и целевых GoS), реализующих цели; E — множество элементов сложной слабоформализуемой системы; MH — механизмы, реализующие систему; $CN = \{CN_{INS}, CN_{OUTS}\}$ — совокупность факторов (внутренних CN_{INS} и внешних CN_{OUTS}) существования системы.

Для формализованного представления структур целей, как правило, иерархических, воспользуемся кортежем вида [8], который можно представить с помощью графа:

$$GoS_{t_i} = \langle I, O, t_i \rangle, \quad (2)$$

где $O \subset MN$ — множество дуг графа, соответствующее имеющим место отношениям подчинения; t_i — момент времени.

В свою очередь, формальная логико-лингвистическая модель цели сложной слабоформализуемой системы может быть представлена как

$$I = \langle N_I, VeF, Cr_I, (\bar{r}; \bar{w}), (\underline{r}; \underline{w}), P_z \rangle, \quad (3)$$

где N_I — конечное множество имен целей на множестве целей; VeF — естественно-языковое пред-

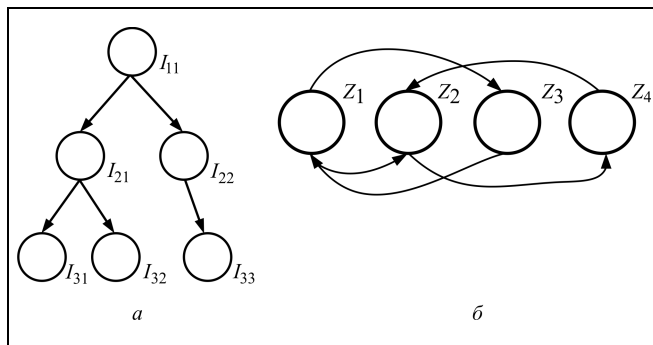


Рис. 1. Структурированность целей в сложных слабоформализуемых системах: *а* — иерархия локальных целей; *б* — уровневая структура локальных целей

ставление цели лицом, принимающим решение (ЛПР) в вербальной форме; Cr_I — конечное множество целевых критериев (в том числе частных), функций и функционалов, характеризующих достижение цели; $\bar{r}$ — цель вышестоящего уровня иерархии целей, которой подчинена текущая цель; $\bar{w}$ — мощность (вес связи орграфа (2)) отношения подчинения (дуги орграфа в форме (2)); r — цель подчиненного уровня иерархии; w — мощность отношения подчинения; P_z — ценность цели, определяющая ее важность в смысле ее достижения.

Компонентная структура $KomS$ образуется ограниченным множеством компонентов $\{K\}$, которые формируются на основе достижения единой локальной цели I_z [7]. Результат определения цели заключается в выявлении ее основных свойств и критериев ее достижения. Типы критериев достижения целей: критерий соответствия Cr_S — все частные критерии принадлежат области допустимых значений; критерий оптимальности по локальной цели Cr_{LI} — система оптимальна по некоторому показателю качества достижения локальной цели; критерий оптимальности по глобальной цели Cr_{GI} — все частные критерии обеспечивают экстремальное значение глобального критерия.

Критерии достижения целей в сложных слабоформализуемых системах, как и в других классах сложных систем, должны удовлетворять требованиям $T1$: *<простота → измеримость → репрезентативность → чувствительность>*.

Для структуры целей GoS в форме (1) существует иерархия показателей $T2$: *<структурированность → согласованность → непротиворечивость → полнота>*:

- *структурированность* — наличие определенной структуры целей в виде иерархии и обеспечения требований соподчиненности (рис. 1, *а*) [8]

либо на едином уровне расположения (взаимосвязанные задачи) (рис. 1, *б*) [9];

- *согласованность* — каждая локальная цель обеспечивает согласованное достижение глобальной цели;
- *непротиворечивость* — отсутствие противоречивых и взаимоисключающих локальных целей, одновременное достижение которых невозможно;
- *полнота* — имеет место взаимно однозначное соответствие между множеством локальных целей компонентов и возможными состояниями компонентов, возможные переходы из одного состояния в другое подробно рассмотрены в работе [2].

Множественность целей для рассматриваемого класса сложных систем [10] обуславливает многокритериальность реальных задач.

Цель настоящей работы заключается в разработке методики распределения локальных целей в компонентных структурах сложных слабоформализуемых систем и формировании компонентов для достижения определенного набора локальных целей. В ней впервые рассматриваются теоретические аспекты распределения локальных целей внутри компонентных структур сложных слабоформализуемых многокомпонентных систем и вопросы их практической реализации на примере робототехнических систем.

1. ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЦЕЛЕЙ

1.1. Постановка задач в общем виде

Для рассматриваемых задач исходными данными являются два множества с неодинаковым числом элементов — множество локальных целей $I_z = \{I_{z1}, I_{z2}, \dots, I_{zm}\}$ и множество компонентов $K = \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$ системы, описываемой в форме (1). Под прямой задачей распределения локальных целей будем понимать назначение локальных целей для определенного числа компонентов, а под обратной задачей — формирование необходимого набора компонентов, обеспечивающих достижение фиксированного числа целей. Отметим, что необходимо учесть наличие неопределенностей различных видов [11, 12].

Прямая задача распределения локальных целей для сложной многокомпонентной слабоформализуемой системы может быть сформулирована в виде:

$$\forall t_i \in T, \{K_j\} \subset OrgS_{t_i} \exists \{I_k\} \in I: I_k \xrightarrow{Unc} K_j. \quad (4)$$



В момент времени $t_i \in T$ требуется распределить между компонентами $\{K_j\} \subset \text{Org}S_{t_i}$, $j = \overline{1, n}$ (n — общее число компонент, которые образуют в момент времени $t_i \in T$ организационную структуру $\text{Org}S_{t_i}$) некоторое множество целей $\{I_k\} \in I$, т. е.

обеспечить соответствие $I_k \xrightarrow{Unc} K_j$, когда каждому компоненту K_j распределяется локальная цель I_k (с учетом воздействия неопределенности Unc). В общем случае справедливо соотношение $k \geq j$ (в момент времени $t_i \in T$ может существовать несколько наборов локальных целей, позволяющих достигать глобальную цель).

Учет неопределенностей может быть обеспечен различными способами, например, при нечетких целях, описываемых нечеткими критериями, могут применяться схемы получения обобщенных индексов ранжирования нечетких чисел [13]. Для нахождения оптимального критерия достижения цели при наличии нечетких ограничений может применяться схема Беллмана — Заде [14] и пр. Прямая задача имеет итерационный характер, т. е. по мере достижения локальных целей компонентами необходимо производить новое распределение целей.

Обратная задача распределения локальных целей в общем виде может быть формализована посредством схемы:

$$\forall t_i \in T, \{I_k\} \in I \exists \{K_j\} \subset \text{Org}S_{t_i}: K_j \xrightarrow{Unc} I_k. \quad (5)$$

В момент времени $t_i \in T$ для некоторого множества целей $\{I_k\} \in I$ требуется сформировать набор компонент $\{K_j\} \subset \text{Org}S_{t_i}$, $j = \overline{1, n}$, которые обеспечат достижение соответствующих локальных целей в условиях различных типов неопределенностей Unc , т. е. обеспечить соответствие $K_j \xrightarrow{Unc} I_k$.

При такой постановке задачи предполагается, что для достижения цели может изменяться компонентная структура системы, в том числе путем образования новых компонент.

Количественная мера оценки качества решения задачи (в любой из приведенных постановок) может быть представлена как

$$|\rho(I_k; I_k^*)| \leq \varepsilon, \quad (6)$$

где ρ — мера близости достижения локальной целью I_k требуемого значения I_k^* , т. е. попадание зна-

чения меры близости в интервал размером 2ε свидетельствует о достижении локальной цели I_k .

Определение 1. Интервал времени Δt , в течение которого обеспечивается выполнение соотношения (6), будем называть *интервалом достижения цели*. ♦

Локальные цели компонентов могут быть заданы различными функционалами, представлять собой нечеткие целевые функции, поэтому необходимо выделить типы используемых мер близости локальных целей в зависимости от их вида.

Критерии заданы аналитически вычисляемыми выражениями. В этом случае применяется мера вычисления «расстояния» между локальными целями [15]:

$$\rho = \|Cr_k^* - Cr_k\|. \quad (7)$$

Нечеткие критерии достижения локальных целей. В этом случае может применяться специальный индекс ранжирования [13]:

$$\rho(I_k; I_k^*) = \text{sign} \text{extr}\{\mu_i(cr_i^* - cr_i)/d_i\}, \quad i = \overline{1, k}, \quad (8)$$

где μ_i — значение функции принадлежности; $d_i = \max(cr_i^* - cr_i)$.

Имеются как четкие, так и нечеткие критерии. В этом случае применяется комбинация мер в форме (7) и (8).

1.2. Система допущений задач распределения локальных целей

Для прямой и обратной задач в постановках (4) и (5) необходимо обобщить и сформулировать ряд допущений:

- для достижения глобальной цели системы требуется достижение локальных целей, образующих ее компонент;
- постановку глобальной цели осуществляет ЛПР, например, в вербальной форме, в терминах «выше», «слабее» и пр.;
- в качестве критерия эффективности системы выступает критерий оптимальности по глобальной цели Cr_{GI} , в зависимости от вида критерия применяются количественные меры оценки качества решения задачи в виде (6)–(8);
- ЛПР также задает структуру целей в форме (3), указывая отношения подчиненности, веса и ценности P_{zk} конкретных целей, таким образом исключается возможность формирования не полного, противоречивого, не согласованного и не структурированного множества целей, т. е. сформированная структура целей GoS отвечает требованиям $T2$ (автоматическое формирова-

ние структуры целей возможно, однако в рамках данной работы не рассматривается);

- локальные цели взаимосвязаны между собой, и назначение цели определенному компоненту влияет на распределение оставшихся целей;
- в самом общем случае число целей превышает число компонентов $m \geq n$, это означает, что существует возможность последовательного достижения целей одним компонентом, т. е. по достижении одной цели происходит выбор и распределение следующей цели для «свободного» компонента (последовательный набор локальных целей компонентов представляет собой стратегию компонента);
- все цели в системе отвечают требованиям $T1$, обязательны измеримость, ясный физический смысл или возможность формализации на некоторой шкале;
- согласование противоречивых целей (критериев целей) происходит на этапе решения задачи распределения целей путем формирования Парето-оптимального решения.

2. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ ЦЕЛЕЙ

Задача распределения целей в сложных системах часто решается с применением технологий мультиагентных систем [16–18]. Каждый компонент структуры $OrgS_i$ может быть представлен в виде агента, реализующего взаимодействие с другими агентами в виде дополнительных аспектов [19]. Компонентная структура может быть представлена с помощью коалиции. Задача формирования коалиций решается, например, с применением одного из разделов теории игр, а именно PFGs [20]. При этом сам компонент — коалиция части элементов E сложной слабоформализуемой системы S .

Решение прямой задачи распределения локальных целей проиллюстрируем на примере группы мобильных робототехнических платформ, обеспечивающих решение взаимосвязанных задач в замкнутой среде при наличии динамических препятствий. Роботы могут объединяться в группы для решения сложной (составной) задачи.

Определение 2. *Элемент сложной системы $e_i \in E$, $i = \overline{1, b}$, где b — число элементов в системе S , — программный агент, реализующий поведение реального элемента в некоторой среде, полностью имитирующей функционирование реальной системы.*

Определение 3. *Компонент — коалиция элементов. ♦*

В соответствии с работой [20] это означает, что множество компонентов можно определить как $K \subseteq E$, $K \neq \emptyset$, а возможное число компонентов (образований из b элементов) как $|K| = 2^b - 1$.

Упрощение 1. Компонентная структура — коалиционная структура компонентов. ♦

Это означает, что $OrgS = \{K_1, K_2, \dots, K_{|OrgS|}\}$ и выполнены условия [20]:

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, |OrgS|\}, K_i \neq \emptyset, \\ \bigcup_{i=1}^{|OrgS|} K_i = E, \\ \forall i, j \in \{1, \dots, |OrgS|\} : i \neq j, K_i \cap K_j = \emptyset. \end{cases}$$

Упрощение 2. Глобальная цель — коалиция локальных целей. ♦

Это означает, что $I_G \subseteq I$, $I_G \neq \emptyset$, а $|I_G| = 2^h - 1$, h — число локальных целей компонентов ($h \neq b$).

Замечание 1. Компонент — обучаемый программный агент (для удобства будем называть данный агент компонентом), а локальная цель — программный агент, не способный самостоятельно выполнять действия.

2.1. Формализация агента «локальная цель»

На основе работы [21] локальная цель — агент, не способный повлиять на внешнюю среду, но способный изменить собственные характеристики. Агент содержит набор аспектов, который может быть описан кортежем

$$I_Z = \langle A, L, Q, C, P, T \rangle,$$

где A — алгоритм достижения локальной цели; L — местоположение, т. е. расположение локальной цели в пространстве координат; Q — состояние, т. е. вербальная фиксация процесса достижения цели (аспект, отвечающий за свойство реактивности и способный изменять состояние всего агента); C — подчиненность (порядок достижения цели по отношению к другим целям, например, могут принимать значения «предок», «потомок»); P — цена, т. е. число условных единиц прибыли, которые может получить компонент в случае достижения локальной цели с требуемой точностью; T — время достижения цели.

2.2. Формализация агента «компонент»

Формализация агента «компонент» требует получения функциональных зависимостей выделенных аспектов агента «локальная цель». Это означает, что функционирование агента «компонент»,

направленное на достижение локальной цели, изменяет аспекты агента актора «локальная цель».

Компонент может быть формализован с помощью теоретико-множественного подхода [7]. Основная функция агента «компонент» — достижение локальных целей. Для достижения глобальной цели необходимо распределить множество целей $\{I_Z\}$ между компонентами $\{K\}$. При распределении локальных целей необходимо учитывать эффективность достижения каждой цели каждым компонентом. В зависимости от способа задания критериев локальных целей степень их достижения может быть рассчитана с помощью мер (7) и (8).

2.3. Методика решения прямой задачи распределения целей

Так как число целей превышает число компонентов $m \geq n$, то для выбора локальной цели компонента введем обобщенный показатель выбора цели W_j , характеризующий мощность локальной цели. Введем понятие стратегии поведения $Str_j \in \{Str\}$ компонента K_j .

Определение 4. Стратегия поведения компонента — последовательность локальных целей, которые достигнуты за время работы T_j . ♦

Характеризующий эффективность стратегии комплексный критерий $W(Str_j) = (cr_{I_1}, cr_{I_2}, \dots, cr_{I_h})$, $h < m$ (критерий оптимальности по глобальной цели Gr_{GI}), является векторным.

Пространство стратегий имеет размерность n и задается n ортогональными осями координат, вдоль которых отложены значения P_j на отрезке времени T_j . Задача распределения локальных целей для компонента K_j сводится к формированию некоторого множества стратегий $\{Str\}$ и выбору из него наиболее эффективной Str_j^* . Управление распределением локальных целей сводится к решению задачи обеспечения максимального выигрыша (ценности) группой игроков (компонентов) Q при достижении максимального выигрыша каждым из игроков (компонентов):

$$Q = f(\{K\}_j; \{I_Z\}_k) \rightarrow \max.$$

При такой постановке существует опасность достижения компонентом локальной цели с высокой ценностью, но низкой эффективностью из-за чрезмерного расходования ресурсов достижения цели. Поэтому к критерию «ценность» Q (критерий оптимальности по глобальной цели) необходимо дополнительно ввести вспомогательный критерий поиска Паретто-оптимального распре-

деления $E = f(\gamma_1^{i,j}(Rs); \gamma_2^{i,j}(Rs))$, характеризующий эффективность достижения цели. Для этого введем функцию эффективности «компонент — локальная цель» $\gamma_1^{i,j}$, характеризующую требуемые ресурсы Rs для достижения цели; функцию эффективности «компонент — локальная цель — система» $\gamma_2^{i,j}$, характеризующую организационную структуру системы, т. е. возможности по использованию ресурсов достижения локальной цели конкретным компонентом в составе системы.

Критерием оптимальности служит функция мощности W на промежутке времени, равном t_p . При этом каждый из скалярных критериев W_j будем называть частным критерием оптимальности. В общем случае $W = f(W_1, \dots, W_j)$, а в частном случае $W = \sum_{j=1}^n W_j$. Основным ограничением является временной промежуток T , в течение которого система не изменит свою структуру.

В случае распределения целей $\{I_{zk}\}$ компонентам $\{K\}$, когда промежуток времени не определен, решением будет компромисс, при котором выполняется условие $W_j \rightarrow \max$, $W \rightarrow \max$, т. е. задача многокритериальной оптимизации:

$$\max_{Str \in D_{Str}} W(Str) = W(Str^*),$$

где D_{Str} — множество допустимых значений вектора варьируемых стратегий.

Введем на множестве D_{Str} отношение предпочтения $Str_l^1 > Str_l^2$, которое означает, что стратегия l -го робота Str_l^1 предпочтительнее стратегии робота Str_l^2 , если выполняется условие $W(Str_l^1) > W(Str_l^2)$, при этом можно выделить такую стратегию Str_l^* , для которой нет более предпочтительных стратегий. В этом случае стратегия Str_l^* будет Парето-оптимальным множеством локальных целей.

Одно из ограничений — время достижения локальных целей T , в течение которого будет неизменна компонентная структура системы. Время в данном случае является функцией доступных ресурсов $T = f(Rs)$. Для рассматриваемой группы роботов состав компонентов (компонентной структуры) может измениться вследствие необходимости подзарядки одного из роботов компонента (энергоёмкость батарей — ресурс, используемый для достижения локальной цели). Таким образом, изменение компонентной структуры ограничивает

временной интервал решения задачи распределения целей.

Для нахождения стратегии Str_l^* для каждого компонента необходимо построить дерево решений, в котором вершина — локальная цель, а ветвь — связь между целями. Поскольку ширина эстетивного дерева ограничена, то возникает задача выбора первой локальной цели каждого из компонентов. Поэтому до начала построения дерева решений необходимо выбрать первую локальную I_{zj}^1 цель для каждого компонента K_j при условии, что $W_j = \max$.

Каждая стратегия характеризуется временем $T_{Str, l}$ и мощностью $W_{Str, l}$. Время стратегии характеризует глубину дерева решений компонента K_j и зависит от суммы временных промежутков достижения локальных целей, включенных в ветви дерева. Значение $T_{Str, l}$ должно быть меньше времени, в течение которого существует неизменная компонентная структура системы:

$$\begin{cases} T_{Str, l} = \sum_{i=1}^m T_{I_{zi}}, \\ T_{Str, l} < T. \end{cases}$$

Для каждого компонента построено дерево возможных ходов, следующий шаг состоит в построении возможных стратегий для каждого компонента. На основе построенного множества Str производится поиск Парето-оптимального множества Str^* методом справедливых компромиссов.

В работе [19] обосновано применение метода справедливых компромиссов [22] для поиска Парето-оптимальной стратегии. В контексте рассматриваемой прямой задачи распределения локальных целей справедливым компромиссом будет такой компромисс, при котором относительный уровень повышения суммарной мощности стратегии для компонента K_j не превосходит относительно уровня понижения суммарной мощности стратегий для других компонентов.

Нахождение оптимального распределения целей — итерационный процесс, при котором сравниваются множества возможных стратегий Str_l для нахождения Парето-оптимального множества Str^* .

Мера относительного изменения мощности стратегий для компонента K_j при переходе от стратегии Str_v к стратегии Str_b :

$$\Delta\tilde{\phi}_j(Str_v, Str_b) = \frac{\Delta\phi(Str_v, Str_b)}{|\max_{Str \in (Str_v, Str_b)} \phi_k(Str)|},$$

где $\Delta\tilde{\phi}_j(Str_v, Str_b) = \phi_k(Str_v) - \phi_k(Str_b)$ — абсолютное изменение значений суммарной мощности стратегий $\phi_k(W)$ при переходе от стратегии Str_v к стратегии Str_b .

Стратегия Str_v эффективнее стратегии Str_b , т. е.

$$Str_b \rightarrow Str_v,$$

$$\text{если } |\Delta\tilde{\phi}_{\max}(Str_v, Str_b)| > |\Delta\tilde{\phi}_{\min}(Str_v, Str_b)|.$$

2.4. Алгоритмическое обеспечение решения прямой задачи распределения целей

Обобщенный алгоритм решения прямой задачи распределения целей (алгоритм итерационный, так как требуется уточнение оптимальной стратегии), представлен на рис. 2.

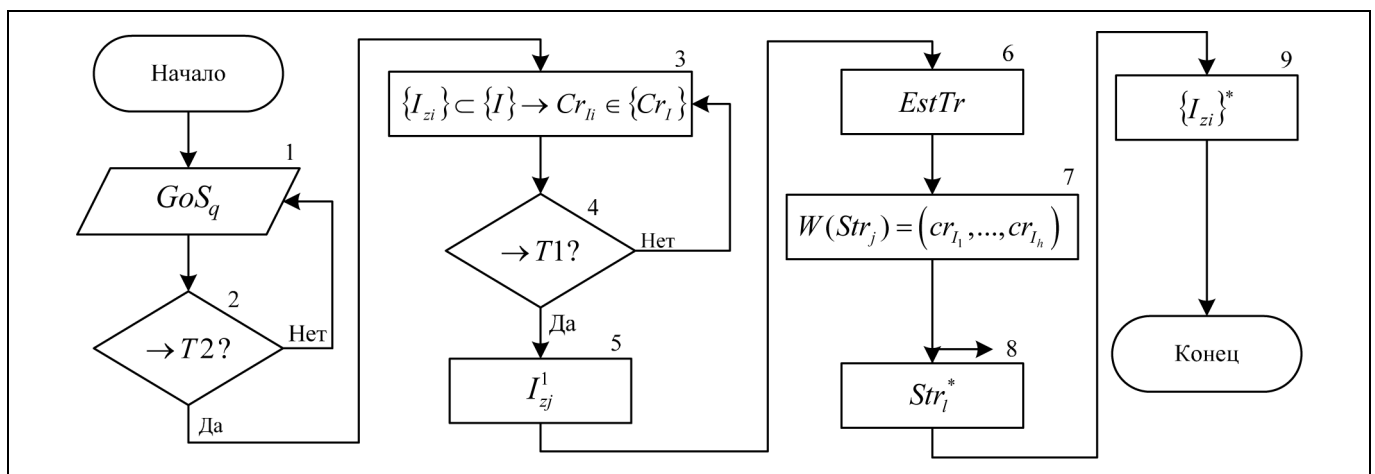


Рис. 2. Обобщенный алгоритм решения прямой задачи распределения целей

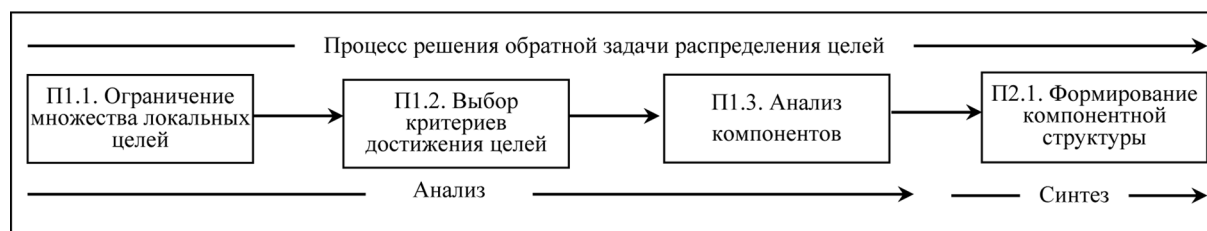


Рис. 3. Концепция решения обратной задачи распределения целей

В блоке 1 производится ввод всех локальных целей I_{zi} , $i = \overline{1, n_o}$, начальных условий и строится структура целей GoS_q . В блоке 2 обеспечивается ее проверка на соответствие требованиям в форме $T2$, т. е. она предъявляется ЛПР для принятия решения об ее утверждении в качестве рабочей структуры целей, которая будет реализована системой. Поскольку критерии достижения целей могут быть различными, то на основании эвристической процедуры, например, правил вида «ЕСЛИ... ТО...» (с учетом введенных начальных условий) в блоке 3 обеспечивается выбор конкретного критерия $Cr_{ji} \in \{Cr_j\}$ достижения цели $I_{zi} \in \{I_z\}$. В случае если хотя бы один из критериев $Cr_{ji} \in \{Cr_j\}$ не отвечает требованиям в форме $T1$ (блок 4), то переход к блоку 3. После этого реализуется описанная методика распределения локальных целей, основанная на модифицированном методе справедливых компромиссов. Модификация заключается в применении данного метода для распределения взаимосвязанных локальных целей. В блоке 5 выбирается первая локальная цель I_{zj}^1 для каждого из компонентов, затем в блоке 6 строится дерево решений для каждого компонента K_j . Сформированный в блоке 7 векторный критерий $W(Str_j) = (cr_{I_1}, ..., cr_{I_h})$, $h < m$, используется для получения оптимальной стратегии Str_i^* (блок 8), реализующей распределение локальных целей $\{I_{zi}\}^*$ между компонентами (блок 9).

3. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЦЕЛЕЙ

Показано [7], что образование компонентов на основании единой цели возможно при изменении глобальной цели системы, когда осуществляется коррекция локальных целей, приводящая к изменению организации системы и образованию новых компонентов. Образование компонента происходит таким образом, чтобы обеспечивалось достижение локальной цели.

3.1. Решение обратной задачи распределения локальных целей

Концептуально процесс решения обратной задачи распределения целей может быть представлен в виде двух этапов — анализ и синтез (рис. 3). Анализ состоит из трех следующих друг за другом подпроцессов (П1.1 — П1.3), а именно, ограничение множества локальных целей, выбор критериев достижения целей и анализ компонентов. Синтез — процесс формирования компонентной структуры сложной слабоформализуемой системы (П2.1). Рассмотрим более подробно каждый из них. Пусть локальные цели представлены в форме (3) и по условию обратной задачи распределения целей (5) их число конечно и равно n_o (П1.1).

Подпроцесс П1.2 предполагает назначение каждой локальной цели I_{zi} , $i = \overline{1, n_o}$, некоторого измеримого критерия $Cr_{ji} \in \{Cr_j\}$, который позволяет оценить степень достижения локальной цели на основе меры в форме (7) или (8). Отсутствие критерия достижения цели требует корректировки подмножества локальных целей (переформулирование локальной цели, которая не имеет количественной меры для оценивания степени ее достижения).

В рамках подпроцесса П1.3 осуществляется анализ возможностей формирования компонента K_j для достижения локальной цели I_{zj} , что позволяет сформировать компонентную структуру $KomS_j$ (П2.1), которая обеспечит решение обратной задачи распределения локальных целей. Предполагается, что при анализе будут выделены компоненты, обеспечивающие достижение соответствующей локальной цели, в противном случае процесс П1.3 потребует нескольких итераций для подбора требуемого компонента.

Рассмотрим методику, реализующую описанный концептуальный подход. В соответствии с постановкой в форме (5) момент времени $t_i \in T$ — момент времени ввода ЛПР в систему управления структуры целей GoS_q . Наряду со связями подчи-

ненности и ценностями локальных целей требуется дополнить указанную структуру атрибутом «механизм реализации цели».

Определение 5. Механизм реализации цели M_{I_z} — совокупность состояний и процессов, обеспечивающих достижение локальной цели. ♦

Механизм M_{I_z} содержит описание компонента, включающее в себя описание структуры, взаимного расположения и связей между элементами системы, входящими в состав компонента. Таким образом каждой локальной цели I_{zk} ставится в соответствие некоторый механизм M_{I_z} , описываемый экспертной группой или ЛПР в процессе проектирования системы. Однако возможно появление ранее не описанного механизма реализации цели в процессе функционирования системы, тогда в диалоговом режиме с ЛПР он должен быть описан в соответствующей нотации.

Ценность цели обуславливает первоначальный выбор, т. е. цель с максимальной ценностью будет иметь приоритет реализации соответствующего механизма. Робот, уже включенный в состав компонента, выбывает из множества доступных элементов построения компонентной структуры, обеспечивающей достижение глобальной цели, т. е. имеет место соотношение $\exists R_b \subset S: R_b \notin K$, означающее, что робот не включен в состав ни одного компонента.

Крайне важно время формирования компонента для локальной цели. Обозначим t_M время, в течение которого происходит образование компонента. Очевидно, что данный параметр должен быть ограничен и не превышать некоторого значения, задаваемого ЛПР или определяемого расчетным путем из требуемых условий решения задачи, т. е. $t_M \leq t_M^{\max}$.

На реализацию механизма M_{I_z} также оказывает влияние «удаленность» компонентов друг от друга и от цели. Под удаленностью $\rho_M(X)$ понимается количественная мера, характеризующая близость в пространстве существенных для системы параметров X , например, геометрическое расстояние в случае мобильных роботов. Компонент формируется при выполнении условий:

$$\begin{cases} \exists R_b \subset S: R_b \neq K, \\ \exists M_{I_z}: R_b \rightarrow K_j, \\ t_M \leq t_M^{\max}, \\ \rho_M \leq \rho_M^{\max}. \end{cases}$$

Механизм реализации цели M_{I_z} описывается в определенной нотации:

$$M_{I_z} = \langle I_z: [Cr_I]_h: A_1(Cr_I; I_z): A_2(\rho; Cr_I): \rho_M^{\max}: [K]_{R_s} \rangle,$$

где $A_1(Cr_I; I_z)$ — алгоритм выбора наиболее подходящего критерия Cr_I для цели I_z ; $A_2(\rho; Cr_I)$ — алгоритм выбор наиболее подходящей метрики в формах (6)—(8); $[K]_x$ — компоненты, необходимые для реализации M_{I_z} .

3.2. Алгоритмическое обеспечение решения обратной задачи распределения целей

Алгоритм решения обратной задачи распределения целей представлен на рис. 4.

Блоки 1 и 2 аналогичны блокам алгоритма, представленного на рис. 2. После проверки соответствия необходимым требованиям имеющейся структуры целей в блоке 3 выбирается цель с максимальной ценностью, установленной ЛПР. В соответствии с требуемым значением количественной меры $\rho_M(X)$ выбирается требуемый механизм реализации цели M_{I_z} (блок 4). В блоках 5 и 6 выбираются требуемый критерий достижения цели и меры для оценки степени ее достижения. При этом могут использоваться интеллектуальные процедуры выбора подробно рассмотренные в работе [15]. В блоке 7 выбирается соответствующая структура (набор компонентов), которая будет достигать цель при наличии необходимого ресурса R_s .

Проиллюстрируем эффективность применения разработанных подходов для решения практических задач управления распределением локальных

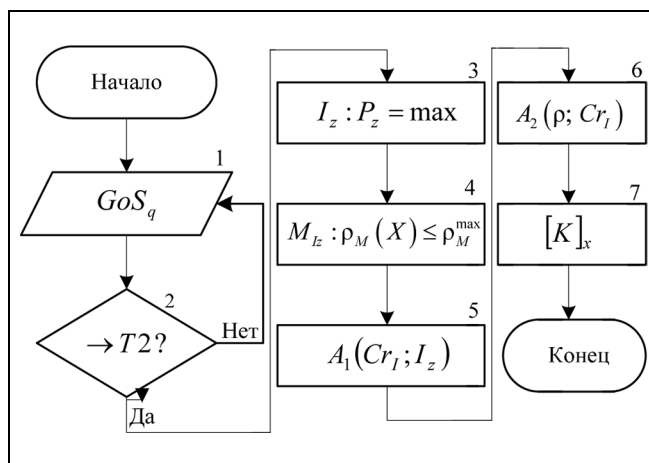


Рис. 4. Обобщенный алгоритм решения обратной задачи распределения целей

целей компонентных структур в сложных слабо-формализуемых системах на примере коалиции мобильных робототехнических платформ.

4. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЦЕЛЕЙ

Рассмотрим задачу патрулирования мобильными роботами некоторого пространства внутри здания. Исходные данные: число роботов $K, j = \overline{1, 5}$; число локальных целей (точек обхода) $I_k, k = \overline{1, 30}$; площадь патрулирования 4×12 в некоторых условных единицах. Цели представлены в форме (3). Глобальная цель сформулирована ЛПР в вербальной форме «Обеспечить обход всех требуемых точек в зоне патрулирования имеющимися роботами», структура целей уровневая (рис. 1, б), имеют место отношения типа «предок/потомок», мощности отношений одинаковы и равны единице. В качестве критериев достижения целей выступает совпадение координат робота в плоскости патрулирования с координатами точки обхода, мера вычисления «расстояния» достижения локальной цели задана в форме (7), критерии измеримы и имеют ясный физический смысл, противоречивые цели отсутствуют в силу особенностей синтезированной методики распределения при решении прямой задачи. В качестве ресурса, влияющего на распределение цели, выступает энергоемкость аккумуляторных батарей робота, которая не должна превышать их текущий заряд на момент распределения цели.

Пусть множество $\{I_k\}$ сгенерировано случайным образом. Основные параметры множества $\{I_k\}$: координаты местоположения в пространстве, время достижения цели, цена достижения цели и взаимосвязи типа «предок/потомок» (число взаимосвязей генерируется случайным образом, но не более пяти).

Замечание 2. Для удобства каждый робот рассматривается как отдельный компонент. ♦

Рассматриваемая задача может быть представлена графом, в вершинах которого помещаются цели, а ребра отражают взаимосвязи между целями. Пусть на первом шаге случайным образом сформирована структура, показанная на рис. 5, а.

Затем рассчитывается обобщенный показатель выбора цели W_j , на основании которого определяется первый шаг (рис. 5, б), т. е. выбор роботом наиболее эффективной цели в смысле ее достижения и близости к роботу. Если два робота выбирают одну локальную цель, то ее достижение обес-

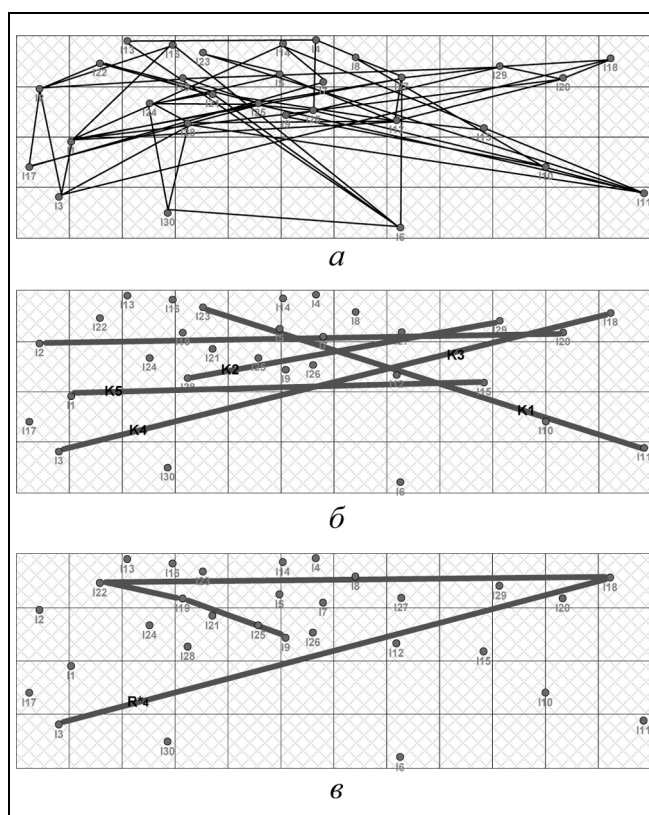


Рис. 5. Графическая иллюстрация решения прямой задачи распределения целей: а — сформированное множество взаимосвязанных локальных целей; б — определение первого шага стратегии для каждого из роботов; в — оптимальная стратегия для четвертого робота

печит робот, для которого значение обобщенного показателя W_j будет наибольшим.

Следующий шаг — построение дерева взаимосвязей локальных целей и формирование множества возможных стратегий для l -го робота (глубина этого дерева удовлетворяет условию времени существования группы роботов без изменения состава). Производится итерационный поиск Парето-оптимального множества стратегий Str_l^* с максимальной мощностью. Результатом служит набор стратегий, выполнение которых имеет наибольшую суммарную ценность. После ранжирования получаем стратегию Str_l^* (рис. 5, в).

Проведем сравнительную оценку синтезированной в работе методики с решением прямой задачи распределения целей методом ускоренного улучшения плана (рис. 6). Критерий сравнения — время распределения целей, т. е. время построения плана достижения целей.

Полученные данные свидетельствуют о повышении эффективности распределения локальных целей при решении прямой задачи с помощью син-

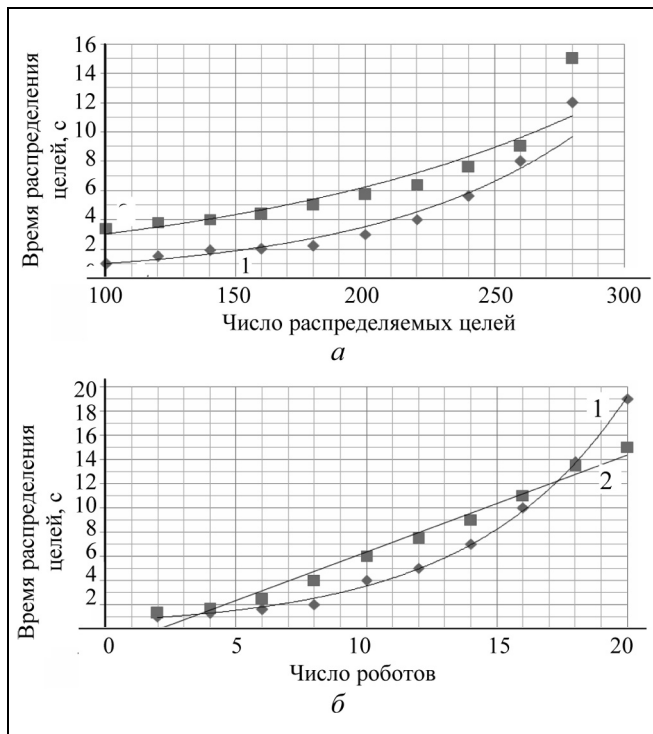


Рис. 6. Оценка эффективности решения прямой задачи распределения целей: *a* — зависимость времени распределения целей от числа целей; *б* — зависимость времени распределения целей от числа роботов; 1 — синтезированная методика; 2 — метод усовершенствования плана

тезированной методики. На основе экспериментов определен диапазон отношения «робот/цель» 1/35—1/13, в котором применение алгоритмов эффективно.

5. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЦЕЛЕЙ

Пусть в некоторый начальный момент времени $t_0 \in T$ ЛПР вводит фиксированное множество локальных целей $\{I_{1t_0}, I_{2t_0}, I_{3t_0}\} \in I$, обеспечивающих достижение единственной глобальной цели I_{Gt_0} , а компонентная структура представлена набором из трех компонентов $KomS_{t_0} = \{K_1, K_2, K_3\} : (e_1, e_2, e_3) \rightarrow K_1, (e_4, e_5) \rightarrow K_2, (e_6, e_7) \rightarrow K_2$ (первая группа состоит из трех, вторая и третья — из двух роботов, рис. 7, *a*). Структура целей иерархическая (в форме (2)).

Предположим, что в момент времени $t_1 \in T$ образована новая структура локальных целей $\{I_{1t_1}, I_{2t_1}\} \in I$, отвечающая требованиям в виде $T2$.

Пусть локальные цели I_{1t_1} и I_{2t_1} — блокирование некоторого подвижного объекта, которое может быть обеспечено группой из трех роботов. Для удобства будем полагать, что для них назначены измеримые критерии $\{Cr_{1t_1}, Cr_{2t_1}\}$ (которые определяют расстояние до цели и расстояние между роботами в сантиметрах), позволяющие оценить степень достижения целей на основе меры в форме (7) и не требующие корректировки множества целей, т. е. известны A_{11} и A_{21} .

Для каждой из целей определены механизмы их реализации: $M_{I_{1t_1}} = \langle I_{1t_1} : Cr_{1t_1} : A_{11} : A_{21} : 10 : 3 \rangle$. В качестве основного ресурса достижения цели выступает емкость аккумуляторных батарей, которая для удобства принята достаточной для достижения целей всеми роботами.

В соответствии с предложенным алгоритмом решением обратной задачи распределения целей будет структура, показанная на рис. 7, *б* (робот 7 не задействован для достижения новой глобальной цели I_{Gt_1}).

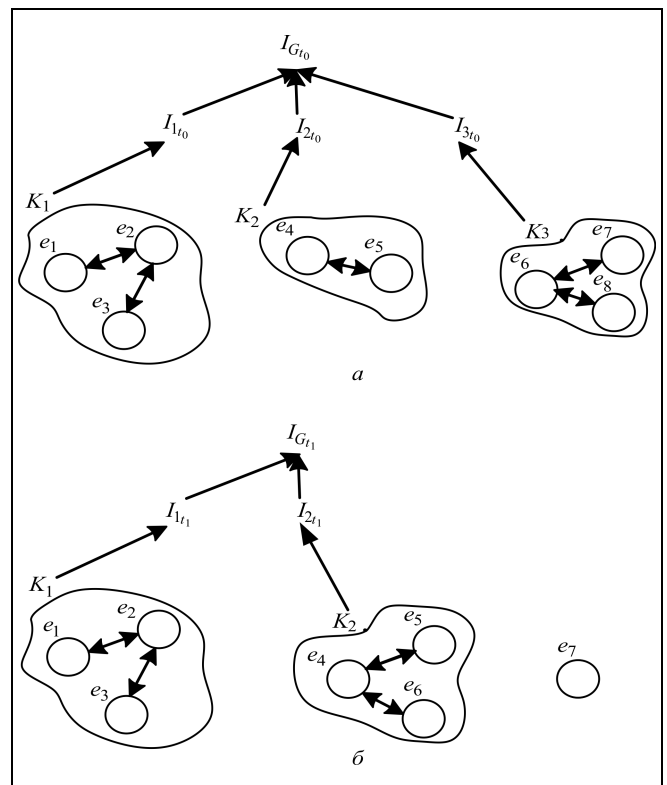


Рис. 7. Решение обратной задачи распределения целей: *a* — первоначальная структура системы; *б* — результат решения обратной задачи



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе синтезированной формальной логико-лингвистической модели цели сложной слабоформализуемой многокомпонентной системы сформулированы оригинальные постановки прямой и обратной задач распределения локальных целей. Предложенная методика в полной мере обеспечивает решение прямой задачи распределения локальных целей с помощью мультиагентного подхода (цель и компонент представлены программными агентами). Разработанный алгоритм решения задачи в такой постановке позволяет реализовать в системе управления группой роботов подсистему распределения взаимосвязанных целей, имеющих уровневое представление. Практическая реализация предложенной методики при имитационном моделировании показала увеличение эффективности распределения целей роботам, когда число целей превышает число роботов. Определен диапазон эффективной работы алгоритма решения прямой задачи распределения целей для отношения «робот/цель».

Для случая, когда имеется фиксированный набор целей и их распределение может быть обеспечено не для всего набора компонентов системы, синтезирован алгоритм на основе введенного понятия «механизм реализации цели». Описанный в оригинальной нотации механизм реализации цели в полной мере позволяет реализовать алгоритм решения обратной задачи с учетом имеющихся ресурсов и критериев достижения целей.

Полученные результаты позволяют утверждать, что синтезированные алгоритмы могут применяться для различных классов систем, структура которых описывается с помощью компонентного подхода, когда локальная цель и компонент системы позволяют формализацию в терминах мультиагентных систем. Обеспечивается распределение как иерархических, так и одноуровневых целей.

В дальнейшем предполагается разработать систему частных критериев достижения локальных целей, а также методику коррекции недостижимых локальных целей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Растригин Л.А., Граве П.С.* Кибернетика как она есть. — М.: Молодая гвардия, 1975. — 208 с.
2. *Ломако Е.И.* Математические и понятийные средства систематики — М.: Системная Энциклопедия, 2008. — 112 с.
3. *Волкова В.Н., Денисов А.А.* Теория систем и системный анализ. — М.: Юрайт, 2010. — 680 с.
4. *Путилов В.А., Горохов А.В.* Системная динамика регионального развития. — Мурманск: НИЦ «Пазори», 2002. — 306 с.
5. *Kumar E., Chaturvedi S.K.* Reliability Estimation of Complex Technical Systems with Dependency Modelling: A Fuzzy Approach // Journal of Uncertain Systems. — 2008. — Vol. 2, N 4. — P. 280–288.
6. *Лукиянова Л.М.* Семиотические модели и методы анализа и синтеза целей систем производственной сферы // Известия КГТУ. — 2008. — № 13. — С. 143–147.
7. *Щербатов И.А., Проталинский О.М.* Сложные слабоформализуемые многокомпонентные технические системы // Управление большими системами. — 2013. — Вып. 45. — С. 30–46.
8. *Лукиянова Л.М.* Теоретико-методологические основы структурно-целевого анализа и синтеза организационно-технических комплексов. — СПб.: Наука, 2006. — 276 с.
9. *Щербатов И.А., Проталинский И.О.* Исследование эффективности группового управления роботами методом имитационного моделирования // Вестник Саратовского гос. техн. ун-та. — 2010. — № 4 (50). — С. 34–37.
10. *Щербатов И.А.* Концепция системного анализа сложных слабоформализуемых многокомпонентных систем в условиях неопределенности // Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. — 2013. — № 2. — С. 28–35.
11. *Щербатов И.А.* Классификация неопределенностей в задачах моделирования и управления сложными слабоформализуемыми системами // Вестник Саратовского гос. техн. ун-та. — 2013. — Т. 1, № 1. — С. 175–179.
12. *Thunnissen D.*, Uncertainty classification for the design and development of complex systems // Proc. of the 3rd Annual Predictive Methods Conf., Veros Software, Santa Ana, CA, June, 2003. — P. 1–16.
13. *Федосеев С.А., Возжаков А.В., Гитман М.Б.* Управление производством на тактическом уровне планирования в условиях нечеткой исходной информации // Проблемы управления. — 2009. — № 5. — С. 36–43.
14. *Штовба С.Д.* Проектирование нечетких систем средствами MATLAB. — М.: Горячая линия — Телеком, 2007. — 288 с.
15. *Интеллектуальные системы управления организационно-техническими системами* / Под ред. А.А. Большакова. — М.: Горячая линия — Телеком, 2006. — 160 с.
16. *DeLoach S.A.* Multiagent Systems Engineering: a Methodology and Language for Designing Agent Systems // Proc. of Agent Oriented Information Systems '99. — 1999. — P. 45–57.
17. *Cetnarovicz E., Nawarecki E., Cetnarovicz K.* Agent-oriented Technology of Decentralized systems based on the M-agent Architecture // Preprints of IFAC/IFIP Conf. on Management and Control of Production and Logistics (MCPL'97, Campinas, Sp, Brazil, August 31 — September 1997). — Vol. 2. — P. 486–491.
18. *Shehory O., Kraus S.* Cooperative goal-satisfaction without communication in large-scale agent-systems // ECAI 96. 12th European Conf. on Artificial Intelligence. — P. 544–548.
19. *Protalinskii I.O., Shcherbatov I.A., Shishkin N.D.* Optimal Strategy Synthesis for a Group of Mobile Robots with Variable Structure // World Applied Sciences Journal. — 2013. — Vol. 24, N 2. — P. 268–275.
20. *Rahwan Talal, Michalak T., Wooldridge M., and Jennings N.R.* Anytime coalition structure generation in multi-agent systems with positive or negative externalities // Artificial Intelligence. — 2012. — Vol. 186. — P. 95–122.
21. *Minsky M.* The Society of Mind. — N.-Y.: Simon and Shuster, 1986. — 339 p.
22. *Дубов Ю.А., Травкин С.И., Якимец В.Н.* Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем. — М.: Наука, 1986. — 296 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Г. Лебедевым.

Щербатов Иван Анатольевич — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, Астраханский государственный технический университет, ☎ (851) 261-42-31, ✉ sherbatov2004@mail.ru.

АЛГОРИТМ ПРОВЕРКИ ОГРАНИЧЕННОСТИ ЧИСЛА ТОЧЕК УПРАВЛЕНИЯ В ЭКЗЕМПЛЯРЕ БИЗНЕС-ПРОЦЕССА

А.М. Миронов, А.Г. Михеев, В.Е. Пятецкий

Рассмотрено поведение точек управления, перемещающихся по графу экземпляра бизнес-процесса, выполняющегося в компьютерной системе. Отмечено, что в современных системах управления бизнес-процессами в связи с ошибками проектирования бизнес-процессов могут возникать ситуации неограниченного возрастания числа точек управления, что приводит к неоправданно большой нагрузке на компьютерную систему. Во избежание таких ситуаций рассмотрена задача анализа схем бизнес-процессов и предложен алгоритм проверки ограниченности числа точек управления.

Ключевые слова: исполнимый бизнес-процесс, системы управления, точка управления, направленный граф.

ВВЕДЕНИЕ

Процессный подход [1—4] в организации управления предприятием в настоящее время один из наиболее перспективных. В соответствии с этим подходом предполагается, что деятельность предприятия представляется в виде множества бизнес-процессов. Он реализуется системами управления бизнес-процессами (СУБП), которые раздают задания исполнителям и контролируют их выполнение.

При автоматизации предприятий на основе процессного подхода предприятия получают серьезные дополнительные преимущества, однако появляются и проблемы, решения которых не дают традиционные теории. Примером такой проблемы служит ситуация неограниченного возрастания числа точек управления в экземпляре бизнес-процесса.

1. ПРОБЛЕМА НЕОГРАНИЧЕННОГО РОСТА ЧИСЛА ТОЧЕК УПРАВЛЕНИЯ В ЭКЗЕМПЛЯРЕ БИЗНЕС-ПРОЦЕССА

Возможные последовательности заданий бизнес-процесса определяются схемой в виде связанного направленного графа. Рассматриваются графы, состоящие из узлов: «начало», «завершение пото-

ка», «действие», «исключающий шлюз», «параллельный шлюз».

Для бизнес-процесса можно создавать выполняющиеся экземпляры. Каждый выполняющийся экземпляр содержит граф бизнес-процесса, по которому перемещаются точки управления, представляющие собой указатели на активные узлы графа. Точки управления перемещаются только по ребрам графа и только в направлении ориентации ребра. Изначально, при создании экземпляра бизнес-процесса, активным узлом служит только узел «начало»: в него помещается единственная точка управления, которая тут же переходит по исходящему из этого узла ребру в следующий узел графа.

Узлы схемы можно разделить на два класса. К одному из них относятся узлы «действия», а к другому — все остальные узлы, которые называются маршрутными. Узлы «действия» содержат одно входящее и одно исходящее ребро. При исполнении экземпляра бизнес-процесса в компьютерной системе в момент прихода точки управления в узел «действие» определенному исполнителю направляется задание. После выполнения исполнителем задания точка управления перемещается по исходящему ребру в следующий узел графа. В маршрутных узлах происходит выбор ребра (ребер) дальнейшего движения точки (точек) управления.

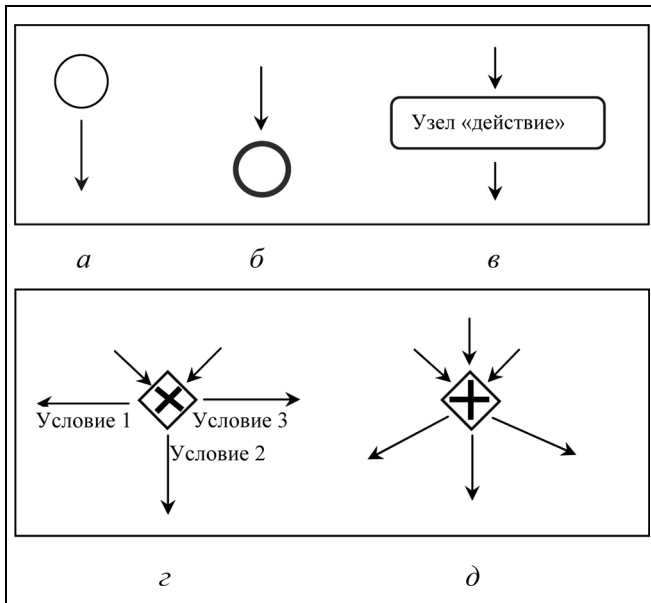


Рис. 1. Обозначения узлов: а — начало; б — завершение потока; в — действие; г — исключающий шлюз; д — параллельный шлюз

Маршрутный узел соответствует появлению, удалению, разветвлению/слиянию точек управления или выбору ребра (из нескольких присоединенных к узлу ребер), по которому точка управления переместится в следующий узел.

В выполняющемся экземпляре бизнес-процесса одновременно может быть несколько точек управления. Точка управления в маршрутном узле может разделиться на несколько точек управления, точки управления также могут ждать друг друга в другом маршрутном узле и далее слиться в одну точку управления.

Определим поведение рассматриваемых в настоящей статье типов узлов, а также приведем их графические изображения в соответствии с международным стандартом BPMN.

Узел «начало» соответствует точке начала исполнения бизнес-процесса. У него нет входящих ребер и есть только одно исходящее ребро. В момент запуска экземпляра бизнес-процесса в узел помещается точка управления, которая тут же выходит из него по исходящему ребру. В бизнес-процессе должен существовать единственный узел «начало». Обозначается «тонкой» окружностью (рис. 1, а).

Узел «завершение потока» должен иметь одно или более входящих ребер и ни одного исходящего. При попадании какой-либо точки управления в этот узел она удаляется. Экземпляр бизнес-процесса, в котором не осталось ни одной точки управления, считается завершившимся. Может су-

ществовать несколько узлов «завершение потока», но обязательно должен быть хотя бы один такой узел. Обозначается «жирной» окружностью (см. рис. 1, б).

Узел «действие» генерирует задание исполнителю, обозначается прямоугольником со скругленными углами, в центре которого пишется имя узла (рис. 1, в) и имеет одно входящее и одно исходящее ребро.

Узел «исключающий шлюз» может иметь несколько входящих и несколько исходящих ребер. Для каждой пришедшей в него точки управления выбирается, по какому из исходящих ребер она будет перемещена далее. Обозначается ромбом, в котором изображен «крестик» (рис. 1, г).

Узел «параллельный шлюз» обозначается ромбом, в котором изображен «плюс» (рис. 1, д). Может иметь несколько входящих и несколько исходящих ребер. Для каждого входящего ребра пришедшая по нему в параллельный шлюз точка управления ставится в очередь. Если для всех входящих ребер их очереди заполнены хотя бы одной точкой управления, то все точки управления, находящиеся на первой позиции очереди каждого входящего ребра, удаляются, а на каждом исходящем ребре генерируется точка управления.

При отсутствии ограничений на комбинации элементов на графе бизнес-процесса возможно появление экземпляров бизнес-процессов, в которых из-за ошибок проектирования число точек управления быстро возрастает с течением времени. Такие процессы могут создать запредельную нагрузку на систему, что приведет к прекращению ее нормальной работы.

На рис. 2 показан пример графа бизнес-процесса с быстро возрастающим числом точек управления. Во избежание такой ситуации на этапе проектирования для каждого определения бизнес-процесса устанавливается максимально возможное число точек управления в экземпляре бизнес-процесса. Если во время исполнения экземпляра оно будет превышено, то СУБП автоматически остановит выполнение данного экземпляра и даст сигнал администратору системы о возникнове-

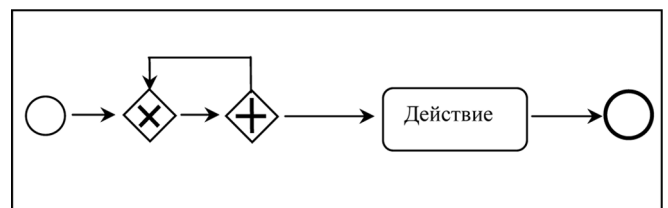


Рис. 2. Граф с быстро возрастающим числом точек управления

нии нештатной ситуации. Однако на этапе проектирования бизнес-процесса не всегда можно оценить максимальное число точек управления в любом его экземпляре, и экземпляр бизнес-процесса может быть «неправильно» остановлен системой. Далее, если система даже «правильно» остановила экземпляр бизнес-процесса, то ситуация на предприятии после остановки экземпляра бизнес-процесса может оказаться сложной, поскольку по заданиям этого экземпляра сотрудники совершили определенные действия. Возможно, эти действия требуют обязательного выполнения каких-то других действий в строго определенные интервалы времени, и их отсутствие может привести к убыткам и другим отрицательным последствиям.

Поэтому востребована задача разработки критерия, применяемого к бизнес-процессам на этапе их проектирования, который гарантирует, что для данного графа невозможна ситуация с бесконечно возрастающим числом точек управления.

2. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ КРИТЕРИЯ

1.1. Функционирование графа

Будем располагать точки управления на ребрах непосредственно перед узлами графа. Поставим в соответствие каждому узлу Q графа, не являющемуся узлом «начало», набор всех возможных операторов $op^{Q,m}(\cdot)$, которые изменяют число точек управления на входящих и выходящих из узла ребрах. Здесь $m = 1, \dots, L_Q$, где L_Q — число возможных операторов для узла Q . Если, например, Q — исключаяющий шлюз с одним входящим и двумя исходящими ребрами, то для него будет два оператора $op^{Q,m}(\cdot)$: первый из них будет удалять точку управления на входящем ребре и помещать ее на первое исходящее ребро, а второй — удалять ее на входящем ребре и помещать ее на второе исходящее ребро.

Рассмотрим множество операторов $op^{Q,m}(\cdot)$ для всех узлов графа. Оно соответствует всем возможным преобразованиям точек управления на входящих и исходящих ребрах всех узлов графа, поэтому перемещение точек управления по графу бизнес-процесса (функционирование графа) можно представить как последовательность выполненных операторов $op^{Q,m}(\cdot)$.

На каждом шаге i функционирования графа определим множество узлов, которые активны на этом шаге:

— если узел Q — параллельный шлюз, то он активен на шаге i , если для каждого ребра f , входя-

щего в узел Q , число точек управления на нем больше нуля;

— каждый из остальных узлов активен на шаге i , если существует ребро f , входящего в узел Q , для которого число точек управления на нем больше нуля.

Если узел Q на шаге i активен, то на этом шаге может быть выполнен оператор $op^{Q,m}(\cdot)$, в результате изменяется число точек управления на ребрах графа. Если узел Q на шаге i не активен, то ни один из операторов $op^{Q,m}(\cdot)$ для этого узла на шаге i выполнить нельзя, так как для его выполнения «не хватит» точек управления на входящих в него ребрах.

Поясним действие операторов $op^{Q,m}(\cdot)$ для различных типов узлов.

- Если узел Q является узлом-действием, то для него будет существовать единственный оператор $op^{Q,m}(\cdot)$, который удаляет точку управления на входящем ребре, и добавляет точку управления на исходящем ребре.
- Если узел Q — исключаяющий шлюз, то оператор $op^{Q,m}(\cdot)$ удаляет точку управления на одном из входящих ребер и добавляет ее на одно из исходящих ребер. Число операторов будет равно числу входящих ребер, умноженному на число исходящих ребер.
- Если узел Q — параллельный шлюз, то для него будет существовать единственный оператор $op^{Q,m}(\cdot)$, который удаляет точку управления на каждом входящем ребре и добавляет ее на каждое исходящее ребро.
- Если узел Q — завершение потока, то оператор $op^{Q,m}(\cdot)$ удаляет точку управления на одном из входящих ребер. Число операторов будет равно числу входящих ребер.

1.2. Алгоритм анализа множеств точек управления

Пусть $(f_1, \dots, f_n)$ — список всех ребер графа бизнес-процесса, первое в нем ребро, исходящее из начального узла.

На каждом шаге $i > 0$ функционирования графа каждому ребру f сопоставим число $CP_i(f)$, равное числу точек управления на ребре f . В начальный момент это число отлично от нуля только на ребре, выходящем из начального узла: для этого ребра $CP_0(f_1) = 1$.

Для каждого шага $i > 0$ обозначим вектор целых неотрицательных чисел:

$$CP_i = (CP_i(f_1), \dots, CP_i(f_n)). \quad (1)$$



Нетрудно видеть, что в силу определения поведения узлов графа, для каждого $i > 0$ векторы CP_i и CP_{i+1} связаны соотношениями вида

$$CP_{i+1} = CP_i + V. \quad (2)$$

Здесь знак «плюс» означает покомпонентное сложение, и $V = (v^1, \dots, v^n)$ целочисленный вектор, каждая компонента v^j которого определяется тем, как было изменено соответствующее множество $CP(f_j)$ на шаге i : для каждого $j = 1, \dots, n$

- $v^j = -1$, если значение $CP_i(f_j)$ было уменьшено на единицу (с ребра была удалена точка управления);
- $v^j = 1$, если значение $CP_i(f_j)$ было увеличено на единицу (на ребро была добавлена точка управления);
- $v^j = 0$, если на шаге i значение $CP_i(f_j)$ не изменилось.

Обозначим символом $\mathbf{V}$ совокупность всех векторов V , которые могут быть вторыми слагаемыми в правых частях соотношений вида (2), т. е. $\mathbf{V}$ представляет собой совокупность возможных изменений числа точек управления на ребрах графа, соответствующую применению всех операторов $op^{Q,m}(\cdot)$ для всех узлов графа.

Вследствие конечности числа узлов графа и конечности числа его ребер, число операторов $op^{Q,m}(\cdot)$ тоже конечно, следовательно, совокупность $\mathbf{V}$ также будет состоять из конечного числа векторов.

Определим индуктивно совокупность $\mathbf{CP}$ векторов целых неотрицательных чисел размерности n :

- $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{CP}$;
- если $U \in \mathbf{CP}$, $V \in \mathbf{V}$ и все компоненты вектора $U + V$ неотрицательны, то $U + V \in \mathbf{CP}$.

Из данного определения следует, что множество $\mathbf{CP}$ содержит все векторы вида (1).

Таким образом, если множество $\mathbf{CP}$ конечно, то совокупность векторов вида (1) тоже конечна, т. е. число точек управления на ребрах графа ограничено.

Обозначим Z_∞^+ множество целых чисел, больших или равных нулю, к которому добавлен новый элемент ∞ . Мы будем рассматривать Z_∞^+ как линейно упорядоченное множество, в котором элемент ∞ является наибольшим и отношение порядка на остальных элементах совпадает с отношением порядка на целых числах.

Запись Z_∞^{+n} означает совокупность всех векторов длины n , компоненты которых являются эле-

ментами множества Z_∞^+ . Будем рассматривать Z_∞^+ как частично упорядоченное множество, порядок на котором определяется следующим образом:

$$(a^1, \dots, a^n) < (b^1, \dots, b^n) \Leftrightarrow a^1 \leq b^1, \dots, a^n \leq b^n, \\ \exists i, a^i < b^i,$$

где $(a^1, \dots, a^n), (b^1, \dots, b^n) \in Z_\infty^{+n}$, $1 \leq i \leq n$.

Будем считать, что элементы множества Z_∞^+ можно складывать с числами из $\{-1, 0, 1\}$: если $a \in Z_\infty^+$ и $b \in \{-1, 0, 1\}$, то запись $a + b$ означает:

- элемент ∞ , если $a = \infty$;
- обычную сумму a и b , если $a \neq \infty$.

Будем употреблять следующее обозначение: для каждого вектора $U \in Z_\infty^{+n}$ и каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ запись U^i означает i -ю координату вектора U .

Для анализа ограниченности множества точек управления определим проверочный граф, который обозначим CP_∞ . Определим для графа метки узлов и ребер:

- для каждого узла X определим в качестве метки $|X|$ вектор из Z_∞^{+n} ;
- для каждого ребра E определим в качестве метки $|E|$ вектор из $\mathbf{V}$.

Если из узла X графа CP_∞ исходит ребро в узел Y , имеющее метку V , то будем обозначать этот факт записью $X \xrightarrow{V} Y$.

Граф CP_∞ определим индуктивно, т. е. множества его узлов и ребер будут задаваться путем описания процедуры их построения. В каждый момент построения этого графа каждый из его узлов будет считаться либо необработанным, либо обработанным. Необработанными узлами будем считать узлы, содержащиеся в специальном списке $\mathbf{RN}$.

Напомним, что узел Y какого-либо графа называется *достижимым* из узла X , если либо $X = Y$, либо существует путь из узла X в узел Y , т. е. последовательность $(e_1, \dots, e_k)$ ребер этого графа такая, что из узла X выходит ребро e_1 , а в узел Y входит ребро e_k и если $k > 1$, то для каждого $i = 1, \dots, k - 1$ конец ребра e_i совпадает с началом ребра e_{i+1} . Если узел Y достижим из узла X , то этот факт мы будем обозначать записью $X \rightarrow Y$.

Граф CP_∞ строится следующим образом: Сначала множество узлов этого графа содержит лишь узел с меткой $(1, 0, \dots, 0)$, он называется *начальным узлом*, и в список необработанных узлов $\mathbf{RN}$ входит лишь этот узел.

Затем итеративно выполняется последовательность действий, заключающаяся в том, что к уже

построенным узлам и ребрам добавляются новые узлы и ребра. Новая итерация данной последовательности происходит, только если список **RN** не пуст, в этом случае первый узел этого списка (обозначим его символом X) исключается из списка **RN** и выполняются следующие действия.

1. Если имеется не принадлежащий списку **RN** узел $Y \neq X$ такой, что $|X| = |Y|$, то все ребра, ведущие в узел X , перенаправляются в узел Y , и узел X удаляется.

Иначе для каждого $V \in \mathbf{V}$ такого, что $X + V \in Z_{\infty}^{+n}$ в проверочный граф добавляются новый узел Y с меткой $|X| + V$ и ребро из узла X в узел Y с меткой V и, кроме того, узел Y добавляется в конец списка необработанных узлов **RN**.

2. Если среди обработанных узлов существует пара Y_1, Y_2 такая, что $Y_1 \rightarrow Y_2$ и $|Y_1| < |Y_2|$, то у узла Y_2 изменяется метка. Новая метка $|Y_2|$ узла Y_2 определяется как

$$|Y_2|^i = \begin{cases} \infty, & \text{если } |Y_1|^i < |Y_2|^i \\ |Y_1|^i, & \text{если } |Y_1|^i = |Y_2|^i \end{cases}.$$

Далее соответствующие компоненты (на тех же позициях, на которых в векторе $|Y_2|$ находятся элементы ∞) изменяются на ∞ у меток всех узлов, достижимых из узла Y_2 .

Данное действие может выполняться несколько раз до тех пор, пока среди всех пар обработанных узлов проверочного графа будут существовать пары, для которых выполняется условие, сформулированное в п. 2.

Из описания алгоритма следует, что на каждом шаге его работы количество ребер, выходящих из каждого узла, не превосходит $|\mathbf{V}|$.

Лемма 1. Если процесс построения графа CP_{∞} длится бесконечно долго, то граф CP_{∞} содержит бесконечный путь из начального узла такой, что все узлы, входящие в этот путь, различны.

Доказательство. Из описания алгоритма построения графа CP_{∞} следует, что каждый его узел достижим из начального узла.

Если бы граф CP_{∞} был конечным, то алгоритм его построения завершал бы свою работу после конечного числа шагов, так как после последнего добавления обработанного узла к множеству узлов графа CP_{∞} список **RN** может только уменьшаться, и он уменьшается с каждой итерацией работы этого алгоритма.

Таким образом, граф CP_{∞} бесконечен, и каждый его узел достижим из начального узла. Обозначим этот начальный узел символом X_1 . Как было отмечено, из каж-

дого узла графа CP_{∞} (в частности, из узла X_1) выходит конечное число ребер.

Обозначим записью $\{Y_1, \dots, Y_k\}$ совокупность тех узлов графа CP_{∞} , которые являются концами ребер, выходящих из узла X_1 и не совпадают с ним.

Удалим из графа CP_{∞} все ребра, концами которых является X_1 . Получившийся граф обозначим той же записью CP_{∞} . Нетрудно видеть, что каждый узел графа CP_{∞} , отличный от узла X_1 , достижим из некоторого узла Y_i из упомянутой совокупности.

Для каждого $i = 1, \dots, k$ обозначим через $CP_{\infty}(Y_i)$ подграф графа CP_{∞} , состоящий из тех узлов, которые достижимы из узла Y_i и всех ребер, которые выходят из этих узлов.

Нетрудно видеть, что узел X_1 не входит ни в один из этих графов. Если бы все графы $CP_{\infty}(X_i)$, $i = 1, \dots, k$, были конечны, то граф CP_{∞} тоже был бы конечен, так как каждый из его узлов либо начальный, либо принадлежит объединению множеств узлов графов $CP_{\infty}(X_i)$, $i = 1, \dots, k$.

Поэтому существует узел (обозначим его X_2) графа CP_{∞} такой, что существует ребро из узла X_1 в узел X_2 , и граф $CP_{\infty}(X_2)$ бесконечен и не содержит узла X_1 .

Граф $CP_{\infty}(X_2)$ обладает теми же свойствами, что и исходный граф CP_{∞} : он бесконечен, и, кроме того, если считать узел X_2 начальным узлом графа $CP_{\infty}(X_2)$, то можно утверждать, что каждый узел графа $CP_{\infty}(X_2)$ достижим из начального узла этого графа, и из каждого узла графа $CP_{\infty}(X_2)$ выходит лишь конечное число ребер.

Поэтому аналогичными рассуждениями можно установить, что существует узел (обозначим его X_3), графа $CP_{\infty}(X_2)$, который не совпадает с узлом X_2 (а также с узлом X_1), такой, что существует ребро из его начального узла X_2 в узел X_3 , и граф $CP_{\infty}(X_3)$ (узлами которого являются узлы графа CP_{∞} , достижимые из узла X_3), бесконечен и из каждого его узла выходит лишь конечное число ребер.

Мы можем продолжать данные рассуждения неограниченно: можно построить бесконечную последовательность различных узлов $X_1, X_2, X_3, \dots$ такую, что для каждого $k > 1$ существует ребро из узла X_{k-1} в узел X_k и граф $CP_{\infty}(X_k)$ (узлами которого являются узлы графа CP_{∞} , достижимые из узла X_k) бесконечен и из каждого его узла выходит лишь конечное число ребер.

Последовательность $X_1, X_2, X_3, \dots$ является искомым бесконечным путем из начального узла графа CP_{∞} , причем этот путь состоит из различных узлов. ♦

Теорема 1. Описанный алгоритм построения графа CP_{∞} всегда завершает свою работу после конечного числа шагов.

Доказательство. Если данный алгоритм не завершает свою работу, то, согласно лемме 1, граф CP_{∞} содержит бесконечный путь из начального узла, причем



этот путь состоит из различных узлов. Обозначим последовательность узлов, из которых состоит этот путь,

$$X_1, X_2, X_3, \dots \quad (3)$$

Определим последовательность индексов $i_1, i_2, i_3, \dots$, обладающую свойством:

$$i_1 < i_2 < i_3 \dots \text{ и } |X_{i_1}|^1 \leq |X_{i_2}|^1 \leq |X_{i_3}|^1 \leq \dots \quad (4)$$

Среди элементов $\{|X_i|^1 \geq 1\}$ существует наименьший элемент, обозначим индекс этого элемента через i_1 . Далее, среди элементов $\{|X_i|^1 | i \geq i_1\}$ существует наименьший элемент, обозначим индекс этого элемента через i_2 . Согласно определению элементов $|X_{i_1}|^1$ и $|X_{i_2}|^1$, имеет место неравенство $|X_{i_1}|^1 \leq |X_{i_2}|^1$.

Продолжая этот процесс (т. е. определяя аналогичным образом элементы $|X_{i_3}|^1$, и т. д.), получим искомую последовательность индексов $i_1 < i_2 < i_3 \dots$, обладающую свойством (4).

Удалим из исходной последовательности (3) члены с индексами, не принадлежащими последовательности $i_1 < i_2 < i_3 \dots$, и обозначим получившуюся последовательность той же записью (3). Согласно построению, первые координаты элементов (3) образуют неубывающую последовательность.

Действуя аналогичным образом, строим подпоследовательность последовательности (3), в которой вторые координаты образуют неубывающую последовательность.

Обозначим получившуюся последовательность той же записью (3). Таким образом, в получившейся последовательности (3) уже и первые и вторые координаты образуют неубывающую последовательность.

Продолжая далее аналогичным образом, можно построить такую последовательность (3), в которой все n координат образуют неубывающую последовательность, т. е. верна цепочка неравенств

$$|X_1| \leq |X_2| \leq |X_3| \leq \dots \quad (5)$$

Поскольку по предположению все векторы, входящие в исходный бесконечный путь, различные, то, следовательно, все неравенства в цепочке (5), строгие, т. е.

$$|X_1| < |X_2| < |X_3| \dots \quad (6)$$

Кроме того, поскольку последовательность $X_1, X_2, X_3, \dots$ является подпоследовательностью исходного бесконечного пути, то

$$X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \dots$$

Для каждого $i \geq 1$ существует такой момент построения графа CP_∞ , на котором узлы X_i и X_{i+1} станут обрабатываемыми, и метки этих узлов не будут изменяться в последующие моменты построения графа CP_∞ .

Пусть $i \geq 1$ и метка $|X_i|$ имеет вид $(|X_i|^1, \dots, |X_i|^n)$. Согласно правилам построения графа CP_∞ , метки $|X_i|$ и $|X_{i+1}|$ будут обладать свойством:

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} |X_i|^k = |X_{i+1}|^k \text{ или } |X_{i+1}|^k = \infty.$$

Поэтому для каждого $k \in \{1, \dots, n\}$ последовательность $|X_1|^k, |X_2|^k, |X_3|^k \dots$ обладает свойством: либо все ее элементы равны друг другу, либо, начиная с некоторого номера, ее элементы равны ∞ .

Следовательно, начиная с некоторого номера все члены последовательности $|X_1|, |X_2|, |X_3|, \dots$ равны друг другу. Но это противоречит цепочке строгих неравенств (6).

Таким образом, наше исходное предположение о том, что алгоритм построения графа CP_∞ может не завершать свою работу, неверное. ♦

Лемма 2. Для каждого ребра $X \rightarrow Y$ графа CP_∞ и каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ $|Y|^i = |X|^i + V^i$ или $|Y|^i = \infty$ и

$$|X|^i = \infty \Rightarrow |Y|^i = \infty. \quad (7)$$

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по построению графа CP_∞ .

В начальный момент граф CP_∞ не имеет ребер, поэтому утверждение леммы для него справедливо.

Если ребро $X \xrightarrow{V} Y$ было добавлено к графу CP_∞ в текущий момент на основании п. 1 в описании алгоритма построения графа CP_∞ , то свойство (7) будет верно по определению метки $|Y|$. Если в текущий момент изменяются метки начала или конца $X \rightarrow Y$ в соответствии с п. 2 в описании алгоритма построения графа CP_∞ , то:

— если при этом изменяется метка $|X|$, то, поскольку узел Y достижим из узла X , то, согласно п. 2, $|Y|$ изменится в тех же компонентах (они заменяются на ∞), следовательно, свойство (7) будет верно;

— если же при этом изменяется лишь метка $|Y|$ (которая может изменяться лишь путем замены некоторых ее компонентов на ∞), то свойство (7) будет верно по очевидным причинам. ♦

Пусть X — произвольный узел графа. Обозначим: $U(X)$ — множество, состоящее из всех векторов $U \in \mathbf{CP}$, обладающих свойством $\forall i \in \{1, \dots, n\} |X|^i \neq \infty \Rightarrow U^i = |X|^i$; для каждого целого числа $k \geq 1$ $U(X, k)$ — множество, состоящее из всех векторов $U \in U(X)$, обладающих свойством:

$\forall i \in \{1, \dots, n\} |X|^i = \infty \Rightarrow U^i > k$; для каждой пары U, U' векторов из множества $\mathbf{CP}$ запись $U \rightarrow U'$ означает, что либо $U = U'$, либо существует последовательность $V_1, \dots, V_m$ векторов из $\mathbf{V}$ такая, что

$$\begin{aligned} U_1 + V_1 &\in \mathbf{CP} \\ (U_1 + V_1) + V_2 &\in \mathbf{CP} \\ &\dots \\ (((U_1 + V_1) + V_2) + \dots V_{m-1}) &\in \mathbf{CP} \\ (((U_1 + V_1) + V_2) + \dots V_m) &= U'. \end{aligned}$$

Лемма 3. Для каждого узла X графа CP_∞ множество $U(X)$ непусто, и для каждого $U \in U(X)$ и каждого $k \geq 1$ существует вектор $U' \in U(X, k)$ такой, что $U \rightarrow U'$.

Доказательство. Докажем лемму индукцией по построению графа CP_∞ . В начальный момент граф CP_∞ содержит единственный узел X с меткой $(1, 0, \dots, 0)$. В данном случае $U(X) = \{X\}$.

Пусть в некоторый момент построения графа CP_∞ утверждение леммы было верно для каждого узла X этого графа, который был добавлен до этого момента.

Докажем, что в этом случае утверждение леммы также будет верно для каждого узла этого графа после выполнения в текущий момент действий, указанных в п. 1 или 2 в описании алгоритма построения графа CP_∞ .

1. Если в текущий момент к графу CP_∞ был добавлен узел Y в соответствии с п. 1 в описании алгоритма построения этого графа, т. е. $|Y| = |X| + V$, где X обладает свойством, изложенным в формулировке леммы, и $V \in V$, то нетрудно видеть, что

$$\{U + V | U \in U(X)\} = U(Y),$$

$$\forall k \geq 1 \{U + V | U \in U(X, k + 1)\} \subseteq U(X, k),$$

откуда следует, что свойство в формулировке леммы 3 будет верно также и для узла Y .

2. Пусть в текущий момент:

— среди обработанных узлов существует пара Y_1, Y_2 удовлетворяющая условию из п. 2 в описании алгоритма построения графа CP_∞ , т. е. узел Y_2 достижим из узла Y_1 и $|Y_1| < |Y_2|$;

— для каждого узла Y , достижимого из узла Y_2 , его метка заменяется на метку $|Y|$, где $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$|Y|^i = \begin{cases} \infty, & \text{если } |Y_1|^i < |Y_2|^i, \\ |Y_1|^i, & \text{если } |Y_1|^i = |Y_2|^i. \end{cases} \quad (8)$$

Докажем, что тогда утверждение леммы будет верно также и для новой метки $|Y|$ узла Y .

Пусть $Y_1 = X_0 \xrightarrow{V_1} X_1 \xrightarrow{V_2} \dots \xrightarrow{V_p} X_p = Y_2$ — путь из узла Y_1 в узел Y_2 .

Обозначим $V = V_1 + \dots + V_p$. Из леммы 2 следует, что $\forall i \in \{1, \dots, n\}$

$$|Y_2|^i = |Y_1|^i + V^i \text{ или } |Y_2|^i = \infty, \\ |Y_1|^i = \infty \Rightarrow |Y_2|^i = \infty. \quad (9)$$

Из неравенства $|Y_1| < |Y_2|$ и соотношения (9) следует, что для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$:

- если $|Y_1|^i < |Y_2|^i < \infty$, то $V^i = 0$,
- если $|Y_1|^i < |Y_2|^i < \infty$, то $V^i > 0$.

По индуктивному предположению, для узла X_0 верно утверждение леммы 3. В частности, существуют вектор $U_0 \in U(X_0)$ и вектор $U'_0 \in U(X_0, 1)$ такой, что $U_0 \rightarrow U'_0$.

Поскольку отрицательные компоненты вектора V_1 равны -1 , то из $U'_0 \in U(X_0, 1)$ следует, что $U_1 = U'_0 + V_1 \in CP$.

Поскольку $\forall i \in \{1, \dots, n\} |X|^i \neq \infty$ следует, что $|X_0|^i \neq \infty$ и $|X_1|^i = |X_0|^i + |V_1|^i = U_0^i + V_1^i = (U'_0)^i + V_1^i = U_1^i$, то, следовательно, $U_1 \in U(X_1)$.

Аналогичным образом устанавливается существование векторов $U_2, \dots, U_p$ свойствами: $\forall j \in \{2, \dots, p\} U_j \in U(X_j)$; $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ из $|X_j|^i \neq \infty$ следует, что $|X_{j-1}|^i \neq \infty$ и $|X_j|^i = |X_{j-1}|^i + V_j^i = U_{j-1}^i + V_j^i = U_j^i$.

Из приведенных соотношений следует, что введенные векторы U_0 и U_p обладают свойствами (напомним, что $X_0 = Y_1$ и $X_p = Y_2$):

$$U_0 \in U(Y_1), \quad U_p \in U(Y_2); \quad U_0 \rightarrow U_p.$$

Обозначим символом m наибольшую из компонент вектора U_0 . По предположению, для узла Y_2 справедливо утверждение леммы 3, в частности, существует вектор $U' \in U(Y_2, m)$ такой, что $U_p \rightarrow U'$. Из этого соотношения и из того, что $U_0 \rightarrow U_p$ следует соотношение $U_0 \rightarrow U'$.

Заметим, что $U_0 < U'$. Действительно, для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$:

— если $|Y_2|^i = \infty$ то из $U' \in U(Y_2, m)$ следует, что $(U')^i > m$, однако $U_0^i \leq m$;

— если $|Y_2|^i \neq \infty$, то $|Y_1|^i \neq \infty$, и так как $|Y_1| < |Y_2|$, то $U_0^i = |Y_1|^i \leq |Y_2|^i = (U')^i$.

Из соотношений $U_0 \rightarrow U'$ и $U_0 < U'$ следует, что существует вектор $V \in Z^{+n}$ такой, что $U' = U_0 + V$. Отсюда несложно вывести, что для каждого вектора $Z \in CP$ такого, что $U_0 \leq Z$, верно соотношение $Z \rightarrow Z + V$. Следовательно, для каждого $k \geq 1$ вектор $U_0 + kV$ принадлежит множеству CP , и $U_0 \rightarrow U_0 + kV$.

При достаточно больших значениях k :

— компоненты вектора $U_0 + kV$, соответствующие таким индексам i , для которых $V^i > 0$, могут быть сделаны сколь угодно большими;

— компоненты вектора $U_0 + kV$, соответствующие таким индексам i , для которых $V^i = 0$, при этом останутся такими же как у вектора U_0 .

Согласно определению новой метки $|Y_2|'$ узла Y_2 (см. соотношение (8)), отсюда следует, что после замены метки узла Y_2 с $|Y_2|$ на $|Y_2|'$ граф с новой меткой узла Y_2 будет обладать свойством, изложенным в формулировке леммы 3.

Аналогичным образом устанавливается, что после замены меток согласно п. 2 у всех узлов, достижимых из узла Y_2 , граф с новыми метками этих узлов будет обладать свойством, изложенным в формулировке леммы 3. ♦



Теорема 2. Для каждого $i \in \{1, \dots, n\}$ множество CP^i , состоящее из i -х координат векторов из множества CP , является неограниченным тогда и только тогда, когда существует узел $X \in CP_\infty$ такой, что его метка $|X|^i = \infty$.

Доказательство. Пусть узел X таков, что для некоторого индекса $i \in \{1, \dots, n\}$ верно соотношение $|X|^i = \infty$. Согласно лемме 3, множество $U(X)$ непустое. Выберем произвольный вектор $U_0 \in U(X)$. По лемме 3, существует вектор $U_1 \in U(X, U_0^i)$. По определению множеств вида $U(X, k)$, имеет место неравенство $U_1^i > U_0^i$. Далее, по лемме 3, существует вектор $U_2 \in U(X, U_1^i)$. По определению множеств вида $U(X, k)$, имеет место неравенство $U_2^i > U_1^i$. Продолжая этот процесс неограниченно, мы получим последовательность векторов $U_0, U_1, U_2, \dots$ такую, что все элементы последовательности $|U_0|^i, |U_1|^i, |U_2|^i, \dots$ различны, т. е. мы нашли бесконечное подмножество в множестве CP^i . Таким образом, множество CP^i бесконечно.

Если же индекс $i \in \{1, \dots, n\}$ таков, что для каждого узла X графа CP_∞ верно неравенство $|X|^i \neq \infty$, то из алгоритма построения графа CP_∞ непосредственно вытекает, что имеет место равенство множеств

$$\{U^i | U \in CP\} = \{X^i | X \in CP_\infty\}.$$

Поскольку граф CP_∞ конечен, то множество $\{X^i | X \in CP_\infty\}$ конечно, и, следовательно, множество $\{U^i | U \in CP\}$ тоже конечно, что и требовалось доказать. ♦

Следовательно, критерий можно сформулировать таким образом: если ни один вектор из множества $\{X | X \in CP_\infty\}$ не содержит символа ∞ , то число точек управления при любом варианте функционирования исходного графа будет ограничено, а если для некоторого индекса $i \in \{1, \dots, n\}$ в графе CP_∞ имеется узел X , такой, что $|X|^i = \infty$, то не исключен вариант функционирования исходного графа, когда число точек управления на ребре, соответствующем индексу i , будет неограниченно возрастать.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье приведен пример решения проблемы неограниченного возрастания числа точек управления в экземпляре бизнес-процесса. Однако при автоматизации предприятий на основе процессного подхода возникают и другие проблемы, например, связанные с бесконечными циклами на графе бизнес-процесса или рекурсивными вызовами подпроцессов. Авторы планируют исследовать эти проблемы в последующих работах.

Изложенный в настоящей статье алгоритм был применен на практике в программном обеспечении с открытым кодом [5], которое доступно на международном портале разработчиков свободного программного обеспечения по адресу <http://sourceforge.net/projects/runawfe>.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Калянов Г.Н.* Моделирование, анализ, реорганизация и автоматизация бизнес-процессов. — М.: Финансы и статистика, 2006. — 240 с.
2. *Елиферов В.Г., Репин В.В.* Бизнес-процессы: Регламентация и управление. — М.: Инфра-М, 2005. — 319 с.
3. *Koulopoulos T.* The Workflow Imperative. — N.-Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1995.
4. *Михеев А.Г., Орлов М.В., Пятецкий В.Е.* Комплексный подход к процессному управлению предприятием // Автоматизация в промышленности. — 2013. — № 1. — С. 65–68.
5. *Михеев А.Г., Орлов М.В.* Система управления бизнес-процессами и административными регламентами // Программные продукты и системы. — 2011. — № 3. — С. 126–130.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Миронов Андрей Михайлович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник, Институт проблем информатики РАН, г. Москва, ☎ (495) 841-87-11, ✉ amironov66@gmail.com,

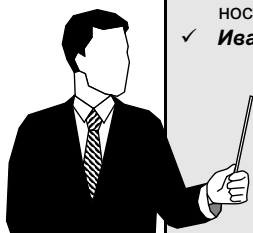
Михеев Андрей Геннадьевич — канд. физ.-мат. наук, доцент, Национальный технологический университет МИСиС, г. Москва, ✉ andrmikheev@gmail.com,

Пятецкий Валерий Ефимович — д-р техн. наук, зав. кафедрой, Национальный технологический университет МИСиС, г. Москва.

Содержание сборника «Управление большими системами», 2014, вып. 53

- ✓ **Беляева А.В.** Учет пространственных факторов в массовой оценке объектов недвижимости: сравнение эффективности различных методов. — С. 6.
- ✓ **Иванов Н.Н.** Аналитико-имитационное моделирование обобщенных стохастических сетевых графиков. — С. 27.
- ✓ **Соловьев А.И.** Декомпозиция задачи оптимального потребления на дискретном рынке. — С. 45.
- ✓ **Мишуров П.Н.** Повышение точности динамической оптимизации вагонопотоков на основе использования расчетных периодов переменной длительности. — С. 58.
- ✓ **Белов Р.В., Казанин Д.К., Огородников К.О.** Методы коррекции инерциальных оценок координат при управлении группой подвижных объектов. — С. 76.

Тексты статей доступны на сайте <http://ubs.mtas.ru/>



ИНДЕКС ЧЕЛОВЕЧЕСКОГО РАЗВИТИЯ И ГЕНДЕРНОЕ РАВЕНСТВО: ВЗАИМОУСЛОВЛЕННОСТЬ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

И.С. Богомолова, С.В. Гриненко, Е.К. Задорожная

Отмечено, что гендерная сегрегация различных типов — отраслевая, профессиональная, образовательная — устойчиво влияет на различие уровней развития человеческого капитала мужчин и женщин. Представлена оценка взаимообусловленности показателей индекса развития человеческого потенциала, индекса человеческого развития с учетом гендерных факторов и индекса гендерного неравенства в разных странах и в России с учетом отличительных российских особенностей.

Ключевые слова: гендерное равенство, гендерная сегрегация, индекс развития человеческого потенциала, индекс гендерного неравенства.

ВВЕДЕНИЕ

В стратегиях развития международных организаций проблема гендерного равенства как составляющая социально-экономического развития с недавних пор воспринимается как важное направление государственной политики. Выдвигается не только тезис о важности гендерного равенства с точки зрения социальной справедливости, но и тезис о гендерном равенстве как ресурсе социально-экономического развития, что предполагает институционализацию гендерного равенства как для формирования формальных институтов, обеспечивающих законодательную, нормативную базу достижения равенства, так и неформальных, способствующих формированию норм, правил и рамок поведения. Данный процесс происходит во многих государствах, декларируется международными организациями (ООН, Всемирный банк и пр.), всемирными форумами. В сентябре 2000 г. на Саммите тысячелетия ООН главами 147 стран, включая Россию, были приняты Цели тысячелетия ООН в области развития, среди которых поощрение равенства мужчин и женщин и расширение прав и возможностей женщин должно быть достигнуто к 2015 году [1, 2]. Отметим, что в России отсутствует какой-либо национальный механизм или институт обеспечения гендерного равенства, что негативно влияет на развитие общества, социально-экономи-

ческие показатели, снижает темпы экономического роста и ВВП, а также доходов населения. В исследовании [3] обосновано, что сокращение гендерного разрыва в уровне занятости может дать от 0,3 до 1,5 % ежегодного прироста ВВП и от 4 до 20 % дохода на душу населения.

Одним из показателей, характеризующих уровень развития страны, является индекс развития человеческого потенциала (ИРЧП — Human Development Index), рассчитываемый на основе измерения уровня жизни, грамотности, образованности и долголетия как основных характеристик человеческого потенциала исследуемой территории. Существуют методики расчета ИРЧП с учетом гендера — в них рассматривается показатель, учитывающий разницу в продолжительности жизни женщин и мужчин — индекс развития с учетом гендерного фактора (ИРГФ). В мировой практике употребляется термин Inequality-adjusted Human Development Index (скорректированный с учетом неравенства ИРЧП), учитывающий биологический фактор, но не показывающий фактическое различие, связанное также с уровнем образования, опыта и доходов. Существует также индекс гендерного неравенства (ИГН) — Gender Inequality Index, рассчитываемый в рамках Программы развития ООН [4] и учитывающий показатели материнской смертности, рождаемости детей у подростков, экономической активности женщин, уровень среднего и



высшего образования женщин. Но ни один из названных показателей не отражает неравенство в доходах (оплате труда) и профессиональную сегрегацию.

Изложенное обусловило задачу исследования — выявление степени влияния гендерного неравенства на воспроизводство и отдачу от накопленного человеческого капитала для качественной оценки фактического уровня ИРЧП, что позволит выработать адекватную современным социально-экономическим и общественным императивам систему управленческих воздействий в контексте достижения гендерного равенства как фактора экономического роста.

1. ПОКАЗАТЕЛИ ИРЧП, ИРГФ И ИГН — ВЗАИМОУСЛОВЕННОСТЬ ИЛИ НЕЗАВИСИМОСТЬ?

На микроуровне (уровне фирмы) человеческий капитал предложено разделять на общий (перемещаемый) и специфический (неперемещаемый) [5]. Первый из них включает в себя теоретические и другие универсальные знания, которые имеют широкую область применения и приобретаются в школах, вузах и других образовательных учреждениях. Второй [6—10] связан с конкретной фирмой: знание фирмы, ее организационной структуры и схемы управления, специфических технологий, особенностей рабочего места, клиентов фирмы.

Несмотря на то, что женщины увеличили свою экономическую активность и объем инвестиций в человеческий капитал, наблюдается существенная разница в зарплате между мужчинами и женщинами, что отмечается и в странах, которые усиленно

содействуют гендерному равенству — это говорит о том, что гендерная профессиональная сегрегация на рынке труда и сейчас остается достаточно высокой [11]. Большое количество исследований объясняют существующий разрыв в оплате труда между мужчинами и женщинами наличием гендерной сегрегации, которая проявляется в том, что сотрудники с равной квалификацией получают меньшую заработную плату [12—15].

Основываясь на теории человеческого капитала Беккера [5], можно сказать, что инвестиции в специфический человеческий капитал, в частности навыки, предполагают долгосрочную трудовую деятельность на одном рабочем месте, где происходит обучение этим навыкам и соответственно получение специфического человеческого капитала. Женщины прерывают свою трудовую деятельность чаще, чем мужчины, ввиду рождения и воспитания детей [16, 17]. Кроме того, некоторые профессии предполагают наличие развитого специфического капитала, поэтому женщины в этих профессиях менее конкурентоспособны, чем мужчины [17—20]. Таким образом, требования работодателей к квалификации сохраняют гендерную сегрегацию и объясняют связь между преобладанием женщин и мужчин в определенных профессиях, а также разрыв в заработной плате (табл. 1).

Принимая подход, базирующийся на определении существования гендерной сегрегации при отклики уровня занятости женщин/мужчин в отрасли от уровня занятости женщин в экономике в целом, отметим некоторые тенденции, принимаемая за базовый 1980-й год:

— в базовом году к «мужским» отраслям (концентрация мужчин от 70 %) относились строи-

Таблица 1

Отраслевая концентрация женщин в экономике России, 1980—2012 гг., %

Отрасль экономики	1980	1985	1990	1996	2000	2005	2010	2012
Сельское хозяйство	42	41	40	34	39	39	35	36
Промышленность	49	48	48	41	43	43	41	40
Строительство	29	28	27	24	22	19	16	15
Оптовая и розничная торговля	80	79	80	62	60	61	62	62
Гостиницы и рестораны	—	—	—	—	84	78	77	77
Транспорт и связь	25	25	25	26	29	31	28	27
Связь	71	71	71	62	—	—	—	—
Финансовая деятельность	87	89	90	74	65	64	67	67
Операции с недвижимым имуществом, аренда и предоставление услуг	—	—	—	—	45	44	42	42
Государственное управление и обеспечение военной безопасности; социальное страхование	69	71	67	50	33	38	40	41
Образование	79	78	78	82	79	80	81	81
Здравоохранение и предоставление социальных услуг	85	84	83	82	82	82	80	80
Предоставление прочих коммунальных, социальных, персональных и других услуг	54	54	52	46	52	67	69	70
Всего	52	52	52	47	48	49	49	49

тельство и транспорт, к «женским» (концентрация женщин выше 70 %) — торговля, связь, финансовая деятельность, государственное управление и страхование, к промежуточным отраслям — сельское хозяйство и обрабатывающие производства;

— следующие 10 лет (к 1990 г.) наблюдается рост мужского участия в сферах сельского хозяйства и государственного управления, причем это скорее «уход» женщин из названных отраслей в силу автоматизации ряда процессов. В обеих отраслях женщины занимали низкооплачиваемые должности и рабочие места;

— в следующем десятилетии наблюдается дальнейшее продвижение мужчин в эти отрасли, а также торговлю, связь, финансовую сферу;

— к 2012 г. сельское хозяйство — практически «мужская» отрасль (64 % мужчин), в строительстве женщины фактически полностью вытеснены из отрасли (85 % мужчин), в торговле и государственном управлении доля мужчин выросла в 2 раза, в финансовой деятельности — в 2,5 раза.

Исследователи, работающие в рамках гендерной теории, говорят о том, что профессиональные «предпочтения» женщин обусловлены не физиологическими различиями, а определенным укладом общественной жизни [21]. Связь с технологическими циклами и укладами в занятости женщин прослеживается при анализе общего количества занятых в экономике, но практически не наблюдается в отраслевом разрезе. Резкое повышение уровня участия женщин в экономике наблюдалось в 1930-х гг. и было связано с новшествами в бытовой сфере — множество бытовых приборов позволило женщине меньше времени тратить на домашнее хозяйство (в мировой практике). В России этот период характеризуется процессами индустриализации и идеологией, определяющей необходимость освободить женщину от бытовой занятости и привлечь ее в экономику. В 1932 г. в Советском Союзе занятость женщин в промышленности составляла 27 %, к 1950 г. выросла и достигла уровня 41 % и в 1960 г. (за 10 лет) изменилась на 18 пунктов — 59 % — максимально наблюдаемое значение [22, 23]. На этот период пришлось военные и послевоенные годы — женщины в силу объективных причин взяли на себя мужскую работу в годы войны и продолжили работать в априори мужских отраслях в период восстановления экономики, одновременно являющийся периодом восстановления демографического баланса, под которым понимаем устоявшееся соотношение мужчин и женщин в общей численности населения [24]. К 1969 г. уровень занятости женщин составил 50 %, и после этого его изменения происходили в пределах 3 пунктов, и к 2012 г. доля женщин в числе занятых составила 49 %. При этом отраслевые соотношения мужчин и женщин сохраняются, как и

разница в оплате труда и отдаче на накопленный человеческий капитал.

Аналитическая ценность ИРГФ для целей международных сравнений снижается в силу того, что на позицию России среди других стран по значению ИРЧП влияют разнонаправленные факторы: высокий уровень образования населения России, который повышает значения индекса, однако низкая продолжительность жизни и невысокие доходы населения снижают его. Значение ИРГФ искажает тот факт, что продолжительность жизни и уровень образования российских женщин существенно выше, а заработная плата ниже, чем у мужчин.

Значительная разница в заработной плате мужчин и женщин наблюдается во всех странах, входящих в Организацию экономического сотрудничества и развития, и характерна для России. Исследователями выдвигаются разные гипотезы, объясняющие существование разрыва в уровне заработной платы женщин и мужчин [11]. Одна из них заключается в том, что женщины, прерывая трудовую деятельность, испытывают недостаток в накоплении специфического человеческого капитала [16, 17, 25–27].

Оценки показателей ИРЧП, ИРГФ и ИГН представлены в табл. 2, составленной на основе данных сайта ПРООН [4]. Приведенные данные свидетельствуют о том, что, прежде всего, не существует определенной зависимости между показателями ИРЧП и ИРГФ — даже по представленным странам разница колеблется от 0,061 до 0,156, далее, наблюдается зависимость между этой разницей и показателем ИГН — более высокой разнице соответствует более высокое значение ИГН.

Несмотря на положительную динамику показателей, даже в странах с высоким уровнем развития человеческого потенциала гендерное неравенство достаточно высокое (табл. 3). Например, Норвегия, занимающая первое место по ИРЧП, пятая по показателю гендерного неравенства, а США, стоящие на третьем месте, по показателю ИГН — 42-е, Северная Корея, 12-я по ИРЧП и 29-я по ИГН, что подтверждает факт несоответствия развития человеческого потенциала в целом по населению страны и человеческого развития в соответствии с половым признаком.

Для более детального анализа рассмотрим ранговые соотношения показателей человеческого развития подробнее. Страны, представленные в табл. 3, группируются по нескольким сегментам: первый — страны, в которых наблюдается незначительная разница ИРЧП и ИРГФ — это Норвегия, Австрия, Нидерланды и Германия. Среди них есть страны, которые имеют также низкий показатель гендерного неравенства, и Австрия, для которой показатель ИГН на 15 пунктов ниже ИРЧП, что свидетельствует о равенстве женщин и мужчин



Таблица 2

Показатели ИРЧП, ИРГФ и ИГН по ряду стран

Страна	2000		2005		2010		2012		
	ИРЧП	ИГН	ИРЧП	ИГН	ИРЧП	ИГН	ИРЧП	ИРГФ	ИГН
Норвегия	0,922	0,105	0,948	0,083	0,952	0,076	0,955	0,894	0,065
США	0,907	—	0,923	0,288	0,934	0,288	0,937	0,821	0,256
Германия	0,870	0,131	0,901	0,106	0,916	0,085	0,920	0,856	0,075
Япония	0,878	0,136	0,896	0,149	0,909	0,121	0,912	—	0,131
Северная Корея	0,839	—	0,875	0,116	0,905	0,106	0,909	0,758	0,153
КНР	0,590	0,579	0,637	0,225	0,689	0,207	0,699	0,543	0,213
Испания	0,847	0,119	0,865	0,118	0,884	0,113	0,885	0,796	0,103
Великобритания	0,841	0,228	0,865	0,216	0,874	0,207	0,875	0,802	0,205
Греция	0,810	—	0,862	0,180	0,866	0,159	0,860	0,760	0,136
Россия	0,713	0,425	0,753	0,352	0,782	0,329	0,788	0,670*	0,312

* — Данные 2011 года.

по продолжительности жизни, числу лет обучения и доле ВВП на душу населения, при неравенстве показателей индекса неравенства — материнской смертности, рождаемости у подростков, экономической активности и представленности во властных структурах.

Далее следуют страны, в которых ранг ИРГФ ниже ранга ИРЧП — США, Канада, Северная Корея и Израиль, показатель ИГН в них довольно высокий, поэтому ранг значительно ниже, что свидетельствует о высоком гендерном неравенстве. И, наконец, страны, в которых ранг ИРГФ выше ранга ИРЧП, распределение которых по показателю ИГН произвольно.

Данные говорят о том, что для оценки гендерного неравенства в стране показатели ИРГФ и ИГН следует использовать как общую характеристику, требующую дополнительного детального анализа неучтенных факторов — уровня образования, должностного уровня, заработной платы.

2. РОССИЯ: ОЦЕНКА ГЕНДЕРНОГО РАВЕНСТВА

В мире индикаторами достижения гендерного равенства служат показатели соотношения мальчиков и девочек в школе; соотношение грамотных девушек и юношей в возрасте 15—24 лет; доля женщин, занятых в несельскохозяйственном секторе; доля женщин-парламентариев. Выбор показателей базировался на гипотезе более низких инвестиций в человеческий капитал для женщин, что, как следствие, определяет последующую профессиональную сегрегацию и неравенство в доходах. Россия в отличие от большинства стран в мире характеризуется практически противоположной ситуацией в социально-экономической сфере в контексте гендерного равенства.

Таблица 3

Ранговое распределение показателей ИРЧП, ИРГФ и ИГН по ряду стран

Страна	ИРЧП	ИРГФ	ИГН
Норвегия	1	1	5
Австралия	2	2	17
США	3	16	42
Нидерланды	4	4	1
Германия	5	5	6
Швеция	7	3	2
Ирландия	7	6	19
Швейцария	9	7	3
Канада	11	13	18
Северная Корея	12	29	27
Исландия	13	8	10
Дания	15	9	3
Израиль	16	22	25
Бельгия	17	15	12
Австрия	18	12	14
Франция	20	18	9
Словения	21	10	8
Финляндия	21	11	6
Испания	23	21	15
Италия	25	25	11
Люксембург	26	17	26
Великобритания	26	20	34
Чехия	28	14	20
Греция	29	28	23
Кипр	31	30	22
Мальта	32	24	39
Эстония	33	26	29
Венгрия	37	27	42
Польша	39	31	24
Литва	41	34	28
Португалия	43	33	16
Латвия	44	36	36

В 2003 г. исследователи выделили пять основных отличий [2]: высокий уровень женской занятости с молодых лет до пожилого возраста, совмещение полноценной трудовой деятельности с семейными обязанностями на всем протяжении жизненного цикла; поскольку Россия — индустриальная страна, то и основная доля женщин, как и мужчин, заняты в индустриальном и услуговом секторах, что требует более глубокого анализа гендерной сегрегации на рынке труда; в России обеспечен равный доступ к образованию мужчин и женщин на протяжении многих десятилетий, что обусловило ситуацию, когда уровень образования женщин превышает уровень образования мужчин; в Советском Союзе в течение долгих лет существовал подход, ориентированный на равенство прав мужчин и женщин, что определило с формальной правовой точки зрения отсутствие неравенства прав мужчин и женщин практически во всех сферах экономической, социальной и политической жизни, прямой дискриминации в правах; в то же время защита репродуктивных прав женщин привела к тому, что существуют многие нормы позитивной дискриминации, проявляющейся в закреплении различных социальных льгот (табл. 4). Россия в контексте социальной защиты женщин значительно отличается от других стран, что, с одной стороны, позволяет женщинам накапливать

довольно высокий человеческий капитал, а с другой — обуславливает наличие положительной дискриминации, не достигая целей достижения гендерного равенства.

Международной организацией труда в качестве ключевых инструментов обеспечения гендерного равенства в сфере труда был принят ряд конвенций: Конвенция о равном вознаграждении мужчин и женщин за труд равной ценности, 1951 г. (№ 100); Конвенция о дискриминации в области труда и занятий, 1958 г. (№ 111); Конвенция о работниках с семейными обязанностями, 1981 г. (№ 156); Конвенция об охране материнства, 2000 г. (№ 183) [28]. Приведенные в табл. 4 меры направлены на социальную защиту, а не на достижение гендерного равенства, причем они охватывают не женщин в целом, а отдельные категории, связанные с фертильным возрастом и функцией деторождения, что согласуется только с двумя из перечисленных конвенций.

Следует понимать, что наличие широкого круга социальных льгот для женщин с несовершеннолетними детьми стимулирует «позитивную дискриминацию», поскольку делает женский труд более затратным и менее выгодным для работодателей, служит базой для выхода женщин с рынка труда. Как следствие, человеческий капитал, который по уровню выше, чем у мужчин, используется

Таблица 4

Социальная защита женщин, Россия [29]

Категория женщин	Льгота
Работающие	Запрет на применение труда женщин на тяжелых работах и с вредными и опасными условиями труда
Беременные, имеющие детей в возрасте до 3 лет (для одиноких — до 5 лет)	Запрет на привлечение к сверхурочным работам, вызов в ночную смену и выходные дни, отправление в служебные командировки
Беременные	Перевод на легкую работу. Запрет на установление испытательного срока. Запрет на отказ заключать трудовой договор
Имеющие детей в возрасте до 3 лет	Привлечение к работам вахтовым методом. Неполный рабочий день или неполная рабочая неделя
Имеющие детей в возрасте до полутора лет	Дополнительные перерывы для кормления ребенка
Имеющие детей-инвалидов в возрасте до 18 лет	Четыре дополнительных оплачиваемых выходных дня в месяц
Одиноким матери, воспитывающие несовершеннолетних детей (два или более ребенка до 14 лет или один ребенок-инвалид в возрасте до 18 лет)	Дополнительный отпуск без сохранения заработной платы
Беременные, имеющие детей до 3 лет, одинокие, воспитывающие ребенка в возрасте до 14 лет или ребенка-инвалида до 18 лет	Запрет на увольнение

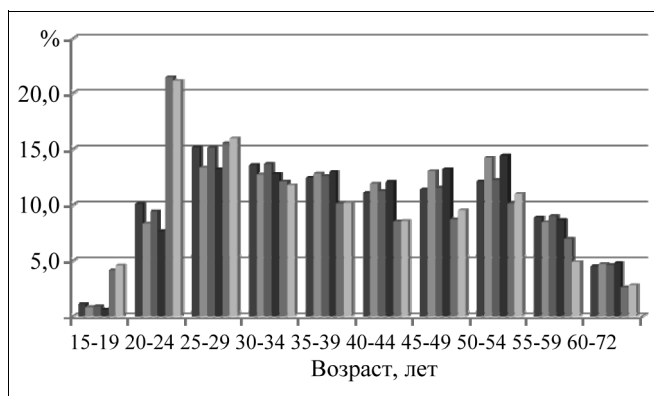


Рис. 1. Структура экономически активного населения, Россия, 2013 г.: ■ — экономически активные мужчины; ■ — экономически активные женщины; ■ — занятые мужчины; ■ — занятые женщины; ■ — безработные мужчины; ■ — безработные женщины

неэффективно и недостаточно, или совсем не используется, что обуславливает значительные потери для общества и экономики и приводит к его обесцениванию [30].

С учетом названных особенностей при сопоставлении рейтингов ИРЧП и ИРГФ Россия занимала в 1990-е гг. более высокие позиции по ИРГФ, чем по рейтингу ИРЧП, в 2003 г. позиции сравнялись — 56-е место, в 2011 г. по ИРЧП Россия занимала 46-е место, по ИРГФ — 39-ю позицию. В 2012 г. ИРГФ для России не рассчитан, но при показанной положительной динамике до 2011 г. уровень ИГН равен 0,312 — 51-е место и уровень ИРЧП снизился на 9 пунктов — 55-е место.

Оценим названные в отличительных характеристиках показатели в 2012—2013 гг. Соотношение женщин и мужчин в составе населения остается практически постоянным — с 2004 г. это 54 к 46 % соответственно. Структура экономически активного населения по возрасту (15—72 лет) представлена на рис. 1 — экономическая активность мужчин и экономическая активность женщин имеют равный уровень, занятость мужчин превышает занятость женщин в молодом возрасте, возможно, это связано с периодом деторождения и ухода за несовершеннолетними детьми, и ниже занятости женщин в возрасте 44—54 года. Безработица женщин соответственно выше в возрастных группах 25—34 лет и ниже после 55 лет, что обусловлено более высокой продолжительностью жизни женщин. Ситуация в 2012 г. идентичная.

Оценка уровня образования занятых и безработных мужчин и женщин, представленная на рис. 2, подтверждает сохранившиеся тенденции 2003 года — уровень образования женщин выше для высшего и среднего специального образования, и ниже — для начального.

Экономическая активность женщин, имеющих детей, представлена на рис. 3 — экономическая активность и занятость снижаются практически в два раза при увеличении числа детей, показатели безработицы и экономической неактивности проявляют ту же тенденцию.

Заслуживает внимания оценка динамики количества экономически неактивного населения, в частности женщин. За последние годы (2004—2012 гг.) значительно выросло количество экономически неактивных женщин в возрасте 25—29 лет — рост составил 8 %, в группе 30—34 года — 3 %,

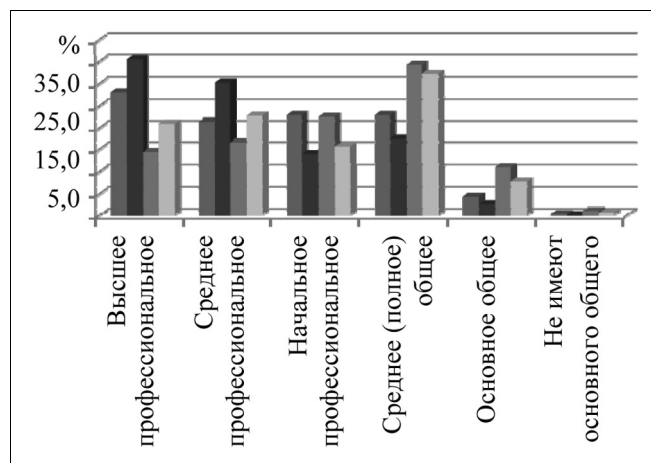


Рис. 2. Структура занятых и безработных по полу и возрасту, Россия, 2013 г.: ■ — занятые мужчины; ■ — занятые женщины; ■ — безработные мужчины; ■ — безработные женщины

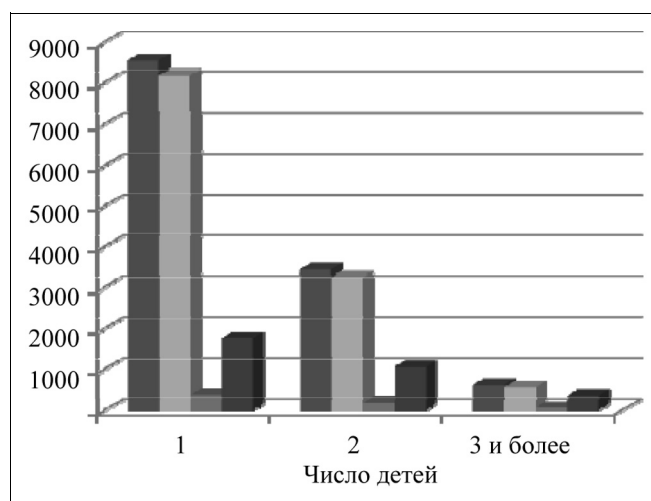


Рис. 3. Экономическая активность женщин, имеющих детей, Россия, 2013 г.: ■ — экономически активное население в том числе: ■ — занятые; ■ — безработные; ■ — экономически неактивное население

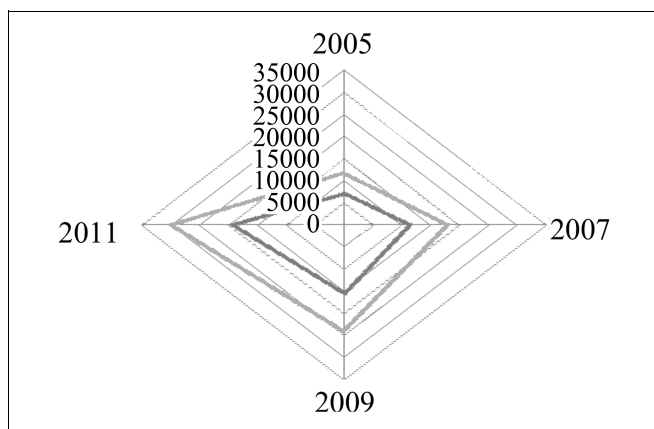


Рис. 4. Зарботная плата мужчин и женщин, руб., Россия, 2005–2011 гг. — — мужчины, — — женщины

35—39 лет — 4 % и в группе 40—44 года — 5 %. Эти данные свидетельствуют о том, что женщины наиболее активного возраста не выходят на рынок труда, имея достаточно высокий уровень общего человеческого капитала — инвестиции в образование не приносят отдачи. При этом необеспеченность детей местами в детских дошкольных учреждениях по данным за 2012 г. составляет 5 % (в городах 9 %), а доля женщин в числе экономически неактивного населения — 62 %.

Анализируя заработную плату мужчин и женщин в разрезе видов экономической деятельности,

следует подтвердить различие в оплате труда от 11 до 36 % в различных отраслях (табл. 5, рис. 4). Максимальная доля валовой добавленной стоимости — 18,2 % — приходится на сферу оптовой и розничной торговли, ремонта автотранспортных средств, мотоциклов, бытовых изделий и предметов личного пользования, в которой заняты 23,7 % работающих женщин, при этом получая заработную плату на 32 % ниже. Вторая по величине валовой добавленной стоимости сфера обрабатывающего производства — 17,3 %, в которой заняты 12,0 % женщин с той же разницей в заработной плате. Отрасли с минимальной разницей в оплате труда — образование и здравоохранение — «женские» отрасли с заработной платой ниже среднеотраслевого уровня. Эти данные также свидетельствуют о наличии профессиональной сегрегации как горизонтальной, так и вертикальной, что не может служить мотивацией для повышения уровня человеческого капитала, роста производительности труда у женщин. Кроме того, следует отметить «уход» мужчин из отраслей образования и здравоохранения — если в 1930 г. занятые в образовании женщины составляли 53 %, в здравоохранении — 64 %, то в 2012 г. это 81 и 80 % соответственно.

Согласно рис. 4, российские женщины во всех сферах экономической деятельности получают заработную плату меньше, чем мужчины, в среднем на 35 %. Если посмотреть структуру занятых в экономике, то наибольший удельный вес занятых

Таблица 5

Занятые в экономике мужчины и женщины, их средняя начисленная заработная плата по видам экономической деятельности, 2012 г.

Виды экономической деятельности	Доля занятых, %		Средняя начисленная заработная плата, руб.		Отношение заработной платы женщин к заработной плате мужчин, %	Отраслевая структура валовой добавленной стоимости РФ, %
	Жен.	Муж.	Жен.	Муж.		
Добыча полезных ископаемых	0,9	3,4	33 375	44 723	75	11,2
Обрабатывающие производства	12,0	17,4	19 551	27 878	70	17,3
Производство и распределение электроэнергии, газа и воды	1,8	4,5	23 432	28 260	83	3,8
Строительство	2,3	12,6	26 804	31 243	86	7,1
Оптовая и розничная торговля, ремонт автотранспортных средств, мотоциклов, бытовых изделий и предметов личного пользования	23,7	13,3	22 458	33 274	68	18,2
Транспорт и связь	5,1	13,7	25 003	34 703	72	10,4
Операции с недвижимым имуществом, аренда и предоставление услуг	8,8	9,2	29 005	37 016	78	11,9
Образование	15,3	3,3	15 062	16 932	89	3,1
Здравоохранение и предоставление социальных услуг	12,8	3,1	16 113	19 339	83	4,0
Другие виды экономической деятельности	17,3	19,5	—	—	—	13,0
Всего	100	100	19 219	30 005	64	100



женщин наблюдается в сфере оптовой и розничной торговли, ремонта автотранспортных средств, мотоциклов, бытовых изделий и предметов личного пользования, а также в сферах образования и здравоохранения. Соотношение заработной платы женщин к заработной плате мужчин не зависит от количества женщин и мужчин в профессии. Таким образом, на разрыв в заработной плате влияют другие факторы.

Однако все исследования, посвященные проблеме специального стажа, приходят к однозначному выводу, что в российских условиях накопление специфического человеческого капитала обеспечивает лишь минимальный выигрыш в заработках или не обеспечивает его вообще [15, 26]. Если более длительный специальный стаж у мужчин, т. е. накопленный специфический человеческий капитал, оказывает, пусть небольшое, положительное влияние на заработную плату, то у женщин не наблюдается даже этого [27].

Поскольку женщины в среднем получают меньше, чем мужчины (даже с учетом гендерной асимметрии занятости и различий в накопленном человеческом капитале), то с увеличением доли женщин в некоторой профессиональной группе снижается, при прочих равных условиях, уровень оплаты труда, что характеризует девальвацию «женских профессий». Такой эффект является частью эффекта структуры, однако в «женских» профессиях может наблюдаться низкий уровень оплаты труда и вследствие других причин, что подтверждается эмпирическими данными.

В России женщины получают более высокий уровень образования, чем мужчины, что подтверждается данными Всемирного банка. Это свидетельствует о более интенсивном накоплении общего человеческого капитала женщинами. Российских женщин, получающих высшее образование больше, чем мужчин примерно на 36 %, эта тенденция сохраняется на всем исследуемом периоде. В мире разница не такая большая и в рассматриваемый период составляет максимум 8 %.

Количество российских женщин, получающих среднее образование, сопоставимо с количеством мужчин, его получающих, и за анализируемый период колеблется в пределах 3 %. В мире женщин, обучающихся по программам среднего образования, меньше, чем мужчин: самая большая разница наблюдается в 2004 г. и составляет 6 %, в дальнейшем эта разница сокращается почти до 3 %. Среди женщин темпы образовательного апгрейдинга были намного выше, чем среди мужчин. Так, в 1989 г. среди всего населения женщины еще отставали от мужчин по доле лиц с высшим образованием (почти на 1 процентный пункт — п.п.), хотя среди за-

нятых по этому показателю они их уже превосходили (на 1,6 п.п.). К 2002 г. женщины превратились в безусловных «лидеров» по охвату высшим образованием как среди всего, так и среди занятого населения. Это свидетельствует о резко выраженной гендерной асимметрии в пользу женщин [31–33].

Использование альтернативных показателей накопленных запасов человеческого капитала — охвата населения образованием разного уровня — подтверждает, что по формальным признакам Россия действительно относится к числу самых высокообразованных стран в мире. Так, по данным переписи населения 2002 г., среди россиян в возрасте 25–64 лет 69 % имели образование не ниже верхнего уровня средней школы — лучший показатель среди всех стран, охватываемых регулярной статистикой Организации экономического сотрудничества и развития [4], (для сравнения в Бразилии аналогичный показатель составлял лишь 30 %). В стране со сравнительно невысоким уровнем ВВП, как Россия, свыше половины населения — 57 % — имели третичное образование. Это было на 13 п.п. больше, чем у следовавшей за ней Канады, и в несколько раз выше, чем у других постсоциалистических стран, где данный показатель не превысил 15 %.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты исследований позволяют говорить, что на низкие доходы женщин, по сравнению с мужчинами, не влияют плотность женщин в профессии, уровень развития специфического человеческого капитала, уровень образования. И даже в «женских» профессиях женщины получают меньше, чем мужчины. В этой связи возникает вывод, что на структуру гендерных отношений в России одновременно действуют и прежние (патриархальные) нормы, и вновь возникающие социальные связи и стратегии. Результатом этого процесса на макросоциальном уровне является гендерная асимметрия. Одной из основных причин этого явления служит сосуществование в одном социальном пространстве и, соответственно, в одном сознании, гендерных стереотипов различной природы, противоречащих друг другу. Составляя значительную часть трудовых ресурсов с высоким уровнем образования, многогранным профессиональным опытом, обладая организаторскими навыками по ведению домашнего хозяйства, социальной ответственностью за благополучие семьи, женщины могут внести существенный вклад в развитие экономики, образования и культуры российского общества.

При разработке гендерной политики в России следует учитывать сложившиеся отличительные от мирового сообщества условия, такие как превалирование скрытой гендерной дискриминации, равенство инвестиций в человеческий капитал, более высокий уровень человеческого капитала женщин при более низком уровне дохода — уровне отдачи от экономической деятельности, гендерные диспропорции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рошин С.Ю., Зубаревич Н.В. Гендерное равенство и расширение прав и возможностей женщин в России в контексте целей развития тысячелетия. — URL: http://www.undp.ru/Gender_MDG_rus.pdf (дата обращения 03.04.2014).
2. Айвазова С.Г. Реализация третьей цели Декларации тысячелетия: «Поощрение гендерного равенства и расширение прав и возможностей женщин». — URL: http://www.undp.ru/Gender_MDG_rus.pdf (дата обращения 03.04.2014).
3. *Women Hold Up Half the Sky*, Goldman Sacks // *Global Economics Paper*. — 2008. — N 164.
4. *United Nations Development Programme*. — URL: <https://data.undp.org/dataset/Table-4-Gender-Inequality-Index/pq34-nwq7> (дата обращения 07.04.2014).
5. Becker G.S. Human Capital: A Theoretical and Empirical Analysis, with Special Reference to Education. — Chicago: University of Chicago Press, 1964/1993.
6. Becker G.S. Investment in Human Capital: A Theoretical Analysis // *The Journal of Political Economy*. — 1962. — Vol. 70. — P. 9—49.
7. Blair M. Firm-Specific Human Capital and the Theories of the Firm // *Employees and Corporate Governance*. — 2000. — P. 58—90.
8. Kessler Anke S., Lülfesmann Christoph The Theory of Human Capital Revisited: on the Interaction of General and Specific Investments // *The Economic Journal*. — October 2006. — Vol. 116, iss. 514. — P. 903—923.
9. Капелюшников Р.И., Лукьянова А.Л. Трансформация человеческого капитала в российском обществе (на базе «Российского мониторинга экономического положения и здоровья населения»). — М.: Фонд «Либеральная миссия», 2010. — 196 с.
10. Мальцева И.О. Трудовая мобильность и стабильность: насколько высока отдача от специфического человеческого капитала в России? / Препринт WP15/2007/01. — М.: ГУ ВШЭ, 2007. — 48 с.
11. Gronlund A., Magnusson C. Devaluation, crowding or skill specificity? Exploring the mechanisms behind the lower wages in female professions // *Social Science Research*. — 2013. — N 42. — P. 1006—1017.
12. Cohen P., Huffman M. Individuals, jobs, and labor markets: the devaluation of women's work // *American Sociological Review*. — 2003. — Vol. 68. — P. 443—463.
13. England P., Allison P., Wu X. Does bad pay cause occupations to feminize, does feminization reduce pay, and how can we tell with longitudinal data? // *Social Science Research*. — 2007. — Vol. 36. — P. 1237—1256.
14. Hansen J., Wahlberg R. Occupational gender composition and wages in Sweden // *Research in Labor Economics*. — 2008. — Vol. 28. — P. 353—369.
15. Sorensen E. The crowding hypothesis and comparable worth // *The Journal of Human Resources*. — 1990. — Vol. 25. — P. 55—89.
16. Polachek S.W. Occupational self-selection: a human capital approach to sex differences in occupational structure // *Review of Economics and Statistics*. — 1981. — Vol. 73. — P. 60—69.
17. Polachek S.W. How the Human Capital Model Explains Why the Gender Wage Gap Narrowed // *IZA Discussion Paper*. — 2004. — N 1102.
18. Barron J.M., Black D.A., Loewenstein M.A. Gender differences in training, capital and wages // *Journal of Human Resources*. — 1993. — Vol. 2. — P. 343—364.
19. Estevez-Abe M., Gender bias in skills and social policies: the varieties of capitalism perspectives on sex segregation // *Social Politics*. — 2005. — Vol. 12. — P. 180—215.
20. Estevez-Abe M. Gendering the varieties of capitalism. A study of occupational segregation by sex in advanced industrial countries // *World Politics*. — 2006. — Vol. 59. — P. 142—175.
21. Мальцева И.О., Рошин С.Ю. Гендерная сегрегация и трудовая мобильность. — М.: Изд. дом ГУ ВШЭ, 2007.
22. *Российская Федерация в 1992 году (Статистический ежегодник)*. — М.: Республиканский информационно-издательский центр, 1993.
23. *Труд в СССР (Статистический справочник)*. — М.-Л.: Гос. соц.-эконом. изд-во, 1932.
24. *Численность, состав и движение населения СССР. Статистические материалы*. — М.: Статистика, 1965.
25. Macpherson D., Hirsch B. Wages and gender composition: why do women's job pay less? // *Journal of Labor Economics*. — 1995. — Vol. 13. — P. 426—471.
26. Polavieja J. The effect of occupational sex-composition on earnings: job-specialization, sex-role attitudes and the division of domestic labor in Spain. *European // Sociological Review*. — 2008. — Vol. 24. — P. 199—213.
27. Tam T. Sex segregation and occupational gender inequality in the United States: devaluation or specialized training? // *American Journal of Sociology*. — 1997. — Vol. 6. — P. 1652—1692.
28. *Азбука прав трудящихся женщин и гендерного равенства*. — Международное бюро труда, 2008.
29. *Трудовой Кодекс Российской Федерации*. — М.: Проспект; КноРус, 2014. — 240 с.
30. *Права женщин и институты гендерного равенства в регионах России* / Отв. ред. Н.М. Римашевская, О.А. Воронина, Е.А. Баллаева. — М.: МАКС Пресс, 2010. — С. 361—376.
31. *Education at a Glance*. — Paris: OECD, 2005.
32. Lehmann H., Wadsworth J. Tenures That Shook the World: Worker Turnout in Russia, Poland and Britain // *IZA Discussion Paper*. — 1999. — N 65.
33. *Российский работник: образование, профессия, квалификация: монография* / Под ред. В.Е. Гимпельсона и Р.И. Капелюшников. — М.: НИУ ВШЭ, 2011. — 574 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Р.М. Нижегородцевым.

Богомолова Инна Сергеевна — канд. экон. наук, доцент,
✉ inna_bogomolova@mail.ru,

Гриненко Светлана Викторовна — д-р экон. наук, зав. кафедрой,
✉ Sveta.grinenko@gmail.com,

Задорожная Елена Константиновна — канд. экон. наук, доцент,
✉ alena_kn82@rambler.ru,

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону,
☎ (863) 437-17-42, (863) 464-53-43.



КВАНТИЛЬНОЕ ХЕДЖИРОВАНИЕ ОПЦИОНОВ ЕВРОПЕЙСКОГО ТИПА НА НЕПОЛНЫХ РЫНКАХ БЕЗ ТРЕНИЯ. Ч. 2. Минимаксное хеджирование

О.В. Зверев, В.М. Хаметов

Рассмотрено решение задачи расчета европейского опциона с квантильным критерием на многомерном неполном рынке без трения с дискретным временем. Предложен и обоснован минимаксный подход к квантильному хеджированию европейского опциона на многомерном неполном рынке. Доказано существование самофинансирующего портфеля, капитал которого обеспечивает исполнение платежного обязательства относительно наихудшей меры с заданным уровнем значимости.

Ключевые слова: европейский опцион, квантильное хеджирование, минимаксный портфель, неполный рынок, S -представление.

ВВЕДЕНИЕ

В первой части [1] настоящей работы были установлены условия существования решения задачи расчета европейского опциона с квантильным критерием уровня $1 - \alpha$ относительно любой меры из класса эквивалентных мер $\mathcal{R}_N$. В работе [2] установлено существование наихудшей меры (см. теорему 5 в работе [2]), относительно которой $(1, S^{(1)}, \dots, S^{(d)})$ -рынок без трения является полным, при этом сама мера является мартингальной и дискретной (см. теоремы 11, 13 в той же работе). Опираясь на этот результат, мы обосновываем процедуру квантильного хеджирования европейского опциона относительно наихудшей меры уровня $1 - \alpha$, которая в статье названа минимаксной квантильной уровня $1 - \alpha$. Отметим, что в доступной нам научной литературе указанная задача не рассматривалась.

1. МИНИМАКСНОЕ ХЕДЖИРОВАНИЕ ЕВРОПЕЙСКОГО ОПЦИОНА НА МНОГОМЕРНОМ РЫНКЕ

Изложим некоторые результаты, полученные в работе [2] и касающиеся существования наихудшей меры и ее свойств — мартингальности и дискретности, а также существования минимаксного

хеджирующего портфеля. Эти результаты понадобятся нам для обоснования существования минимаксного квантильного хеджирования уровня $1 - \alpha$ на $(1, S^{(1)}, \dots, S^{(d)})$ -рынке без трения, описание которого было дано нами в первой части [1] статьи.

1.1. Напомним ряд обозначений [1]. Пусть $F_t \triangleq \sigma\{S_n, n \leq t\}$ - σ -алгебра, где $\{S_n, F_n\}_{n \geq 0}$ — d -мерная последовательность цен рискованных активов, а

$$I_0^{Q, \gamma_1^N}(S_0) \triangleq E^Q \left[\exp \left\{ f_N(S_\cdot) - \sum_{i=1}^N (\gamma_i, \Delta S_i) \right\} \middle| F_0^S \right] -$$

оценка бистратегии (Q, γ_1^N) . Обозначим

$$V_t^* \triangleq \operatorname{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N} \operatorname{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{R}_N} I_t^{Q, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t) -$$

верхнее гарантированное значение оценки бистратегии (Q, γ_1^N) по наблюдениям за ценами рискованных активов до момента времени $t \in N_0$, где $\mathcal{R}_N$ — множество эквивалентных вероятностных мер, m_N — множество мартингальных вероятностных мер, D_t^N — множество допустимых t -стратегий.

Определение 1. Бистратегию (Q^*, γ_1^{*N}) такую, что справедливо равенство

$$V_0^* = I_0^{Q^*, \gamma_1^{*N}}(S_0), \quad (1)$$

будем называть минимаксной, вероятностную меру Q^* — наихудшей, а стратегию $\gamma_1^{*N} \in D_1^N$ — минимаксной. ♦

Для удобства изложения приведем без доказательства две теоремы [2, см. теоремы 3 и 5].

Теорема 1. Пусть фильтрация $\{F_t^S\}_{t \in N_0}$ — универсально полна, $f_N(S.)$ — F_N^S -измеримая ограниченная случайная величина, $|\mathcal{R}_N \cap m_N| > 1$, а множество $\mathcal{R}_N$ относительно слабо компактно. Тогда для любого $t \in N_1$ существуют $\gamma_t^* \in D_t$ и вероятностная мера Q^* , являющаяся наихудшей, такие, что справедливы равенства

$$\begin{aligned} V_{t-1}^* &= \operatorname{ess\,inf}_{\gamma_t \in D_t} \operatorname{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{R}_N} E^Q[V_t^* e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} | F_{t-1}^S] = \\ &= \left(\operatorname{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{R}_N} E^Q[V_t^* e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} | F_{t-1}^S] \right) \Big|_{\gamma_t = \gamma_t^*} = \\ &= E^{Q^*}[V_t^* e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | F_{t-1}^S]. \end{aligned}$$

Определение 2. Пару (Q^*, π^*) такую, что выполняется равенство (1), где $\pi^* \in SF$, назовем минимаксным решением задачи расчета европейского опциона с платежным обязательством $f_N(S.)$, а портфель π^* — минимаксным.

Определение 3 [4]. Назовем $(1, S^{(1)}, \dots, S^{(d)})$ -рынок наихудшим полным, если относительно наихудшей вероятностной меры Q^* и портфеля $\pi^* \in SF$ для любого F_N^S -измеримого ограниченного платежного обязательства $f_N(S.)$ и капитала $X_N^{\pi^*}$ портфеля $\pi^* \in SF$ в момент времени N имеет место равенство $Q^*(X_N^{\pi^*} = f_N(S.)) = 1$, при этом портфель π^* называют минимаксным хеджирующим. ♦

Нам понадобятся утверждения теорем 11–15 из работы [2] в форме, удобной для изложения наших результатов.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда $(1, S^{(1)}, \dots, S^{(d)})$ -рынок является наихудшим полным. Кроме того, справедливы утверждения:

- 1) мера $Q^* \notin \mathcal{R}_N$,
- 2) мера Q^* — единственная дискретная мартигальная мера, носитель которой сосредоточен не более чем в $(d+1)^{N+1}$ точках;
- 3) существует минимаксный хеджирующий портфель π^* , а именно

а) для любого $t \in N_1$ существует предсказуемая d -мерная последовательность $\{\gamma_t^*\}_{t \in N_1}$, элементы которой удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &\operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} \operatorname{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{R}_N} E^Q[V_t^* e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} | F_{t-1}^S] = \\ &= \left(\operatorname{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{R}_N} E^Q[V_t^* e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} | F_{t-1}^S] \right) \Big|_{\gamma_t = \gamma_t^*} = \\ &= E^{Q^*}[V_t^* e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | F_{t-1}^S]; \end{aligned} \quad (2)$$

б) для любого $t \in N_1$ существует предсказуемая последовательность $\{\beta_t^*\}_{t \in N_0}$, элементы которой удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} \Delta \beta_t^* + (S_{t-1}, \Delta \gamma_t^*) = 0, \\ \beta_t^*|_{t=0} = \beta_0^*, \end{cases} \quad (3)$$

причем $\beta_t^*|_{t=0} = \beta_0^* = \ln V_0^*$, а $\gamma_0^* = 0$;

в) для любого $t \in N_0$ капитал портфеля $\pi^* X_t^{\pi^*} = \beta_t^* + (S_t, \gamma_t^*)$, причем

$$Q^*(X_t^{\pi^*} = \ln V_t^*) = 1;$$

4) относительно меры Q^* платежное обязательство $f_N(S.)$ допускает представление

$$Q^*\left(f_N(S.) = E^{Q^*}[f_N(S.)|F_0] + \sum_{i=1}^N (\gamma_i^*, \Delta S_i)\right) = 1.$$

1.2. Пусть $A_N(\omega)$ — любое F_N -измеримое множество. Рассмотрим задачу расчета европейского опциона на $(1, S^{(1)}, \dots, S^{(d)})$ -рынке с платежным обязательством вида $1_{A_N}(\omega)$. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда, в силу ограниченности платежного обязательства вида $1_{A_N}(\omega)$, выполнены все утверждения теоремы 2.

Как и в первой [1] части статьи, во избежание повторов в изложении материала, когда используется платежное обязательство вида $1_{A_N}(\omega)$, сделаем переобозначения в утверждениях теоремы 2: вместо символа «*» (звездочка вверх) будем использовать символ «λ» (вверх). Таким образом, для любого $t \in N_0$:

1) верхнее гарантированное значение оценки бистратегии $(Q, \gamma_1^N) V_t^\lambda \triangleq \operatorname{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N} \operatorname{ess\,sup}_{Q \in \mathcal{R}_N} I_t^{Q, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (2) с граничным условием $V_t^\lambda|_{t=N} = \exp\{1_{A_N}(\omega)\}$;



2) существует самофинансирующий портфель $\pi^\lambda = \{\beta_t^\lambda, \gamma_t^\lambda\}_{t \in N_1}$, где $\{\gamma_t^\lambda\}_{t \in N_1}$ — допустимая предсказуемая последовательность, определяемая равенством

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in D_{t+1}} \operatorname{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} E^Q \left[V_{t+1}^\lambda e^{-(\gamma, \Delta S_{t+1})} | F_t \right] = \\ = \operatorname{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} E^Q \left[V_{t+1}^\lambda e^{-(\gamma_{t+1}^\lambda, \Delta S_{t+1})} | F_t \right], \end{aligned} \quad (4)$$

$\{\beta_t^\lambda\}_{t \in N_1}$ — предсказуемая последовательность, удовлетворяющая рекуррентному соотношению

$$\Delta \beta_t^\lambda + (S_{t-1}, \Delta \gamma_t^\lambda) = 0, \quad (5)$$

причем $\beta_t^\lambda|_{t=0} = \ln V_0^\lambda$, а $\gamma_0^\lambda = 0$,

3) для любого $\omega \in \operatorname{supp} Q^*$

$$1_{A_N}(\omega) = Q^*(A_N) + \sum_{i=1}^N (\gamma_i^\lambda, \Delta S_i)(\omega),$$

причем

$$\Delta \ln V_t^\lambda(\omega) = (\gamma_t^\lambda, \Delta S_t)(\omega), \quad \ln V_t^\lambda|_{t=N}(\omega) = 1_{A_N}(\omega).$$

Замечание 1. Из теоремы 12 работы [2] следует, что относительно наихудшей меры потребление равно нулю, т. е.

$$Q^*(C_t^* = 0) = 1.$$

2. МИНИМАКСНОЕ КВАНТИЛЬНОЕ ХЕДЖИРОВАНИЕ ЕВРОПЕЙСКОГО ОПЦИОНА НА МНОГОМЕРНОМ РЫНКЕ БЕЗ ТРЕНИЯ

Дадим определение минимаксного решения задачи расчета европейского опциона с квантильным критерием на многомерном рынке без трения и установим условия существования такого решения.

Определение 4. Минимаксным решением задачи расчета европейского опциона с квантильным критерием уровня $1 - \alpha$ на многомерном рынке назовем триплет $(X_0^{\pi^\alpha}, \pi^\alpha, Q^*)$, где портфель $\pi^\alpha \in SF$ и наихудшая мера Q^* такие, что для капитала $X_N^{\pi^\alpha}$ портфеля π^α , справедливо неравенство

$$Q^*(X_N^{\pi^\alpha} \geq f_N(S)) \geq 1 - \alpha,$$

где $\alpha \in (0, 1)$. Портфель π^α назовем минимаксным квантильным уровня $1 - \alpha$. ♦

Пусть $c \triangleq \ln V_0^*$, где $\{V_t^*\}_{t \in N_0}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (2). Доказано, что $c > 0$ [2]. Обозначим $S_t^{(j)}$ — j -я компонента d -мерного вектора S_t , $t \in N_0$.

Приводимое далее утверждение устанавливает условия существования минимаксного решения задачи расчета европейского опциона с квантильным критерием уровня $1 - \alpha$ на многомерном $(1, S^{(1)}, \dots, S^{(d)})$ -рынке без трения.

Из теоремы 2 в работе [1] и теоремы 2 (см. п. 1.1) следует

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2.

Пусть для каждого $\alpha \in (0, 1)$ найдутся $\lambda_t^{(j)}(\alpha) \in R^+$, $j = \overline{1, d}$, $t \in N_0$, такие, что $Q^*\left(\bigcap_{t=1}^N \bigcap_{j=1}^d \{S_t^{(j)} \geq \lambda_t^{(j)}(\alpha)\}\right) \geq 1 - \alpha$. Тогда существует решение задачи расчета европейского опциона с квантильным критерием уровня $1 - \alpha$, т. е. существуют:

1) самофинансирующий портфель $\pi^\alpha = \{\beta_t^\alpha, \gamma_t^\alpha\}_{t \in N_0}$ такой, что:

а) $\{\gamma_t^\alpha\}_{t \in N_0}$ — предсказуемая последовательность, элементы которой определяются равенством $\gamma_t^\alpha = \gamma_t^* - c\gamma_t^\lambda$, причем $\gamma_t^* \in D_1^N$ определяются из соотношения (2), а $\gamma_t^\lambda \in D_1^N$ — из равенства (4);

б) $\{\beta_t^\alpha\}_{t \in N_0}$ — предсказуемая последовательность, элементы которой определяются равенством $\beta_t^\alpha = \beta_t^* - c\beta_t^\lambda$, причем β_t^* и β_t^λ определяются соотношениями (3) и (5) соответственно;

2) для любого $t \in N_0$ капитал $X_t^{\pi^\alpha}$ портфеля π^α удовлетворяет равенству

$$Q^*(X_t^{\pi^\alpha} = \beta_t^\alpha + (S_t, \gamma_t^\alpha)) = 1;$$

3) начальный капитал $X_0^{\pi^\alpha}$ портфеля π^α удовлетворяет неравенству

$$X_0^{\pi^\alpha} \geq c(1 - \alpha); \quad (6)$$

4) портфель π^α — минимаксный квантильный уровня $1 - \alpha$, т. е.

$$Q^*(X_N^{\pi^\alpha} \geq f_N(S)) \geq 1 - \alpha. \quad \blacklozenge$$

Доказательство теоремы 3 почти дословно повторяет доказательство теоремы 2 из работы [1]. Относительно наихудшей меры Q^* потребление тривиально, т. е. для любого $t \in N_0$ $C_t^* = C_t^\lambda = 0$.

Замечания 2. 1. Теорема 3 дает методику построения решения задачи расчета европейского опциона с квантильным критерием уровня $1 - \alpha$ на полных рынках без трения.

2. Доказано [2], что если мера $Q^* \notin \mathfrak{R}_N$ — дискретная и сосредоточена не более чем в $(d+1)^{N+1}$ точке, то она эквивалентна любой дискретной ме-

ре, имеющей тот же носитель. Поэтому существование $\lambda_t^{(j)}(\alpha) \in R^+$ таких, что выполнено неравенство $Q^*\left(\bigcap_{t=1}^N \bigcap_{j=1}^d \{S_t^{(j)} \geq \lambda_t^{(j)}(\alpha)\}\right) \geq 1 - \alpha$ следует из леммы Неймана — Пирсона.

3. ПРИМЕР РАСЧЕТА МИНИМАКСНОГО КВАНТИЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ УРОВНЯ $1 - \alpha$ НА ОДНОМЕРНОМ РЫНКЕ БЕЗ ТРЕНИЯ

3.1. Постановка задачи. Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, F, (F_t)_{t \in N_0}, P)$ задана одномерная согласованная случайная последовательность $(S_p, F_t)_{t \in N_0}$, описывающая эволюцию цен рискованного актива, которая удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S_t = S_{t-1}(1 + \rho_t), \quad S_t|_{t=0} = S_0 > 0,$$

где $(\rho_t)_{t \in N_0}$ — последовательность случайных величин, причем экономический смысл ρ_t — доходность рискованного актива в момент времени $t \in N_1$. Без ограничения общности можно считать, что для любого $t \in N_0$ σ -алгебра $F_t = \sigma(S_0, \rho_1, \dots, \rho_t)$. Обозначим через $\mathfrak{R}_N$ множество вероятностных мер таких, что:

— $(\rho_t, F_t)_{t \in N_0}$ — последовательность случайных величин, элементы которой независимы в совокупности и одинаково распределены;

— для любого $t \in N_1$ носитель любой меры $Q \in \mathfrak{R}_N$, обозначаемый $\text{supp } Q$, равен $[a, b]$, причем $-1 < a < 0 < b < \infty$.

Из этих условий следует, что:

— для любого $t \in N_0$ случайная величина $S_t > 0$ Q -п. н.;

— последовательность $(S_p, F_t)_{t \in N_0}$ относительно любой меры $Q \in \mathfrak{R}_N$ является однородной марковской.

3.2. Приведем минимаксное решение задачи расчета европейского опциона на исходном неполном относительно любой меры $Q \in \mathfrak{R}_N$ $(1, S)$ -рынке. Пусть $g: R^+ \rightarrow R^1$ — ограниченная борелевская функция, обозначаемая $g(x)$. Положим, что платежное обязательство имеет вид $g(S_N) = g(x)|_{x=S_N}$.

Заметим, что из результатов работы [3, см. п. 6.3, 6.4], следует:

1) существует единственная наихудшая дискретная мартингальная мера Q^* , носитель которой

сосредоточен в точках a и b , т. е. $\text{supp } Q^* = \{a, b\}$, причем

$$Q^*(\rho_t = a) = 1 - q^* = \frac{b}{|a| + b},$$

$$Q^*(\rho_t = b) = q^* = \frac{|a|}{|a| + b}; \quad (7)$$

2) относительно меры Q^* случайная последовательность $(S_p, F_t^S)_{t \in N_0}$ — марковская;

3) V_t^* — марковская случайная функция, следовательно, существует функция $V_t^*: N_0 \times R^+ \rightarrow R^+$, обозначаемая $V_t^*(x)$, такая, что для любого $t \in N_0$ $V_t^* = V_t^*(x)|_{x=S_t} = V_t^*(S_t)$;

4) $D_t = R^1$;

5) функция $V_t^*(S_t)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} V_t^*(S_t) = \inf_{\gamma \in R^1} E^{Q^*} [V_{t+1}^*(S_{t+1}) e^{-\gamma S_t \rho_{t+1}} | F_t^S], \\ V_t^*(S_t)|_{t=N} = \exp\{g(S_N)\}, \end{cases} \quad (8)$$

из которого следует, что рассматриваемый $(1, S)$ -рынок относительно меры Q^* является полным.

Перепишем с учетом выражения (7) соотношение (8):

$$\begin{cases} V_t^*(S_t) = \inf_{\gamma \in R^1} [(1 - q^*) V_{t+1}^*(S_t(1 + a)) e^{\gamma S_t |a|} + \\ + q^* V_{t+1}^*(S_t(1 + b)) e^{-\gamma S_t b}], \\ V_t^*(S_t)|_{t=N} = \exp\{g(S_N)\}. \end{cases} \quad (9)$$

Очевидно, что выражение, стоящее под знаком инфимума, является ограниченной снизу и выпуклой функцией, значение которой стремится к плюс бесконечности, когда $\gamma \rightarrow \pm\infty$. Поэтому существует $\gamma_{t+1}^* \in D_{t+1}$ такое, что

$$\begin{aligned} & \inf_{\gamma \in R^1} [(1 - q^*) V_{t+1}^*(S_t(1 + a)) e^{\gamma S_t |a|} + \\ & + q^* V_{t+1}^*(S_t(1 + b)) e^{-\gamma S_t b}] = \\ & = (1 - q^*) V_{t+1}^*(S_t(1 + a)) e^{\gamma_{t+1}^* S_t |a|} + \\ & + q^* V_{t+1}^*(S_t(1 + b)) e^{\gamma_{t+1}^* S_t b}. \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда следует, что

$$\gamma_{t+1}^* = \frac{1}{S_t(b + |a|)} \ln \frac{V_{t+1}^*(S_t(1 + b))}{V_{t+1}^*(S_t(1 + a))}. \quad (11)$$



Тогда, опуская простые, но громоздкие промежуточные выкладки,

$$V_t^*(S_t) = (V_{t+1}^*(S_t(1+a)))^{1-q^*} (V_{t+1}^*(S_t(1+b)))^{q^*},$$

откуда

$$\ln V_t^*(S_t) = (1-q^*)\ln(V_{t+1}^*(S_t(1+a))) + q^*\ln(V_{t+1}^*(S_t(1+b))). \quad (12)$$

Так же, как и в работе [3] легко показать, что решение рекуррентного соотношения (12) имеет вид:

$$\ln V_t^*(S_t) = \Phi_{N-t}^*(S_t) = \sum_{i=0}^{N-t} g(S_t(1+a)^{N-t-i} \times (1+b)^i) C_{N-t}^i (1+q^*)^{N-t-i} (q^*)^i. \quad (13)$$

Из выражений (11) и (13) следует, что

$$\gamma_{t+1}^* = \frac{\Phi_{N-t-1}^*(S_t(1+b)) - \Phi_{N-t-1}^*(S_t(1+a))}{S_t(b+|a|)}. \quad (14)$$

Из теоремы 2 следует, что в момент времени $t \in N_0$ капитал портфеля π^* в силу равенства (13)

$$X_t^{\pi^*} = \ln V_t^*(S_t) = \Phi_{N-t}^*(S_t). \quad (15)$$

Из условия самофинансируемости, выражений (13) и (14) следует, что количество безрискового актива в момент времени $t \in N_0$

$$\beta_{t+1}^* = \Phi_{N-t-1}^*(S_t) - \frac{\Phi_{N-t-1}^*(S_t(1+b)) - \Phi_{N-t-1}^*(S_t(1+a))}{b+|a|}. \quad (16)$$

Очевидно, что $X_N^{\pi^*} = \ln V_N^*(S_N) = g(S_N)$.

3.3. Решим задачу расчета европейского опциона на наихудшем полном $(1, S)$ -рынке с платежным обязательством $1_{\Gamma_N}(S_N)$, где Γ_N — любое борелевское множество.

Сделав выкладки, аналогичные приведенным в п. 3.2, легко установить, что для любого $t \in N_0$:

1) $V_t^\lambda = V_t^\lambda(S_t)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению:

$$\begin{cases} V_t^\lambda(S_t) = \inf_{\gamma \in R^1} \left[(1-q^*)V_{t+1}^\lambda(S_t(1+a))e^{\gamma S_t|a|} + \right. \\ \left. + q^*V_{t+1}^\lambda(S_t(1+b))e^{-\gamma S_t b} \right], \\ V_t^\lambda(S_t)|_{t=N} = \exp\{1_{\Gamma_N}(S_N)\}; \end{cases} \quad (17)$$

3) $\ln V_t^\lambda(S_t)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\ln V_t^\lambda(S_t) = (1-q^*)\ln(V_{t+1}^\lambda(S_t(1+a))) + q^*\ln(V_{t+1}^\lambda(S_t(1+b))); \quad (18)$$

4) количество безрискового актива β_t^λ определяется из условия самофинансируемости

$$\Delta\beta_t^\lambda + (S_{t-1}, \Delta\gamma_t^\lambda), \quad \beta_0^\lambda = \ln V_0^\lambda;$$

5) капитал портфеля $\pi^\lambda = \{\beta_t^\lambda, \gamma_t^\lambda\}_{t \in N_0}$

$$X_t^{\pi^\lambda} = \ln V_t^\lambda(S_t), \quad (19)$$

причем $X_N^{\pi^\lambda} = \ln V_N^\lambda(S_N) = 1_{\Gamma_N}(S_N)$.

3.4. Построим минимаксное решение задачи расчета европейского опциона платежным обязательством $1_{\{S_N \leq \lambda\}}(\omega)$. Без ограничения общности можно считать, что $0 < S_0 < \infty$. Пусть отображение $\bar{\psi}(x): [0, N] \rightarrow R^+$, обозначаемое $\bar{\psi}(x)$, имеет вид

$$\bar{\psi}(x) \triangleq S_0(1+b)^x(1+a)^{N-x}.$$

Очевидно, что существует обратная функция $\bar{\psi}^{-1}: R^+ \rightarrow [0, N]$ к $\bar{\psi}(x)$, т. е. $\bar{\psi}^{-1}(\bar{\psi}(x)) = x$. Обозначим $\Delta_N = \sum_{t=1}^N 1_{\{\rho_t = b\}}$. Очевидно, что $\bar{\psi}(x)|_{x=\Delta_N} = S_N$. Следовательно,

$$Q^*\{\bar{\psi}(\Delta_N) = S_N\} = Q^*\{\bar{\psi}^{-1}(S_N) = \Delta_N\} = 1.$$

Пусть $x = \bar{\psi}^{-1}(\lambda)$, $\lambda \in R^+$. Тогда

$$\begin{aligned} Q^*\{S_N \leq \lambda\} &= Q^*\{\bar{\psi}(\Delta_N) \leq \lambda\} = \\ &= Q^*\{\Delta_N \leq \bar{\psi}^{-1}(\lambda)\} = Q^*\{\Delta_N \leq x\}. \end{aligned}$$

Очевидно, что случайная величина Δ_N относительно меры Q^* , имеет биномиальное распределение с параметрами q^* (определяемым выражением (7)) и N . Следовательно, в силу непрерывности справа функции распределения $F_{\Delta_N}^*(x) = Q^*(\Delta_N \leq x)$, существует квантиль уровня α , обозначаемая $x^*(\alpha)$, такая, что

$$Q^*\{\Delta_N(\omega) > x^*(\alpha)\} \geq 1 - \alpha.$$

Поэтому найдется $\lambda^*(\alpha) \in R^+$ такое, что

$$\begin{aligned} Q^*\{\Delta_N > x^*(\alpha)\} &= Q^*\{\Delta_N > \bar{\psi}^{-1}(\lambda^*(\alpha))\} = \\ &= Q^*\{\bar{\psi}(\Delta_N) > \lambda^*(\alpha)\} = Q^*\{S_N > \lambda^*(\alpha)\} = \\ &= 1 - Q^*\{S_N \leq \lambda^*(\alpha)\} = 1 - F_{\Delta_N}^*(\lambda^*(\alpha)). \end{aligned}$$

Теперь, капитал $X_t^{\pi^{\lambda}}$ портфеля π^{λ} и стратегия γ_{t+1}^{λ} , для любого $t \in N_0$, имеют вид:

1) в силу (18), (19) капитал $X_t^{\pi^{\lambda^*(\alpha)}}$ портфеля $\pi^{\lambda^*(\alpha)}$ равен

$$\begin{aligned} X_t^{\pi^{\lambda^*(\alpha)}} &= \ln V_t^{\lambda^*(\alpha)}(S_t) = \Phi_{N-t}^{\lambda^*(\alpha)}(S_t) = \\ &= \sum_{i=0}^{N-t} 1_{\left\{S_t < \frac{\lambda^*(\alpha)}{(1+a)^{N-t-i}(1+b)^i}\right\}} \times \\ &\times C_{N-t}^i (1-q^*)^{N-t-i} (q^*)^i; \end{aligned} \quad (20)$$

2) в силу (17) количество рискового актива $\gamma_{t+1}^{\lambda^*(\alpha)}$ равно

$$\gamma_{t+1}^{\lambda^*(\alpha)} = \frac{\Phi_{N-t-1}^{\lambda^*(\alpha)}(S_t(1+b)) - \Phi_{N-t-1}^{\lambda^*(\alpha)}(S_t(1+a))}{S_t(b+|a|)}; \quad (21)$$

3) в силу самофинансируемости количество безрискового актива $\beta_{t+1}^{\lambda^*(\alpha)}$ равно:

$$\begin{aligned} \beta_{t+1}^{\lambda^*(\alpha)} &= \Phi_{N-t-1}^{\lambda^*(\alpha)}(S_t) - \\ &- \frac{\Phi_{N-t-1}^{\lambda^*(\alpha)}(S_t(1+b)) - \Phi_{N-t-1}^{\lambda^*(\alpha)}(S_t(1+a))}{b+|a|}. \end{aligned} \quad (22)$$

3.5. Опираясь на результаты пп. 3.1—3.4, построим минимаксный квантильный портфель уровня $1 - \alpha$ в задаче расчета европейского опциона с платежным обязательством $g(S_N)$.

Из теоремы 3 следует, что для любого $t \in N_0$:

— существует портфель $\pi^\alpha = \{\beta_t^\alpha, \gamma_t^\alpha\}_{t \in N_0}$:

$$\beta_t^\alpha = \beta_t^* - c\beta_t^{\lambda^*(\alpha)}; \quad (23)$$

— капитал портфеля π^α

$$X_t^{\pi^\alpha} = X_t^{\pi^*} - cX_t^{\pi^{\lambda^*(\alpha)}} = \ln V_t^* - c\ln V_t^{\lambda^*(\alpha)}; \quad (24)$$

— портфель π^α является минимаксным квантильным уровня $1 - \alpha$.

Из выражений (13)—(16) и (20)—(24) следует, что для любого $t \in N_0$:

— капитал портфеля π^α

$$\begin{aligned} X_t^{\pi^\alpha} &= \Phi_{N-t}^\alpha(S_t) = \Phi_{N-t}^*(S_t) - c\Phi_{N-t}^{\lambda^*(\alpha)}(S_t) = \\ &= \sum_{i=0}^{N-t} \left(g(S_t(1+a)^{N-t-i}(1+b)^i) - \right. \\ &\left. - c1_{\left\{S_t < \frac{\lambda^*(\alpha)}{(1+a)^{N-t-i}(1+b)^i}\right\}} \right) C_{N-t}^i (1-q^*)^{N-t-i} (q^*)^i, \end{aligned}$$

$$\text{где } c = X_0^* = \ln V_0^*(S_0) = \Phi_N^*(S_0) = \sum_{i=0}^N g(S_0(1+a)^{N-i} \times$$

$$\times (1+b)^i) C_N^i (1-q^*)^{N-i} (q^*)^i,$$

— количество рискового актива

$$\gamma_{t+1}^\alpha = \frac{\Phi_{N-t-1}^\alpha(S_t(1+b)) - \Phi_{N-t-1}^\alpha(S_t(1+a))}{S_t(b+|a|)},$$

— количество безрискового актива

$$\begin{aligned} \beta_{t+1}^\alpha &= \Phi_{N-t-1}^\alpha(S_t) - \\ &- \frac{\Phi_{N-t-1}^\alpha(S_t(1+b)) - \Phi_{N-t-1}^\alpha(S_t(1+a))}{b+|a|}. \end{aligned}$$

Таким образом, мы построили решение задачи расчета европейского опциона с квантильным критерием уровня $1 - \alpha$ относительно наихудшей меры на $(1, S)$ -рынке.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем полученные результаты.

- Построена оценка верхней границы спреда европейского опциона с квантильным критерием.
- Доказано, что стоимость минимаксного квантильного портфеля уровня $1 - \alpha$ меньше стоимости минимаксного хеджирующего портфеля с тем же платежным обязательством на величину $c\alpha$, где c — стоимость минимаксного хеджирующего портфеля.
- Получено явное решение задачи расчета порогового опциона.
- Рассчитан европейский опцион с квантильным критерием, когда носитель меры компактный.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зверев О.В., Хаметов В.М. Квантильное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках. Ч. 1. Суперхеджирование // Проблемы управления. — 2014. — № 6. — С. 31 — 44.
2. Зверев О.В., Хаметов В.М. Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках (дискретное время) // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2011. — Т. 18, вып. 1. — С. 26—54.
3. Зверев О.В., Хаметов В.М. Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках (дискретное время) // Там же. — Вып. 2. — С. 193—204.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.С. Манделем.

Зверев Олег Владимирович — инженер,
☎ (49643) 9-21-78, ✉ zv-oleg@yandex.ru,

Хаметов Владимир Минирович — д-р физ.-мат. наук, профессор,
☎ (495) 467-28-03, ✉ khametovvm@mail.ru,

Национальный исследовательский университет —
Высшая школа экономики, г. Москва.

ПОПРАВКА

В Ч. 1 [1] настоящей статьи в формуле (4) символы «sup» и «inf» следует поменять местами. То же самое и в правой части предыдущей формулы.



МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, АЛГОРИТМЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ ДЛЯ МОНИТОРИНГА ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ВУЗА

Н.В. Яндыбаева, В.А. Кушников

Разработаны математические модели для проведения мониторинга эффективности образовательной деятельности высшего учебного заведения. Предложен эвристический численный алгоритм решения системы дифференциальных уравнений, основанный на нейронных сетях и методе Рунге — Кутты четвертого порядка. Разработан программный модуль для автоматизации расчета показателей эффективности.

Ключевые слова: высшая школа, мониторинг, образовательная деятельность, показатель, эффективность, математическая модель, программный модуль.

ВВЕДЕНИЕ

Динамичные изменения в современном мире, рост конкуренции в мировой экономике, межнациональные конфликты, ограниченность всех видов ресурсов требуют перехода к стратегическим приоритетам в управлении развитием государства. Одним из документов, в которых предложена концепция повышения качества жизни граждан России, является Указ Президента РФ от 12 мая 2009 г. № 537 «О Стратегии национальной безопасности Российской Федерации до 2020 года».

Методология комплексных исследований безопасности и перехода России к устойчивому развитию с помощью математических моделей и новых информационных технологий рассмотрена в работах [1, 2] и др. Однако предлагаемые учеными логико-математические модели и подходы к обеспечению устойчивого развития носят слишком общий и обтекаемый характер. Целевые показатели, характеризующие уровни, при которых обеспечивается безопасное развитие России в экономическом, социальном, экологическом, оборонном и других аспектах, должны быть углублены и откорректированы в соответствии с требованиями современности.

Одним из показателей национальной безопасности служит уровень обеспеченности ресурсами образования и науки (в процентах от ВВП). Для подготовки высококлассных специалистов, востре-

бованных на рынке труда, необходимо реформирование системы оценки качества образовательной деятельности высших учебных заведений [3]. Один из способов решения проблемы оценки качества высшего образования заключается в определении эффективности деятельности вуза посредством мониторинга. В ходе мониторинга реализуется комплекс мероприятий, направленных на формирование аналитических материалов о деятельности вузов и их филиалов на основе показателей эффективности деятельности образовательных организаций высшего образования. Принятие решения об отнесении образовательной организации к группе вузов, имеющих признаки неэффективности, принимается в том случае, когда образовательная организация или ее филиал достигает порогового значения для любых четырех из семи показателей.

По результатам мониторинга вузовской сети в 2014 г. межведомственная комиссия под председательством главы Минобрнауки признала неэффективными и нуждающимися в реорганизации около 1010 вузов и филиалов. На заседании межведомственной комиссии, состоявшемся в апреле 2013 г., были определены критерии, по которым оценивается деятельность высшего учебного заведения [4].

В этой связи возникает необходимость разработки математических моделей, алгоритмов и комплексов программ, позволяющих в рамках информационной системы вуза осуществить имитацион-

Таблица 1

Показатели оценки эффективности деятельности филиалов вузов

X_i^{Φ}	Содержание базового показателя	Пороговое значение
X_1	Образовательная деятельность. Средний балл студентов, принятых по результатам ЕГЭ на обучение по очной форме по программам подготовки бакалавров и специалистов за счет средств бюджетной системы РФ и с оплатой стоимости затрат на обучение физическими и юридическими лицами, баллы	50
X_2	Научно-исследовательская деятельность. Объем НИОКР в расчете на одного научно-педагогического работника (НПР), тыс. руб.	1,7
X_3	Финансово-экономическая деятельность. Доходы вуза из всех источников в расчете на одного НПР, тыс. руб.	700
X_4	Инфраструктура. Общая площадь учебно-научных помещений в расчете на одного студента (приведенного контингента), имеющихся у вуза на праве собственности и закрепленных за вузом на праве оперативного управления, кв. м	5
X_5	Приведенный контингент студентов, ед.	220
X_6	Доля кандидатов и докторов наук в численности работников профессорско-преподавательского состава (ППС), %	60
X_7	Доля штатных работников в общей численности ППС, %	64

ное моделирование и прогнозирование основных показателей эффективности деятельности вуза [5].

В протоколе заседания межведомственной комиссии приведены пороговые значения показателей эффективности для вузов Москвы, Санкт-Петербурга и вузов, расположенных в регионах, а также для филиалов вузов. Поскольку далее в статье будет рассматриваться модельный пример для филиала вуза, то в табл. 1 приведены базовые показатели X_i^{Φ} оценки эффективности деятельности филиалов вузов.

1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

В разработанный комплекс математических моделей для имитационного моделирования основных показателей эффективности деятельности вуза входят модель системной динамики и регрессион-

ная модель, характеризующие изменение показателей эффективности. Регрессионная модель служит для проверки адекватности модели системной динамики на стадии адаптации разработанного математического обеспечения к описанию образовательной деятельности конкретного вуза.

Общая характеристика модели системной динамики. Основные элементы базовой модели: моделируемые переменные; потоки, перемещающие содержимое одного состояния к другому; процедуры решений, регулирующие темпы потока между состояниями; каналы информации, соединяющие процедуры решений с состояниями [6]. Моделируемые переменные представляют собой накопления (аккумуляцию) в цепях обратной связи. Для них записывают дифференциальные уравнения вида

$$\frac{dX}{dt} = X^+ - X^-,$$

где X^+ и X^- — соответственно положительный и отрицательный темпы роста скорости переменной X , учитывающие все факторы, вызывающие рост переменной X .

Фазовое пространство переменных

$$X_i^{\min} \leq X_i \leq X_i^{\max}, \quad i = \overline{1, n},$$

где $X_i^{\min}$, $X_i^{\max} > 0$ — минимальные и максимальные значения, которые могут принимать показатели, $i = 1, \dots, n$ — число показателей. Темпы представляют собой произведения функций, зависящих от комбинаций основных переменных:

$$X^+ = g^+(X_1, X_2, \dots, X_n) = f^+(F_1, F_2, \dots, F_k) = f_1^+(F_1)f_2^+(F_2)\dots f_k^+(F_k),$$

$$X^- = g^-(X_1, X_2, \dots, X_n) = f^-(F_1, F_2, \dots, F_k) = f_1^-(F_1)f_2^-(F_2)\dots f_k^-(F_k),$$

где $F_j = g_j(X_{i_1}, \dots, X_{i_m})$ — факторы, $m = m(j) < n$, $k = k(j) < n$ (число моделируемых переменных). Граничные условия: $0 \leq X_1, X_2, \dots, X_n \leq 1$.

Далее рассматриваются показатели, нормированные относительно пороговых значений.

Ограничения и допущения, принятые при разработке модели. При формировании модели причинно-следственных связей между показателями эффективности большую сложность вызывает определение релевантных связей, учитываемых в дальнейшем при синтезе математической модели для определения эффективности образовательной деятельности вуза. В укрупненной модели (рис. 1) прямоугольниками обозначены моделируемые переменные $X_1, \dots, X_7$, стрелками показаны причинно-следственные связи между переменными, круж-

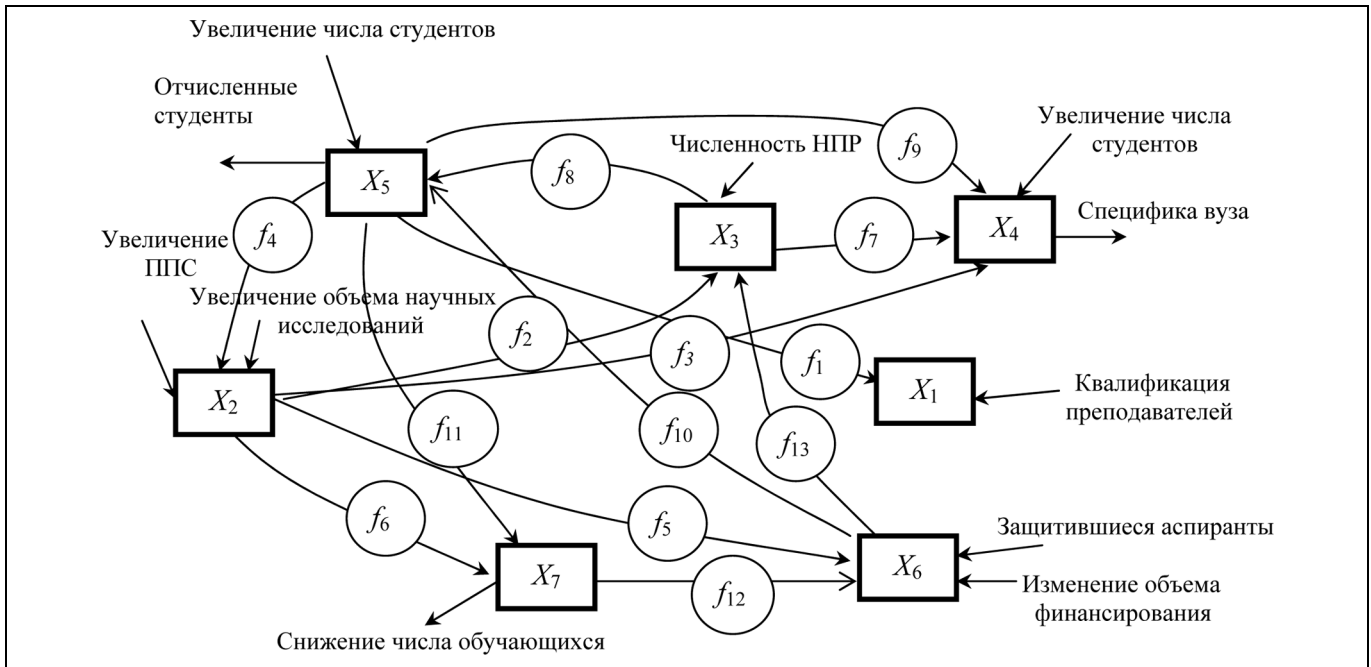


Рис. 1. Укрупненная модель причинно-следственных связей

ками обозначены функциональные зависимости $f_1, \dots, f_{13}$, определяющие степень влияния одной моделируемой переменной на другую.

В соответствии с принципом всеобщей взаимосвязи объектов, явлений и процессов окружающего мира, между моделируемыми переменными существует огромное число различных взаимосвязей, полностью которые учесть невозможно. Поэтому в данном исследовании эти связи были выбраны путем изучения мнений экспертов, подтвержденных экспериментально при мониторинге в Балаковском филиале Саратовской государственной юридической академии (СФГЮА). В результате были учтены только указанные в табл. 2 связи между показателями $X_1, \dots, X_7$. Символ «1» означает наличие связи между соответствующими показателями, «0» — ее отсутствие.

Содержательное описание математической модели. Проанализируем моделируемую переменную X_2 . Запишем для нее уравнение

$$\frac{dX_2(t)}{dt} = X_2(t) \left(\frac{F \cdot PN f_4(X_5) f_5(X_6) f_6(X_7) - G \cdot PK}{PS} \right),$$

где $X_2(t)$ — текущий объем НИОКР в расчете на одного НПП, (руб.), F и G — объем НИОКР в расчете на одного НПП на начало и конец расчетного периода (руб.); PN и PK — численность НПП на начало и конец расчетного периода; PS — среднегодовая численность НПП.

Значения F и G определяются по формулам

$$F = f_2^{T+}(X_3) f_3^{T+}(X_4) f_4^{T+}(X_5) f_6^{T+}(X_7) f_{12}^{T+}(X_6),$$

$$G = f_2^{T-}(X_3) f_3^{T-}(X_4) f_4^{T-}(X_5) f_6^{T-}(X_7) f_{12}^{T-}(X_6).$$

Подграф моделируемой переменной X_2 приведен на рис. 2.

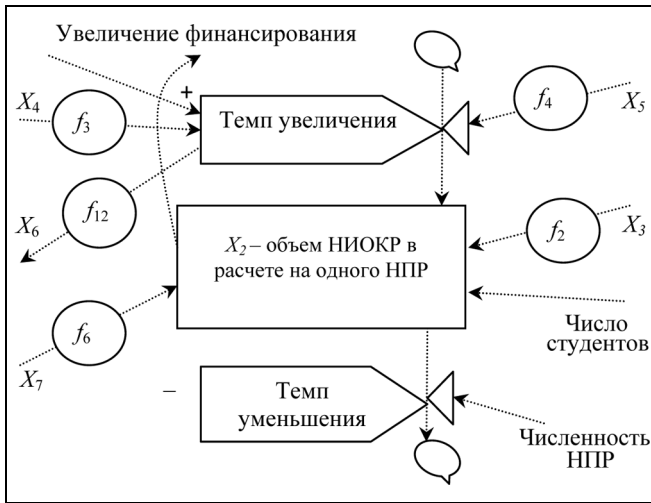
Уравнение для переменной X_3 имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dX_3(t)}{dt} = \\ = X_3(t) \left(\frac{((SK + M + V)PN f_2(X_2) f_8(X_5) f_{13}(X_6) -}{PS} \rightarrow \right. \\ \left. \rightarrow \frac{-(SK + M + V)f_7(X_4)}{PS} \right), \end{aligned}$$

Таблица 2

Причинно-следственные связи между показателями

X_i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
X_1	1	0	0	0	1	0	0
X_2	0	1	1	1	1	1	1
X_3	0	1	1	1	1	0	1
X_4	0	1	1	1	1	0	1
X_5	1	1	1	1	1	1	1
X_6	0	1	0	0	1	1	1
X_7	0	1	1	1	1	1	1


Рис. 2. Подграф моделируемой переменной X_2

где $X_3(t)$ — текущий объем доходов вуза из всех источников в расчете на одного НПП (руб.), SK — средства частных компаний, фирм (руб.), M — средства Минобрнауки (руб.), V — текущий объем финансирования за расчетный период (руб.).

Аналогично записываются уравнения и темпы для остальных моделируемых переменных [7]. Разработанная математическая модель имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{dX_1(t)}{dt} &= X_1(t) \frac{EN - EK}{ES}, \\ \frac{dX_2(t)}{dt} &= X_2(t) \frac{F \cdot PNf_4(X_5)f_5(X_6)f_6(X_7) - G \cdot PK}{PS}, \\ \frac{dX_3(t)}{dt} &= \\ &= X_3(t) \frac{(SK + M + V)PNf_2(X_2)f_8(X_5)f_{13}(X_6) -}{PS} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{-(SK + M + V)f_7(X_4)}{PS}, \\ \frac{dX_4(t)}{dt} &= X_4(t) \frac{SNf_3(X_2)f_7(X_3)f_9(X_5) - SK}{SO}, \\ \frac{dX_5(t)}{dt} &= \frac{Bf_1(X_1)f_{10}(X_6) - D}{X_5(t)}, \\ \frac{dX_6(t)}{dt} &= X_6(t)(KKf_{12}(X_7) - KN), \\ \frac{dX_7(t)}{dt} &= \frac{SHN - SHK}{X_7(t)}. \end{aligned} \quad (1)$$

В модели приняты обозначения: $X_1(t)$ — текущее значение среднего балла ЕГЭ; EN и EK — средний балл на начало и конец расчетного периода;

ES — среднегодовое значение среднего балла ЕГЭ; $X_4(t)$ — текущее значение общей площади учебно-научных помещений в расчете на одного студента; SN и SK — значение общей площади учебно-научных помещений в расчете на одного студента на начало и конец расчетного периода; SO — среднегодовое значение общей площади учебно-научных помещений в расчете на одного студента; $X_5(t)$ — текущая численность студентов; B — среднегодовое количество зачисленных студентов (чел.); D — среднегодовое количество отчисленных студентов; $X_6(t)$ — текущее значение доли кандидатов и докторов наук в численности ППС; $KN = (BK + KP)/KS$ и $KK = (EK + KP)/KS$ — численность ППС с учеными степенями и званиями на начало и конец расчетного периода соответственно; BK и EK — число кандидатов наук на начало и конец расчетного периода; KP — число докторов наук, профессоров; KS — общая численность ППС; $X_7(t)$ — среднегодовая доля штатных работников ППС в общей численности ППС; $SHN = STN/KS$ и $SHK = STK/KS$; доля ППС, работающего на штатной основе на начало и конец расчетного периода; STN и STK — численность штатных преподавателей на начало и конец расчетного периода (чел.); KS — общая численность НПП (чел.).

Функциональные зависимости f_i , $i = 1, 2, \dots, 13$, определяются экспериментально на стадии адаптации разработанного математического обеспечения к конкретному объекту моделирования. Как показывает практика, эти зависимости могут быть достаточно точно аппроксимированы полиномами невысокой степени:

$$\begin{aligned} f_1(X_1) &= -0,71X_1^3(t) + 1,6X_1^2(t) - 1,1X_1(t) + 0,72, \\ f_2(X_3) &= -1,2X_3^3(t) + 2,6X_3^2(t) - 1,3X_3(t) + 0,86, \\ f_3(X_2) &= 2,3X_2^3(t) - 1,6X_2^2(t) + 0,36X_2(t) + 0,36, \\ f_4(X_5) &= 2,5X_5^3(t) - 3,2X_5^2(t) + 1,9X_5(t) + 0,01, \\ f_5(X_6) &= 2,4X_6^3(t) - 5,8X_6^2(t) + 5,4X_6(t) - 1,2, \\ f_6(X_2) &= 1,3X_2^3(t) - 3,2X_2^2(t) + 3,3X_2(t) - 0,41, \\ f_7(X_4) &= 0,42X_4^3(t) - 0,8X_4^2(t) + 0,52X_4(t) + 0,39, \\ f_8(X_3) &= 8,6X_3^2(t) - 9,6X_3(t) + 3,2, \\ f_9(X_5) &= 6,5X_5^2(t) - 8,7X_5(t) + 3,7, \\ f_{10}(X_6) &= 0,34X_6^3(t) + 0,21X_6^2(t)^2 - 0,56X_6(t) + 0,83, \\ f_{11}(X_5) &= 5,8X_5^3(t)^3 - 12X_5^2(t) + 8,9X_5(t) - 1,7, \end{aligned}$$

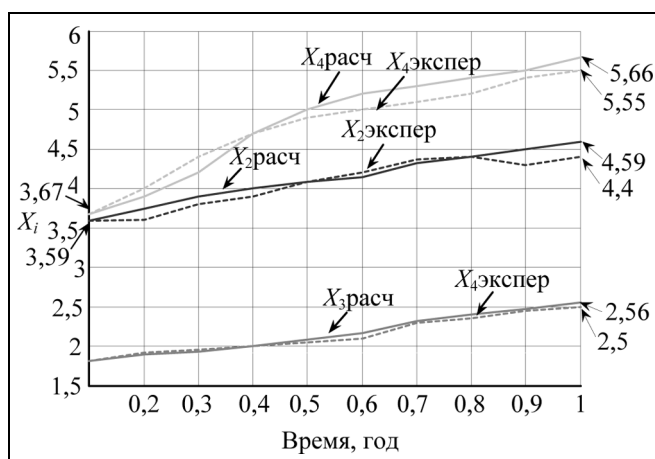


Рис. 3. Графики сравнения расчетных и экспериментальных значений показателей эффективности

$$f_{12}(X_5) = 2,2X_5^3(t) - 3,44X_5^2(t) + 0,9X_5(t) + 2,71,$$

$$f_{13}(X_6) = -0,28X_6^3(t) + 1,87X_6^2(t) - 1,1X_6(t) + 0,5.$$

В ходе исследования сравнивались значения нормированных показателей эффективности, полученных в результате имитационного моделирования в соответствии с моделью (1) по Балаковскому филиалу СГЮА со значениями экспериментальных показателей на интервале 1 год (рис. 3). Видно, что между данными значениями расхождение минимальное.

Как показывает практика, в модели (1) образовательного процесса отдельные параметры не всегда поддаются точному расчету, кроме того, зачастую бывает сложно определить все релевантные обратные связи между моделируемыми показателями. Поэтому для проверки адекватности и оценки точности разработанной модели был проведен вычислительный эксперимент, в ходе которого расчетные значения, полученные из решения системы (1), сравнивались со значениями соответствующих показателей, полученных с помощью регрессионной модели (см. далее систему уравнений (2)), а также с экспериментальными данными.

Система уравнений регрессии построена по результатам наблюдений за изменением показателей эффективности в филиале академии. При расчете показатели эффективности $X_1, X_2, \dots, X_7$, приведенные в табл. 1, были заменены на показатели $X_1^n, X_2^n, \dots, X_7^n$, нормированные относительно их пороговых значений. Коэффициенты в уравнениях определены с помощью метода наименьших квадратов (МНК). Были также построены доверительные интервалы и уравнения для аппроксимирующих кривых показателей $X_1^n, X_2^n, \dots, X_7^n$.

Уравнения регрессии имеют вид:

$$X_1^n = -0,04t^4 + 0,52t^3 - 2,28t^2 + 4t - 1,18,$$

$$X_2^n = 0,06t^4 - 0,67t^3 + 2,6t^2 - 3,1t + 1,84,$$

$$X_3^n = -0,02t^4 + 0,2t^3 - 0,71t^2 + 0,96t + 0,46,$$

$$X_4^n = 0,04t^4 - 0,49t^3 + 1,9t^2 - 2,6t + 2,77, \quad (2)$$

$$X_5^n = 0,02t^4 - 0,16t^3 + 0,57t^2 - 1,33t + 4,62,$$

$$X_6^n = 0,02t^4 - 0,25t^3 + 1,06t^2 - 1,87t + 2,1,$$

$$X_7^n = -0,03t^4 + 0,33t^3 - 1,47t^2 + 2,67t - 0,7.$$

Разработан также эвристический численный алгоритм решения системы дифференциальных уравнений (1), основанный на применении метода Рунге — Кутты четвертого порядка и нейронной сети, имеющей вид двухслойного персептрона, а также предложена методика проведения вычислительных экспериментов с математическими моделями (1) и (2) и проанализированы полученные результаты.

2. ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ

Задача контроля качества образовательного процесса (1) представляет собой задачу Коши, которая, в зависимости от интервала моделирования, решается с помощью численного метода Рунге — Кутты четвертого порядка [8] или с помощью нейронной сети Элмана.

Анализ результатов вычислительных экспериментов показал, что при решении системы уравнений (1) методы Рунге — Кутты могут оказаться недостаточно эффективными на временных интервалах более одного года в силу трудоемкости расчетного алгоритма и существенной накопленной погрешности вычислений. Они могут обладать неустойчивостью из-за жесткости обыкновенных дифференциальных уравнений модели (1), что также затрудняет их практическое применение [9].

Поэтому в качестве альтернативы данным методам на интервале моделирования свыше 0,6 года мы воспользовались нейронной сетью Элмана (рис. 4) — разновидностью рекуррентных сетей, которую получают из многослойного персептрона введением обратных связей, идущих от выходов внутренних нейронов. Это структурное свойство искусственной нейронной сети Элмана позволяет учесть предысторию наблюдаемых процессов и накопить информацию для выработки правильной стратегии управления объектами с большим числом обратных связей. Для обучения сети был применен метод Левенберга — Маркара, позволяющий реализовать один из наиболее быстрых алгоритмов обучения.

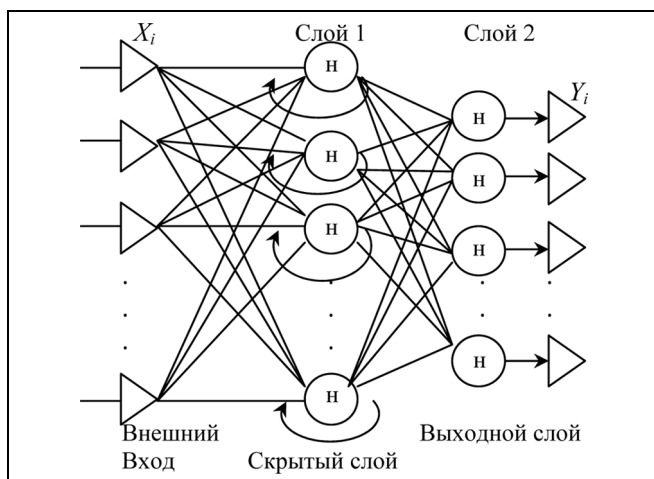
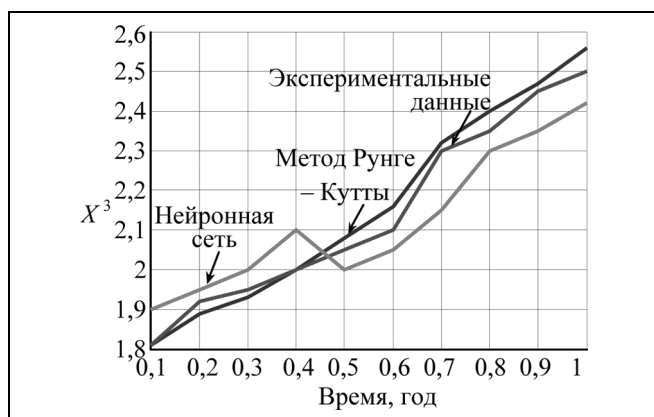


Рис. 4. Схема нейронной сети Элмана


Рис. 5. Графики изменения показателя X_3 при различных способах расчета

Данный метод представляет собой улучшение классического метода Гаусса — Ньютона, применяемого для решения задач нелинейной регрессии методом наименьших квадратов; он эффективнее большинства общих алгоритмов оптимизации (таких как, например, квазиньютоновский алгоритм или симплекс-метод).

Итерации в методе Левенберга — Маркара выполняются по формуле:

$$\Delta w = -(Z^T Z + \lambda I)^{-1} Z^T \varepsilon, \quad (3)$$

где ε — вектор ошибок на всех наблюдениях, I — единичная матрица, Z — матрица частных производных от всех ошибок по весам:

$$(Z)_{ni} = \frac{\partial \varepsilon^n}{\partial w_i}.$$

Первый член в формуле (3) соответствует линейной модели, второй формирует процедуру градиентного спуска.

Управляющий параметр λ характеризует относительную значимость соответствующих составляющих правой части уравнения (3). Оценивая точность результатов имитационного моделирования показателей эффективности, выполненного с помощью рассмотренного численного алгоритма, можно сделать вывод, что на интервале $[0,1; 0,4]$ лет наблюдается минимальное расхождение между расчетными значениями показателей, вычисленными с помощью метода Рунге — Кутты четвертого порядка и с помощью сети Элмана (рис. 5).

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

В рамках вычислительного эксперимента по моделям (1) и (2) были определены показатели эффективности деятельности Балаковского филиала СГЮА. В качестве начальных значений взяты нормированные показатели эффективности образовательной деятельности вуза за 2012 г. (табл. 3).

На рис. 6 показаны расчетные показатели по Балаковскому филиалу СГЮА на интервале 1 год. Сравнение вычисленных по модели (1) показателей эффективности X_2 и X_4 с экспериментальными данными представлено на рис. 7.

Анализ результатов данного вычислительного эксперимента позволяет сделать вывод, что расхождения между показателями эффективности, определенными по модели (1), регрессионной модели (2) и экспериментальными данными, составляют не более 10–15 %. Полученные результаты подтверждают достаточно высокую точность вычисления данных показателей.

4. АЛГОРИТМ КОНТРОЛЯ И УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА

Для реализации разработанных математических моделей и численных методов был сформирован эвристический численный алгоритм. Основная его часть осуществляет следующую последовательность действий, необходимых для расчета показателей эффективности образовательной деятельности вуза.

1. Выявить взаимосвязи в системе — образовательном процессе, записать систему дифференциальных уравнений состояний. Задать функциональные зависимости f_i и решить систему уравнений,

Таблица 3

Начальные значения показателей эффективности образовательной деятельности вуза

X_{01}	X_{02}	X_{03}	X_{04}	X_{05}	X_{06}	X_{07}
1,12	3,59	1,81	3,67	2,67	0,9	0,95

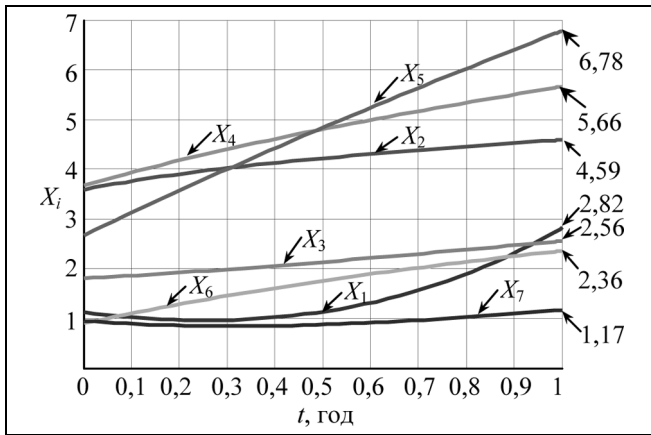


Рис. 6. Расчетные значения показателей эффективности на интервале один год

определив начальные условия $0 < x_{0i} \leq 1$ и временной интервал.

2. Проверить адекватность полученных результатов путем регрессионного анализа: задать множество X_i^k, X_i^f ; $0 < X_i^f \leq 1$ — фактические показатели эффективности нормированы относительно критериальных. С помощью МНК определить вид функциональной зависимости каждого показателя $X_i^n(t)$.

3. Проверить адекватность полученных уравнений регрессии: рассчитать ошибку аппроксимации $\bar{A}_i$ и определить коэффициент корреляции. Заменив уравнения в системе, ошибка аппроксимации в которых превышает пороговые значения.

4. Задать начальные условия, временной интервал, число итераций и определить расчетные значения показателей эффективности $X_1, \dots, X_n$.

5. Сравнить значения показателей эффективности, вычисленных по модели системной динамики, регрессионной модели и определяемых эвристически.

6. На основе представленного отчета лицо, принимающее решение (ЛПР), должно разработать план изменения образовательной стратегии на наиболее опасном для образовательной деятельности вуза временном интервале.

В процессе мониторинга необходимо обрабатывать большой объем статистических данных. Для снижения трудоемкости выполняемых работ необходимо специализированное программное обеспечение. С этими целями был разработан «Модуль для определения эффективности деятельности высшего учебного заведения» [10] в среде «Visual Studio 2010» на языке C#. Кратко рассмотрим основные этапы работы соответствующей программы.

На *первом этапе* определяется местоположение вуза (Москва, Санкт-Петербург или регионы РФ). Значения пороговых показателей для Москвы и Санкт-Петербурга, а также для регионов приведены в соответствующих базах данных, созданных в среде «Microsoft Access 2007». Добавление подключения баз к программе осуществлялось через поставщика данных «.NET Framework» для OLE DB.

На *втором этапе* осуществляется ввод фактических и пороговых значений показателей эффективности, весовых коэффициентов. Значения весовых коэффициентов назначаются экспертами эвристически.

В процессе работы программы вычисляются взвешенные отклонения значений фактических показателей от пороговых значений и определяется значение целевой функции — квадратичного критерия, который позволяет оперативно управлять вузом посредством варьирования значения показателей и весовых коэффициентов:

$$Z(t) = \int_{\text{нач}}^{\text{кон}} \sum_{i=1}^j (X_i^n(t) - X_i^f(t))^2 \mu_i dt \rightarrow \min,$$

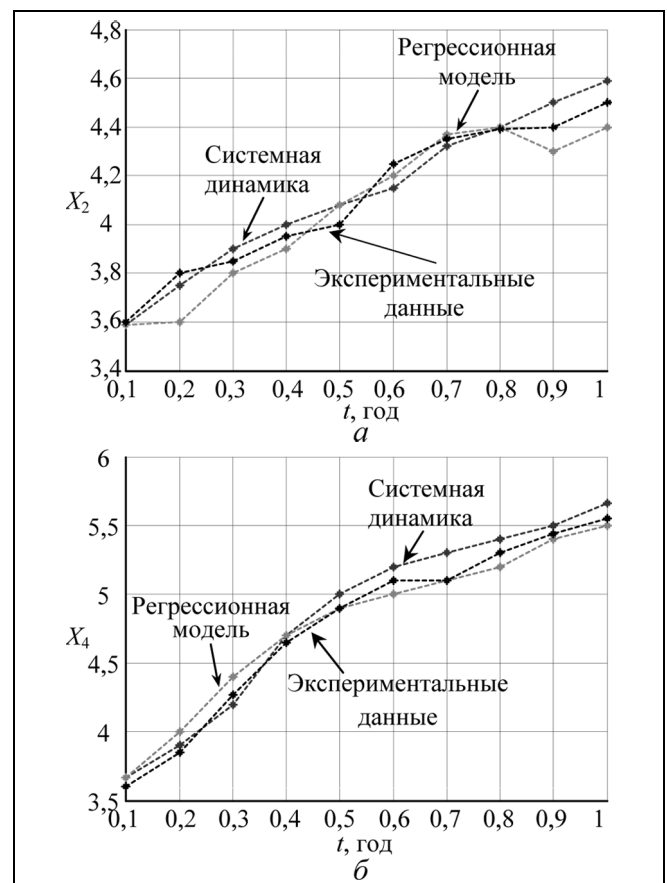


Рис. 7. Сравнение расчетных показателей эффективности, определенных по различным моделям и экспериментально: а — для показателя X_2 , б — для показателя X_4

где j — число показателей эффективности, μ_i — весовой коэффициент i -го показателя эффективности, X_i^p и X_i^f — пороговое и фактическое значение данного показателя [6]. Значения функции $Z(t)$ вычисляются численным методом Симпсона.

Для обеспечения необходимой точности расчетов значения функции $Z(t)$ рекомендуется вычислять двумя способами: численным методом Симпсона и с помощью нейронной сети «Cascade forward backprop» — каскадной двухслойной сети с прямым распространением сигнала и обратным распространением ошибки [11].

Значения весовых коэффициентов μ_i неизменны на всех временных интервалах и задаются в виде векторов. При определении значений весовых ко-

эффициентов следует учитывать условие $\sum_{i=1}^6 \mu_i = 1$.

В случае несоблюдения данного условия программа выдает сообщение об ошибке. После ввода данных и нажатия клавиши *Enter* фокус управления переходит на кнопку *Ввод исходных данных*. Производится расчет взвешенных отклонений пороговых и фактических значений показателей эффективности. Показатели, вводимые в текстовые поля, автоматически нормируются относительно пороговых с тем, чтобы избежать ошибок в единицах измерения при определении средневзвешенных отклонений фактических показателей эффективности от их пороговых значений.

На *третьем этапе* необходимо ввести параметры интегрирования — начальную a , конечную b точки интервала и число отрезков интегрирования n .

На *четвертом этапе* вычисляются значения целевой функции $Z(t)$.

Программа позволяет сохранять вычисленные значения показателей эффективности в базе данных для дальнейшего применения в анализе деятельности вуза. На рабочих станциях пользователей программного продукта находятся базы данных с необходимой информацией по вузу: модули, рейтинги, акты самообследования вуза. Предусмотрена система архивирования исходной и расчетной информации. Через Интернет осуществляется доступ удаленной группы пользователей.

Разработанный программный продукт может широко применяться для мониторинга с целью оценки эффективности деятельности вуза. С его помощью можно сравнивать пороговые и фактические показатели эффективности, а также определять образовательную стратегию для конкретного вуза.

6. ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ РАЗРАБОТАННОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ

При внедрении разработанного математического обеспечения в других вузах ошибка прогнозирования может стать недопустимо большой. Основные причины данного явления, на наш взгляд, заключаются в изменении причинно-следственных связей между моделируемыми переменными (см. рис. 1), в изменении статистических данных, используемых при построении аппроксимирующих полиномов функциональных зависимостей в модели системной динамики, а также в возможной неустойчивости моделируемых переменных к изменению входных параметров модели, заданной системой дифференциальных уравнений (1).

Адаптивная процедура подготовки и принятия решения в данных ситуациях пояснена при помощи информационно-логической схемы решения задачи (рис. 8). Данная схема позволяет обосновать применимость разработанных моделей для решения важных задач прогнозирования моделируемых переменных. Кроме того, схема позволяет интерпретировать состав и структуру актов управления, выявлять основные процедуры принятия решений, устанавливать взаимосвязи функций управления, а также характеризовать периодичность выполнения различных мероприятий в различных структурных подразделениях вуза [12]. Обозначения на схеме: 1–3 — сбор статистических данных из отдела кадров, учебного и научного отделов подразделений вуза; 4 — запись информации в базу данных; 5 — идентификация текущей ситуации, возникающей в образовательном процессе, определение X_i^f — фактических значений показателей эффективности; 7 — определение ЛПР образовательной стратегии развития вуза; 8 — сообщение о возникновении в вузе критической ситуации $X_i^k > X_i^f$, требующей вмешательства ЛПР; 9 — анализ причин возникновения критической ситуации; 10 — принятие решения об устранении критической ситуации в вузе; 11 — определение расчетных значений показателей эффективности X_i^p на заданном временном интервале; 12 — занесение информации о критической ситуации в базу данных; 13 — обновление статистических данных в базе данных; 14 — сопоставление расчетных и фактических значений показателей эффективности; 15 — проверка выполнения условия $X_i^p \cong X_i^f$; 16 — анализ причин расхождения значений расчетных и фактических показателей эффективности; 17 — ликвидация причин расхождения значений расчетных и фактических показателей; 18 — выдача ЛПР рекомендаций о формировании образователь-

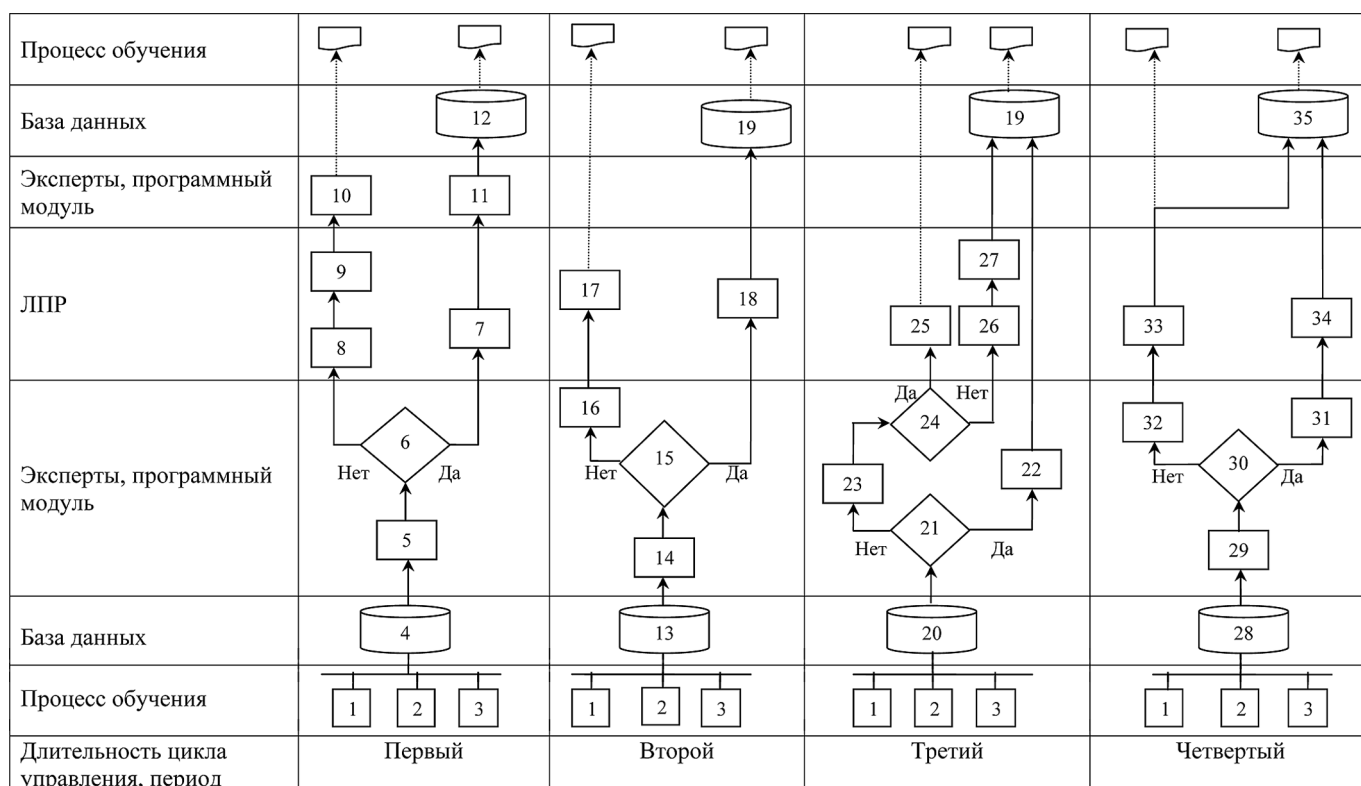


Рис. 8. Информационно-логическая схема системы управления показателями эффективности

ной стратегии вуза; 19 — занесение информации о проведенных мероприятиях в базу данных; 20 — обновление статистической информации в базе данных — сбор сведений о численности студентов, НПР, числе защит диссертаций и пр.; 21 — проверка адекватности разработанного математического обеспечения; 22 — расчет прогнозных значений показателей эффективности на заданном временном интервале; 23 — уточнение параметров математической модели; 24 — проверка корректности математической модели; 25 — в вузе наблюдается стабильная ситуация; 26 — информация об опасной ситуации доводится до сведения ЛПР; 27 — ЛПР принимает решение о плане проводимых мероприятий; 28 — аккумуляция информации о рекомендациях ЛПР, принятых в течение временного периода; 29 — экспертная оценка эффективности образовательной деятельности вуза в периоде; 30 — требуемый уровень качества достигнут?; 31 — поощрение персонала; 32 — анализ причин неэффективной деятельности экспертов; 33 — принятие решения ЛПР о корректировке образовательной политики в вузе; 34 — формирование отчета об эффективности деятельности вуза в течение анализируемого периода; 35 — занесение информации и статистического годового отчета в базу данных с последующей отправкой аналитического отчета в Минобрнауки.

Задача оценки эффективности образовательной деятельности решается на различных временных интервалах: первый (полгода), второй (год), третий (полтора года), четвертый (два года).

В первом периоде осуществляется сбор статистической информации о ситуации в вузе и идентифицируется эффективность деятельности вуза. Математическое и программное обеспечение адаптируется к условиям конкретного вуза. При возникновении опасной ситуации, требующей вмешательства ЛПР, эта информация доводится до его сведения.

Во втором периоде анализируются результаты сопоставления расчетных и фактических показателей. В случае отклонений, превышающих допустимые значения, выявляются причины расхождений и корректируются параметры математической модели.

В третьем периоде обновляется статистическая информация в базе данных — об объеме НИОКР, числе защит диссертаций и пр. Рассчитываются показатели на заданном временном интервале и анализируется ситуация в вузе.

В четвертом периоде формируется отчет об образовательной деятельности вуза. По итогам проведенной работы либо поощряется персонал, либо анализируются причины неэффективного применения математического и программного обеспече-

ния. Далее информация предоставляется Министерству образования и науки, которое принимает решение об эффективной или неэффективной деятельности вуза.

В общем виде оценить степень устойчивости предлагаемых моделей к ее возмущающим параметрам не представляется возможным из-за нелинейности дифференциальных уравнений. Поэтому авторами предлагается следующая процедура оценки степени устойчивости. На стадии подготовки к внедрению разработанного математического обеспечения в информационную систему конкретного учреждения необходимо предусмотреть имитационное моделирование процесса изменения моделируемых переменных $X_1, \dots, X_n$ при различных возмущающих параметрах из уравнения (1). При наличии неустойчивости данное математическое обеспечение не может быть использовано для моделирования параметров $X_1, \dots, X_n$, характеризующих эффективность образовательной деятельности в данном образовательном учреждении. В условиях реформирования системы высшего образования данный контроль применимости должен проводиться регулярно, не реже одного раза в полгода. При возникновении неустойчивости соответствующая характеристика образовательного процесса будет определяться не с помощью предлагаемого математического обеспечения, а на основании оценок экспертов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный универсальный комплекс математических моделей дает возможность осуществлять имитационное моделирование и прогнозирование показателей эффективности образовательной деятельности вуза с учетом большого числа положительных и отрицательных обратных связей на варьируемых временных интервалах. Эвристический численный алгоритм позволяет эффективно решать систему дифференциальных уравнений, характеризующих динамику основных показателей эффективности образовательной деятельности.

При внедрении разработанного математического обеспечения в крупных вузах необходимо учитывать, что ошибка прогнозирования может стать недопустимо большой в силу изменения причинно-следственных связей между моделируемыми переменными, большого объема статистической информации, отсутствия в модели учета влияния неконтролируемых внешних воздействий. Поэтому необходимо предусмотреть детальную процедуру адаптации разработанного математического и программного обеспечения к особенностям конкретного вуза.

Разработка комплекса моделей и программ является первым шагом в создании системы под-

держки принятия решений, позволяющей автоматизировать процесс оперативного управления вузом и перейти к качественно новому способу проведения процедуры мониторинга.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Матросов В.М., Матросова Н.И.* Методология комплексных исследований безопасности и перехода России к устойчивому развитию с использованием математических моделей и новых информационных технологий. — М.: Академия: Изд. МГУК, 1999.
2. *Новая парадигма развития России.* Комплексные исследования проблем устойчивого развития / Институт машиноведения им. А.А. Благонравова, Центр исследований устойчивости и нелинейной динамики, Институт социально-политических исследований и др. / под ред. В.А. Коптюга, В.М. Матросова, В.К. Левашова. — М.: Academia; Иркутск: РИЦ ГП «Облформинформ», 2000. — 459 с. — URL: <http://www.prometeus.nsc.ru/koptuyug/ideas/paradigm/> (дата обращения: 12.12.2014).
3. *Качество образования: гаранты и гарантии* // Аккредитация в образовании. — URL: <http://www.akvobr.ru> (дата обращения 09.01.2014).
4. *Протокол заседания Межведомственной комиссии по проведению мониторинга деятельности государственных образовательных учреждений в целях оценки эффективности их работы и реорганизации неэффективных государственных образовательных учреждений от 29.04.2013.* — URL: <http://минобрнауки.рф> (дата обращения: 26.12.2014).
5. *Методика расчета показателей мониторинга эффективности образовательных организаций высшего образования.* — URL: <http://минобрнауки.рф> (дата обращения: 01.08.2014).
6. *Форрестер Дж.* Основы кибернетики предприятия (индустриальная динамика) / пер. с англ. — М.: Прогресс, 1971. — 325 с.
7. *Яндыбаева Н.В., Кушников В.А.* Математическая модель для прогнозирования аккредитационных показателей вуза // Управление большими системами. — 2012. — Вып. 40. — С. 314–343.
8. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.
9. *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. — М.: Мир, 1986. — 243 с.
10. *Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014613210.* Модуль для определения эффективности деятельности вуза / Н.В. Яндыбаева, Е.Р. Кожанова, В.А. Кушников. — Заявка № 2014610644; зарегистрир. в реестре программ для ЭВМ 19.03.2014.
11. *Кушников В.А., Яндыбаева Н.В.* Модель Форрестера в управлении качеством образовательного процесса вуза // Прикладная информатика. — 2011. — № 3 (33). — С. 65–73.
12. *Резчиков А.Ф., Шрай Ю.К., Кушников В.А., Донин С.Б.* Оперативная идентификация и основанное на знаниях управление режимами энергоснабжения промышленных предприятий // Приборы и системы управления. — 1994. — № 5. — С. 27–32.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Яндыбаева Наталья Валентиновна — канд. техн. наук, доцент, Балаковский филиал Российской академии народного хозяйства и государственной службы, ✉ nat07@inbox.ru,

Кушников Вадим Алексеевич — д-р техн. наук, вед. науч. сотрудник, Институт проблем точной механики и управления РАН, г. Саратов, ✉ kushnikoff@yandex.ru.



СОГЛАСОВАНИЕ СОЦИАЛЬНЫХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РАЗВИТИЯ РЕГИОНА: ПОНЯТИЕ И МЕХАНИЗМЫ¹

И.В. Горошко, Ю.В. Бондаренко

Рассмотрена проблема согласования значений социальных показателей развития региона и экономических показателей деятельности хозяйствующих субъектов на его территории. Дана формальная постановка задачи согласования, разработан комплекс механизмов, ориентированных на стимулирование хозяйствующих субъектов к участию в решении социальных задач региона. Предложен подход, отличительная особенность которого состоит в учете различного отношения хозяйствующих субъектов к решению социальных задач региона.

Ключевые слова: социально-экономическая система, регион, показатели развития, согласование, механизм, регулирование, хозяйствующий субъект.

ВВЕДЕНИЕ

Одна из важнейших задач социально-экономической политики государства заключается в создании условий, обеспечивающих достойную жизнь его граждан. Ее решение в регионах Российской Федерации предполагает, на наш взгляд, не столько преодоление комплекса социальных проблем, связанных с безработицей, преступностью, низкой рождаемостью и др., сколько ориентацию региональной политики на достижение таких значений показателей социального развития, которые бы отвечали запросам большинства населения. Первостепенная роль в выборе приоритетных направлений такой политики принадлежит, безусловно, администрациям регионов.

Проведенный нами анализ современного состояния ряда российских регионов показывает, что значительная часть перечисленных социальных проблем имеет экономическую основу. В этой связи считаем, что стратегической целью администрации региона должно стать активное вовлечение хозяйствующих субъектов, их экономических возможностей и ресурсов в решение актуальных социальных задач, применяя для этого те или иные мотивирующие воздействия. Результат этих про-

цессов (которые по своей сути являются процессами согласования интересов) может оцениваться как положительный в случае достижения значениями социальных показателей региона заданных (определенных администрацией) уровней.

Проблема согласования интересов в социально-экономических системах неоднократно становилась предметом обсуждения, детально разбиралась во многих исследованиях и в самых разных аспектах. Среди них отметим работы К.А. Багриновского, посвященные вопросам согласования плановых решений [1], В.Н. Буркова, Д.А. Новикова, В.Н. Кузнецова, в которых представлены механизмы согласованного управления активными организационными системами [2, 3], М.И. Гераскина, затрагивающие вопросы согласования экономических интересов в корпоративных структурах и процессе межрегионального взаимодействия [4].

Общие идеи согласования интересов, в контексте сформулированного подхода, были ранее рассмотрены в работах авторов [5–8], направленность которых в полной мере отвечает декларации о приоритетности социальной составляющей в государственной политике Российской Федерации [9].

В настоящей статье основное внимание уделяется конкретизации формальной постановки задачи согласования социальных и экономических показателей развития региона и описанию возможных механизмов и алгоритмов, обеспечивающих ее решение.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского гуманитарного научного фонда, проект № 15-02-00229 (а).

1. УТОЧНЕНИЕ УПОТРЕБЛЯЕМЫХ ПОНЯТИЙ

Социально-экономическую систему (СЭС) региона будем рассматривать как совокупность взаимосвязанных элементов и отношений, возникающих в процессе производства, распределения, обмена и потребления материальных и нематериальных благ при обеспечении жизнедеятельности и развития социума региона. Структуру такой системы представим в виде совокупности элементов:

- управляющий центр СЭС региона (субъект управления верхнего уровня);
- социальная система региона;
- экономическая система региона.

В качестве *управляющего центра* СЭС рассматривается администрация региона.

Социальная система региона — общность индивидов, проживающих на территории региона, объединенных формами совместной жизнедеятельности, а также интересами и потребностями в высоком качестве жизни в регионе.

Экономическая система региона рассматривается как совокупность n взаимосвязанных и взаимодействующих хозяйствующих субъектов (ХС), расположенных на территории региона и реализующих экономические интересы в процессе осуществления экономической деятельности. С каждым ХС будем отождествлять субъект управления экономической системы (руководство ХС), решающий стратегические и тактические задачи выбора и реализации такого направления развития, которое обеспечивало бы получение максимальной прибыли в условиях конкретного региона.

Диагностика благополучия или неблагополучия той или иной части социума или всей социальной системы региона осуществляется управляющим центром СЭС на основе анализа ряда социальных показателей (индикаторов). Наиболее значимые для каждого из регионов Российской Федерации социальные индикаторы приведены в стратегиях их социально-экономического развития. Как показывают проведенные нами исследования, в регионах, как правило, на первых местах по значимости находятся такие показатели как: число зарегистрированных преступлений, уровень безработицы, реальные и номинальные денежные доходы, прожиточный минимум и стоимость минимальной потребительской корзины, численность и доля населения с доходами ниже прожиточного минимума (уровень бедности), общий коэффициент рождаемости, коэффициент фондов, коэффициент Джини и др. В настоящее время администрациями регионов определены и конкретные их значения на период до 2020 г. (плановые значения или «индикаторы»), которые в дальнейшем будем рассматривать как «идеальные».

Таким образом, для оценки социально-экономического состояния и развития одного конкретного региона выбраны K социальных показателей (индикаторов). Совокупность их значений c_{kt} , $k = 1, \dots, K$, в каждый момент t рассматриваемого дискретного временного интервала $t = 1, \dots, T$ представим в форме вектора $c_t = (c_{1t}, \dots, c_{Kt})$.

Считая, что временной такт составляет один год, положим, что администрацией региона в каждый момент времени t рассматриваемого периода определены:

$\tilde{c}_{kt}$ — «идеальное» значение каждого k -го социального показателя, на основе которых формируются вектор «идеальных» значений $\tilde{c}_t = (\tilde{c}_{1t}, \dots, \tilde{c}_{Kt})$;

Ω_{kt} — область допустимых отклонений фактического значения каждого социального показателя c_{kt} от «идеального» $\tilde{c}_{kt}$, декартово произведение

которых $\Omega_t = \prod_{k=1}^K \Omega_{kt}$ мы определили как область социального императива [5].

Среди экономических показателей деятельности ХС выделим такие, которые оказывают наибольшее существенное влияние на значения социальных индикаторов (что подтверждается оценками t -статистики Стьюдента). К ним, прежде всего, относятся размер среднемесячной заработной платы (номинальной и реальной); количество свободных рабочих мест, а также численность работников на предприятиях; цены на продукцию региональных производителей (в частности, на включенные в минимальную потребительскую корзину товары).

Введем обозначения:

M — число выбранных экономических показателей деятельности ХС региона, m — порядковый номер показателя, $m = 1, \dots, M$;

s_{mt}^i — значение m -го экономического показателя деятельности ХС i в момент времени t , где $m = 1, \dots, M$, $i = 1, \dots, n$.

На основе значений M экономических показателей для каждого хозяйствующего субъекта с индексом i , $i = 1, \dots, n$, сформируем множество $\{s_t^i = (s_{1t}^i, \dots, s_{Mt}^i), t = 1, \dots, T\}$, каждый элемент которого s_t^i определим как вектор значений экономических показателей деятельности i -го ХС региона в момент времени t .

В соответствии с излагаемым подходом согласование значений социальных и экономических показателей развития в каждый момент времени $t = 1, \dots, T$ осуществляется посредством целенаправленного воздействия управляющего центра СЭС региона на экономическую деятельность каждого ХС (посредством регулирования), которое обозна-



чим как $v_t^i, i = 1, \dots, n$. Примером таких регулирующих воздействий со стороны администрации региона может служить изменение ставки налога на прибыль для ХС, земельного налога или налога на имущество, предоставление особых условий кредитования, административное принуждение, выделение ресурса (в том числе, финансового) и т. п.

Используя введенные нами обозначения, для удобства дальнейшего изложения рассмотрим $v^i = (v_1^i, \dots, v_T^i)$ — последовательность регулирующих воздействий управляющего центра СЭС на экономическую деятельность i -го хозяйствующего субъекта в течение всего выбранного временного интервала, а также $\hat{v}_t = (v_t^1, \dots, v_t^n)$ — совокупность регулирующих воздействий управляющего центра на хозяйствующие субъекты региона в момент времени $t, t = 1, \dots, T$. В принятых нами обозначениях допустимость регулирующего воздействия означает принадлежность $\hat{v}_t$ заданному (допустимому) множеству $\hat{V}_t: \hat{v}_t \in \hat{V}_t, \forall t = 1, \dots, T$.

В зависимости от регулирования $v^i = (v_1^i, \dots, v_T^i)$, i -й субъект управления экономической системы формирует управление v_t^i , допустимое при данном регулирующем воздействии (т. е. $u_t^i \in U_t^i(v_t^i)$), в результате которого экономические показатели s_t^i руководимого им хозяйствующего субъекта изменяются в соответствии с некоторым правилом, которое представим в форме зависимости $s_t^i = g_t(s_{t-1}^i, u_t^i)$. Такие изменения в своей совокупности по каналу обратной связи влекут изменения социальных показателей развития региона. В целях сохранения общности рассуждений будем предполагать нулевое запаздывание этих изменений, т. е.:

$$c_t = \varphi(c_{t-1}; s_t^1, s_t^2, \dots, s_t^n). \quad (1)$$

Зависимость (1) показывает, что может быть установлено соответствие между «идеальными» значениями социальных показателей $\tilde{c}_t, t = 1, \dots, T$, и обеспечивающими их достижение «идеальными» значениями экономических показателей для каждого хозяйствующего субъекта $\tilde{s}_t^i = (\tilde{s}_{1t}^i, \dots, \tilde{s}_{Mt}^i)$, где $\tilde{s}_{mt}^i$ — «идеальное» значение m -го экономического показателя ХС с индексом i в момент времени $t, m = 1, \dots, M, i = 1, \dots, n$.

Будем считать, что каждый субъект управления экономической системы ведет себя рационально, а выбор наилучшего управления определяется им

на основе максимизации критерия оптимальности, учитывающего условия:

— субъект управления ХС реализует экономические интересы в виде стремления к максимизации прибыли;

— осуществляя деятельность на территории региона, руководство ХС должно быть заинтересовано в высоком качестве жизни населения, и потому в той или иной степени стремится поддерживать администрацию региона в решении задач, направленных на достижение требуемых значений социальных показателей. Такое свойство, по нашему мнению, объективно присуще в разной степени хозяйствующим субъектам региона. В работе [10] мы назвали это свойство *лояльностью*, а в качестве его количественной оценки предложили использовать *параметр лояльности* $\lambda_i: \lambda_i \in [0, 1], i = 1, \dots, n$.

Математически такой критерий оптимальности может быть представлен парой функций:

$$\bullet \tilde{F}_1(s^i) = - \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \left(\frac{s_{mt}^i - \tilde{s}_{mt}^i}{\tilde{s}_{mt}^i} \right)^2 \quad \text{— оценка сум-}$$

марного отклонения значений экономических показателей i -го ХС от «идеальных» значений этих показателей, где $s^i = (s_1^i, \dots, s_T^i)$ — совокупность значений экономических показателей i -го хозяйствующего субъекта, упорядоченных по времени;

$$\bullet \tilde{F}_2(v^i, u^i, s^i) = \sum_{t=1}^T \pi_t(v_t^i, u_t^i, s_t^i)^2 \quad \text{— совокупная}$$

прибыль ХС за рассматриваемый временной интервал, где π_t — размер прибыли ХС в момент времени $t, u^i = (u_1^i, \dots, u_T^i)$ — совокупность управлений i -го субъекта управления экономической системы.

Значение параметра лояльности ХС позволяет оценить приоритет каждой из описанных нами составляющих критерия оптимальности ХС и обоснованно перейти к следующей форме его представления:

$$G_t(v^i, u^i, s^i) = \lambda_i F_1(s^i) + (1 - \lambda_i) F_2(v^i, u^i, s^i),$$

где F_1 и F_2 — функции, получаемые в результате приведения критериев $\tilde{F}_1$ и $\tilde{F}_2$ к единым единицам и масштабу измерения:

$$F_1(s^i) = - \frac{1}{TM} \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \left(\frac{s_{mt}^i - \tilde{s}_{mt}^i}{\tilde{s}_{mt}^i} \right)^2,$$

$$F_2(v^i, u^i, s^i) = \frac{1}{\bar{\pi}} \sum_{t=1}^T \pi_t(v_t^i, u_t^i, s_t^i), \quad \text{где } \bar{\pi} \text{ — оценка}$$

максимально возможной суммарной прибыли ХС за рассматриваемый период.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Сформулируем общую математическую задачу согласования социальных и экономических показателей развития региона, представив ее в агрегированном виде совокупностью задач верхнего и нижнего уровней с учетом региональной специфики.

• **Задача управляющего центра СЭС региона (верхнего уровня):** найти регулирование $\hat{v} = (\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_T) \in \sum_{t=1}^T \hat{V}_t$ хозяйствующих субъектов, обеспечивающее в каждый момент времени $t = 1, \dots, T$ изменение значений социальных показателей развития региона c_t в пределах установленной области социального императива: $c_t \in \Omega, \forall t = 1, \dots, T$.

Согласно предложению (1), значения социальных показателей в каждый момент времени t определяются функцией $c_t = \varphi(c_{t-1}; s_t^1, s_t^2, \dots, s_t^n)$, n аргументов которой — экономические показатели деятельности хозяйствующих субъектов $s_t^1, s_t^2, \dots, s_t^n$ — рассчитываются на основе решения n задач субъектов управления экономической системы.

• **Задачи субъектов управления экономической системы (нижнего уровня):** для каждого i -го, $i = 1, \dots, n$, субъекта управления экономической системы при регулировании $v^i = (v_1^i, \dots, v_T^i)$ определяется наилучшее управление хозяйствующим субъектом с учетом его параметра лояльности. Такое управление для субъекта управления экономической системы с индексом i формируется как решение оптимизационной задачи:

$$G_i(v^i, u^i, s^i) = \lambda_i F_1(s^i) + (1 - \lambda_i) F_2(v^i, u^i, s^i) \rightarrow \max, \\ \begin{cases} u_t^i \in U_t^i(v_t^i); & s_t^i = g_i(s_{t-1}^i, u_t^i), & t = 1, \dots, T; \\ s_0^i = \tilde{s}^i. \end{cases} \quad (2)$$

В модели (2) через $\tilde{s}^i$ обозначены значения экономических показателей в момент времени $t = 0$ (начальные условия).

Практическая реализация представленной нами общей математической задачи согласования социальных и экономических показателей развития региона сопряжена с рядом сложностей, вызванных необходимостью учета большого числа ХС, функционирующих на территории региона. Преодоление этих сложностей мы предлагаем искать на пути выделения $n', n' \ll n$ наиболее значимых для региона ХС — крупных градообразующих предприятий и предприятий среднего бизнеса или их взаимосвязанных групп. В этом случае решение задачи сводится к решению n' задач, каждую из ко-

торых мы определим как общую математическую задачу регулирования хозяйствующего субъекта в целях согласования социальных и экономических показателей развития региона.

Для реализации такого перехода управляющий центр СЭС региона должен для каждого из выделенных им ХС определить множество $\tilde{S}_t$ допустимых изменений экономических показателей деятельности в момент времени $t = 1, \dots, T$. Принадлежность экономических показателей ХС такому множеству обеспечивает в своей совокупности достижение социальными показателями области социального императива. Очевидно, что «идеальные» значения экономических показателей ХС принадлежат этой области.

Представленное предположение дает возможность без потери общности перейти к рассмотрению некоторого выделенного ХС, индекс i которого для удобства будем опускать, сохраняя принятые обозначения.

Теперь общую математическую задачу регулирования хозяйствующего субъекта в целях обеспечения согласования социальных и экономических показателей развития региона можно сформулировать следующим образом.

• **Задача управляющего центра СЭС региона (верхнего уровня):** найти регулирование хозяйствующего субъекта региона $v = (v_1, \dots, v_T)$, обеспечивающее изменение значений показателей его экономической деятельности s_t в пределах установленной области: $s_t \in \tilde{S}_t, \forall t = 1, \dots, T$.

Набор значений экономических показателей ХС $s = (s_1, \dots, s_T)$, на который ориентируется управляющий центр СЭС, формируя регулирующее воздействие, рассчитывается на основе решения задачи нижнего уровня.

• **Задача субъекта управления экономической системы (нижнего уровня):** для субъекта управления экономической системы при регулировании v найти такое управление $u = (u_1, \dots, u_T)$ хозяйствующим субъектом, которое является решением задачи:

$$G(v, u, s) = \lambda F_1(s) + (1 - \lambda) F_2(v, u, s) \rightarrow \max, \\ \begin{cases} u_t \in U_t(v_t); & s_t = g(s_{t-1}, u_t), & t = 1, \dots, T, \\ s_0 = \tilde{s}. \end{cases} \quad (3)$$

Сформулированные общие математические задачи носят постановочный характер, отражающий реальное взаимодействие между управляющим центром СЭС региона и его хозяйствующими субъектами. В явном виде решение этих задач традиционными способами (в рамках теоретико-игрового подхода) представляет значительные вычис-



лительные сложности. Однако нами предлагается использовать эти задачи как основу построения механизмов согласования социальных и экономических показателей развития региона. Особенность таких механизмов состоит в том, что выбор типа регулирующего воздействия, сообщаемого центром и реализуемого им для конкретного хозяйствующего субъекта, осуществляется на основе значения параметра лояльности данного субъекта.

Параметр лояльности каждого хозяйствующего субъекта λ мы понимаем как показатель, характеризующий соответствие параметров деятельности хозяйствующего субъекта требованиям (задачам, установкам), формируемым управляющим центром СЭС региона [10]. Его значения варьируются в диапазоне от 0 до 1 — от полного несоответствия ($\lambda = 0$) до полного соответствия ($\lambda = 1$).

Для каждого хозяйствующего субъекта параметр лояльности λ определяется, исходя из соотношения:

$$\lambda = \min\{\lambda^c, \lambda^3\}, \quad (4)$$

где λ^c — интегральная оценка соответствия параметров муниципального образования, на территории которого функционирует градообразующий ХС, социальным требованиям администрации региона; λ^3 — интегральная оценка соответствия экономических показателей деятельности ХС экономическим требованиям администрации региона; $\lambda^c, \lambda^3 \in [0, 1]$.

Каждый компонент формулы (4) определен нами как интегральная оценка соответствия показателей объекта требованиям, поэтому и способы их расчета будут идентичны. В общем случае обозначим такую оценку через λ' , где $\lambda' \in \{\lambda^c, \lambda^3\}$.

Для построения интегральной оценки λ' будем считать, что известны $J, j = 1, \dots, J$, характеристик (частных показателей), на основе которых формируется эта оценка.

Введем в рассмотрение показатель λ_j , который назовем оценкой соответствия фактического значения j -го частного показателя предъявляемым к нему требованиям, $j = 1, \dots, J$. В целях его построения для каждой характеристики j считаем известными: z_j — фактическое значение j -й характеристики (например, коэффициента напряженности на рынке труда, среднемесячной номинальной заработной платы, уровня бедности и т. п.); z_j^* — требуемое значение j -го показателя такое, что соответствие требованию означает: $z_j \geq z_j^*$; $z_j^{\min}$ и $z_j^{\max}$ — соответственно минимальное и максимальное значения j -го показателя; $\mu_j = \frac{z_j - z_j^{\min}}{z_j^{\max} - z_j^{\min}}$ — нормиро-

ванное значение показателя; $\varepsilon_j = \frac{z_j^* - z_j^{\min}}{z_j^{\max} - z_j^{\min}}$ — нормированное значение требования к показателю, где $j = 1, \dots, J$.

Объективно каждая оценка соответствия λ_j должна обладать свойствами: $0 \leq \lambda_j \leq 1$ и λ_j не уменьшается с ростом значения частного показателя z_j (соответственно μ_j); она должна быть максимальной, т. е. равной единице, если требование к показателю предельно низкое ($\varepsilon_j = 0, \mu_j \geq 0$) или если показатель принимает максимальное значение ($\mu_j = 1$) независимо от требования (т. е. при $\varepsilon_j < 1$); она должна быть минимальной, т. е. равной нулю, если значение частного показателя не удовлетворяет требованию ($\mu_j < \varepsilon_j$) или же является предельно низким ($\mu_j = \varepsilon_j \neq 0$).

Перечисленным условиям удовлетворяет оценка следующего вида:

$$\lambda_j = 1 - \frac{\varepsilon_j(1 - \mu_j)}{\mu_j(1 - \varepsilon_j)} \text{ при } \mu_j \geq \varepsilon_j; \mu_j = \mu_j \neq 0, \varepsilon_j \neq 1. \quad (5)$$

Полагаем также, что $\lambda_j = 1$ при $\varepsilon_j = \mu_j = 0$ и $\lambda_j = 0$ при $\mu_j < \varepsilon_j$ или $\varepsilon_j = \mu_j = 1$.

Опираясь на формулу (5), интегральную оценку соответствия показателей объекта требованиям представим как зависимость $\lambda' = F(\lambda_1, \dots, \lambda_J)$. Должны выполняться условия: $\lambda' \in [0, 1]$; $\lambda' = 0$ тогда и только тогда, когда хотя бы один из показателей не соответствует предъявляемым к нему требованиям (т. е. $\exists \lambda_j = 0$); частные показатели могут иметь различные приоритеты; функция F монотонно возрастает по каждой переменной.

Приведенные условия позволяют представить интегральную оценку в мультипликативной форме:

$$\lambda' = \prod_{j=1}^J \lambda_j^{\alpha_j}, \quad (6)$$

где α_j — коэффициент приоритета j -го частного показателя ($\alpha_j \geq 0, \sum_{j=1}^J \alpha_j = 1$), отражающий значимость данного показателя с позиции администрации региона в соответствии со стратегическими целями социально-экономического развития.

3. МЕХАНИЗМЫ СОГЛАСОВАНИЯ СОЦИАЛЬНЫХ И ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РАЗВИТИЯ РЕГИОНА

Придерживаясь общего определения механизма, предложенного в работе [2], механизмы согласования социальных и экономических показателей развития будем рассматривать в контексте сово-

купности процедур, позволяющих управляющему центру СЭС региона:

- осуществить выбор типа регулирования конкретного ХС в целях обеспечения согласования социальных и экономических показателей развития;
- обеспечить поддержку реализации выбранного им режима согласования;
- определить значения параметров регулирования хозяйствующих субъектов, обеспечивающие согласование социальных показателей развития региона и экономических показателей их деятельности.

Разработанный нами комплекс механизмов согласования социальных и экономических показателей развития региона реализуется на основе совокупности алгоритмов:

- регулирования лояльности (λ -регулирования);
- обеспечения режимов согласования.

Механизм регулирования лояльности (λ -регулирования) разработан нами как процедура, позволяющая организовать выбор типов регулирования ХС в соответствии со значением параметра лояльности каждого из них и мотивирующая в перспективе к его повышению.

Конкретный тип регулирования предлагаем выбирать из их конечного перечня. В работах [11, 12] предложены типы регулирования:

- побуждение как влияние администрации региона, соответствующее изменению предпочтений субъекта управления ХС таким образом, что для него становится выгодной ориентация на достижение целей управляющего центра СЭС;
- принуждение, представляющее собой воздействие на допустимое множество альтернатив ХС путем введения сильных штрафов, установления дополнительных ограничений и т. п.;
- убеждение, заключающееся в построении такой системы взаимодействия администрации региона и руководителей ХС, когда последние самостоятельно решают региональные задачи.

В ходе исследования мы пришли к выводу о необходимости расширить данный перечень, включив в него такой тип регулирующего воздействия как поддержка, т. е. воздействие, направленное на

расширение допустимого множества альтернатив ХС посредством предложения стратегий, выгодных как ХС, так и региону.

Возможные комбинации типов регулирующих воздействий, соответствующие определенным значениям параметра лояльности ХС, представлены в табл. 1.

Практическая реализация каждого из приведенных типов регулирования основана на разработанном алгоритмическом и программном комплексе, позволяющем найти параметры регулирующего воздействия, обеспечивающего решение задачи согласования. Одним из составных элементов комплекса — алгоритм формирования регулирования на основе изменения ставки налога на прибыль. Речь идет об обоснованном снижении региональной составляющей ставки налога на прибыль в целях побуждения (мотивации) хозяйствующего субъекта на достижение требуемых значений экономических показателей развития.

Алгоритм формирования регулирования на основе изменения ставки налога на прибыль основывается на правиле «поощрения/наказания», рассмотренном в работе [8]. В случае выполнения требований администрации региона хозяйствующему субъекту гарантируется снижение ставки налога на прибыль. Размер такого снижения должен, с одной стороны, мотивировать ХС к поддержке решения социальных задач (достижение экономическими показателями области $\tilde{S}_t$, $\forall t = 1, \dots, T$), а с другой стороны — быть минимальным. Для описания шагов алгоритма сделаем дополнительные предположения.

- Прибыль ХС в каждый момент времени $t = 1, \dots, T$ как компонент функции цели ХС задачи (3), представим в форме: $\pi_t(\alpha_t, u_t, s_t) = (1 - \alpha_t) \times \tilde{\pi}(u_t, s_t)$, где $\tilde{\pi}(\cdot)$ — прибыль ХС в момент времени t без учета вычета налога на прибыль; α_t — ставка налога на прибыль ХС в момент времени t .

Функция цели задачи нижнего уровня (3) в этом случае будет иметь вид:

$$G(\alpha, u, s) = \lambda F_1(s) + (1 - \lambda) F_2(\alpha, u, s),$$

где $F_1(s) = -\frac{1}{TM} \sum_{t=1}^T \sum_{m=1}^M \left(\frac{s_{mt} - \tilde{s}_{mt}}{\tilde{s}_{mt}} \right)^2$, $F_2(\alpha, u, s) =$

$$= \frac{1}{\pi} \sum_{t=1}^T (1 - \alpha_t) \tilde{\pi}_t(u_t, s_t), \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_T).$$

- Минимальный размер ставки налога на прибыль ХС равен $\underline{\alpha}$; максимальный размер ставки налога на прибыль равен действующей в начальный момент времени, т. е. равен η .

Алгоритм 1. Формирование регулирования на основе изменения ставки налога на прибыль.

Таблица 1

Возможные комбинации регулирующих воздействий

$\lambda = 0$	$\lambda \in (0, 1)$	$\lambda = 1$
Побуждение и принуждение в форме организационных, кадровых решений и т. п.	Принуждение, побуждение, поддержка	Поддержка и убеждение в форме поощрения, тиражирования опыта и т. п.



Шаг 0. Задание начальных условий: нижней границы ставки налога $\underline{\alpha}$; константы $\varepsilon > 0$ — размера «поощрения» (возможно сколь угодно малого) за достижение экономическими показателями установленных значений.

Шаг 1. Вычисление оптимального результата G^* , который может обеспечить ХС при действующей (фиксированной в размере η) ставке налога на прибыль, как оптимального значения функции цели задачи:

$$G(\eta, u, s) = \lambda F_1(s) + (1 - \lambda) F_2(\eta, u, s) \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} u_t \in U_t; & s_t = g(s_{t-1}, u_t), & t = 1, \dots, T, \\ s_0 = \tilde{s}. \end{cases}$$

Шаг 2. Определение размера мотивирующей ставки налога на прибыль (т. е. поощрения) на основе решения оптимизационной задачи:

$$\sum_{t=1}^T \alpha_t \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} u_t \in U_t; & s_t = g(s_{t-1}, u_t), & t = 1, \dots, T, \\ \lambda F_1(s) + (1 - \lambda) F_2(\alpha, u, s) \geq G^* + \varepsilon, \\ s_0 = \tilde{s}, & s_t \in \tilde{S}_t, & t = 1, \dots, T, \\ \underline{\alpha} \leq \alpha_t \leq \eta, & t = 1, \dots, T. \end{cases}$$

Если задача не имеет решения — изменение начальных условий посредством допустимого уменьшения констант $\underline{\alpha}$ и ε , переход к шагу 1. Иначе — обозначим через $\alpha^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_T^*)$ — оптимальное решение задачи, переход к шагу 3.

Шаг 3. Управляющий центр СЭС региона устанавливает для хозяйствующего субъекта ставку налога на прибыль:

$$v_t = \begin{cases} \alpha_t^*, & s_t \in \tilde{S}_t, & t = 1, \dots, T. \text{ Останов.} \\ \eta, & s_t \notin \tilde{S}_t, \end{cases}$$

Для реализации регулирующего воздействия, в том числе и формируемого на основе алгоритма 1, управляющий центр СЭС должен определить режим согласования. Под режимом согласования мы понимаем порядок формирования регулирующих воздействий на рассматриваемом временном интервале, определяемый моментами времени их выработки (частотой) и длительностью того периода, на который они рассчитаны. Придерживаясь принятого подхода к классификации режимов управления динамическими организационными системами [13], будем выделять следующие типы режимов

согласования: текущий, программный и скользящий. В первом случае администрация региона выработывает регулирование в каждый момент времени t рассматриваемого временного интервала, которое реализуется только в данный момент. Во втором случае управляющий центр СЭС формирует управляющее воздействие до начала рассматриваемого периода на весь период $1, \dots, T$. В третьем случае временной интервал разбивается на промежутки, включающие в себя более одного момента времени, в начале каждого из которых принимается решение о регулирующем воздействии.

Следуя данному подходу, приведем алгоритм обеспечения программного режима в контексте решения задачи согласования социальных и экономических показателей развития региона.

Алгоритм 2. Обеспечение программного режима согласования

Шаг 0. Формирование «идеальных» значений экономических показателей хозяйствующего субъекта $\tilde{s}_t$ и области $\tilde{S}_t$ допустимых изменений значений экономических показателей ХС, $t = 1, \dots, T$.

Шаг 1. Рассчитываются значения экономических показателей деятельности ХС в предположении отсутствия регулирующего воздействия, направленного на согласование социальных и экономических показателей развития. Для этого решается задача:

$$G(u, s) = \lambda F_1(s) + (1 - \lambda) F_2(u, s) \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} u_t \in U_t, & s_t = g(s_0, u_t), & t = 1, \dots, T, \\ s_0 = \tilde{s}. \end{cases}$$

Обозначим через $u^* = (u_1^*, \dots, u_T^*)$; $s^* = (s_1^*, \dots, s_T^*)$ — решение задачи.

Шаг 2. Проверка принадлежности экономических показателей, полученных на шаге 2, области допустимых значений экономических показателей ХС: $s_t^* \in \tilde{S}_t, \forall t = 1, \dots, T$.

Шаг 3. Принятие решение о регулировании ХС в целях согласования социальных и экономических показателей развития на основе правила:

— если $s_t^* \in \tilde{S}_t$ для каждого $t = 1, \dots, T$, то регулирование не требуется;

— если хотя бы для одного $t, t = 1, \dots, T$, выполняется условие $s_t^* \notin \tilde{S}_t$, то формируется последовательность регулирующих воздействий $v = (v_1, \dots, v_T)$. *Останов.*

Заметим, что тип и параметры регулирующего воздействия, формируемого на шаге 3 алгоритма 2, определяются на основе рассмотренного ранее механизма λ -регулирования.

4. ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕХАНИЗМОВ СОГЛАСОВАНИЯ НА ПРИМЕРЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ РОССОШАНСКОГО РАЙОНА ВОРОНЕЖСКОЙ ОБЛАСТИ

Следуя логике нашего подхода, первоначально рассчитаем параметр лояльности рассматриваемого нами предприятия, которое обозначим как П1. В качестве частных показателей интегральной оценки соответствия параметров Россошанского района социальным требованиям λ^c выберем: 1) «кризисный» индекс качества жизни; 2) коэффициент напряженности на рынке труда; 3) среднемесячная номинальная заработная плата по району, руб.; 4) число зарегистрированных преступлений на 10 тыс. чел. населения. Через z_1^c , z_2^c , z_3^c и z_4^c обозначим соответствующие фактические значения приведенных показателей. Необходимые для расчета параметра лояльности минимальные и максимальные значения данных показателей обозначим как $(z_j^c)^{\min}$ и $(z_j^c)^{\max}$, а требуемые значения как $(z_j^c)^*$, $j = 1, \dots, 4$.

В качестве частных показателей интегральной оценки соответствия экономических показателей деятельности ХС экономическим требованиям выберем: 1) индекс среднесписочной численности работников, %; 2) размер среднемесячной номинальной заработной платы, руб.; 3) индекс среднемесячной номинальной заработной платы, %. Соответствующие им фактические значения обозначим через z_1^e , z_2^e и z_3^e . Минимальные и максимальные значения данных показателей обозначим

Таблица 2

Социальные показатели районов Воронежской области

№	Наименование района	z_1^c	z_2^c	z_3^c	z_4^c
1	Россошанский район	0,37	2,2	17 962	98,5
2	Семилукский район	0,29	2,5	13 578	104,8
3	Аннинский район	0,27	8,6	12 770	132,9
4	Бобровский район	0,21	2,7	13 050	125,3
	$(z_j^c)^{\min}$	0,21	2,2	12 770	98,5
	$(z_j^c)^{\max}$	0,37	8,6	17 962	132,9
	$(z_j^c)^*$	0,3	2,6	13 200	125
	z_j^c (для Россошанского района)	0,77	0,81	0,9	1

Таблица 3

Экономические показатели предприятий

№	Предприятие	z_1^e	z_2^e	z_3^e
1	П1	102,6	21 450	117,3
2	П2	100,1	26 600	101,9
3	П3	92,2	16 400	113,1
4	П4	123	18 800	134,7
5	П5	105,7	18 250	115,6
	$(z_p^e)^{\min}$	92,2	16 400	101,9
	$(z_p^e)^{\max}$	123	26 600	134,7
	$(z_p^e)^*$	100	17 000	105
	λ_p^e (для предприятия П1)	0,27	0,941	0,72

как $(z_p^e)^{\min}$ и $(z_p^e)^{\max}$, а требуемые значения как $(z_p^e)^*$, $p = 1, 2, 3$.

Социальные показатели четырех муниципальных образований Воронежской области, а также данные для расчета параметра λ^c , рассчитанные по формуле (5) включая частные оценки λ_j^c , представлены в табл. 2; экономические показатели пяти хозяйствующих субъектов (предприятий) Россошанского района. Данные для расчета интегральной оценки λ^e , включая частные оценки λ_p^e выбранного нами предприятия П1, представлены в табл. 3.

Приняв все частные показатели равнозначными, для Россошанского района по формуле (6) было рассчитано, что $\lambda^c = 0,77 \cdot 0,81 \cdot 0,9 \cdot 1 \approx 0,56$. Результаты расчета для предприятия П1: $\lambda^e = 0,27 \cdot 0,941 \cdot 0,72 \approx 0,19$. Коэффициент лояльности предприятия П1: $\lambda = \min\{\lambda^c, \lambda^e\} = \lambda^e = 0,19$.

Анализ статистических данных показал, что у рассматриваемого нами ХС достаточно низким остается индекс среднесписочной численности работников при достаточно хороших показателях номинальной заработной платы и ее индекса. В целях снижения показателя безработицы в районе, администрацией муниципального образования определена задача, заключающаяся в создании на данном предприятии 25 и 30 новых рабочих мест соответственно в последующих двух моментах времени (годах) $t = 1$ и $t = 2$.

В соответствии с механизмом регулирования лояльности для данного предприятия рекомендовано принуждение или побуждение. Администрацией муниципального образования выбран метод

побуждения, а инструментом регулирования выбран налог на прибыль. Для практической реализации предложенного в работе алгоритма формирования регулирования на основе изменения ставки налога на прибыль (алгоритма 1) возникла объективная необходимость в конкретизации задачи нижнего уровня (3) для выбранного ХС.

Разработана следующая задача субъекта управления экономической системы:

$$G = \lambda \left[-\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{L_t - \tilde{L}_t}{\tilde{L}_t} \right)^2 \right] + (1 - \lambda) \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (1 - \eta) \pi_t \right] \rightarrow \max_{\{\delta_t, v_t, \chi_t\}} \quad (7)$$

при ограничениях:

$$\text{I)} \begin{cases} L_t = L_{t-1} + \Delta L_t, \\ \Delta L_t \leq \tilde{N}_t, \quad L_t \geq \underline{L}_t, \\ \Delta L_t = \frac{v_t \Phi_t}{\omega'_t}, \quad t = 1, \dots, T; \end{cases}$$

$$\text{II)} \begin{cases} y_t = \chi_t f(K_t, \omega L_t), \\ Q_t \leq y_t \leq \bar{Q}_t, \quad t = 1, \dots, T; \end{cases}$$

$$\text{III)} \begin{cases} \Phi_t = \Phi_t^c + \Phi_t^b, \quad t = 1, \dots, T, \\ \Phi_t^c = \Phi_{t-1}^c - (\delta_{t-1} + v_{t-1}) \Phi_{t-1}^c + (1 - \eta) \pi_{t-1}, \\ t = 2, \dots, T, \\ \Phi_t^b = \Phi_{t-1}^b - (\delta_{t-1} + v_{t-1}) \Phi_{t-1}^b + \Delta \Phi_t^b, \\ t = 2, \dots, T; \end{cases}$$

$$\text{IV)} \begin{cases} \pi_t = y_t - \left(\sum_{r=1}^R b_r y_t + \frac{1}{1-\rho} \omega L_t + \gamma K_t \right), \quad \pi_t \geq \underline{\pi}_t, \\ K_t = (1 - \gamma) K_{t-1} + \delta_t \Phi_t, \quad t = 1, \dots, T; \end{cases}$$

$$\text{V)} 0 \leq \underline{\delta}_t \leq \delta_t \leq \bar{\delta}_t \leq 1, \quad 0 \leq \underline{v}_t \leq v_t \leq \bar{v}_t \leq 1, \\ \delta_t + v_t \leq 1, \quad \chi_t \in [0, 1];$$

$$\text{VI)} K_0 = \tilde{K}, \quad L_0 = \tilde{L}, \quad \Phi_1^c = \tilde{\Phi}^c, \quad \Phi_1^b = \tilde{\Phi}^b.$$

Ограничения задачи (7) скомпонованы в смысловые блоки: блок I описывает изменение численности занятых на предприятии благодаря созданию новых рабочих мест; блок II связан с объемом выпуска; блок III отражает изменения финансовых средств; блок IV связан с формированием прибыли и изменением основного капитала; блок V — ограничения на переменные модели δ_t , v_t и χ_t ; блок VI — начальные условия.

В задаче (7) приняты обозначения: 1, ..., T — рассматриваемый временной интервал, t — момент времени, $t = 1, \dots, T$; λ — параметр лояльности ХС; L_t — трудовые ресурсы ХС в момент времени t; $\tilde{L}_t$ — установленное администрацией муниципального образования (в соответствии с социальными задачами) число рабочих мест в ХС в момент времени t; ΔL_t — число создаваемых рабочих мест

в момент времени t; $\tilde{N}_t$ — численность незанятого трудоспособного населения региона, допускающего трудоустройство в ХС; $\underline{L}_t$ — минимальное количество трудовых ресурсов ХС в момент времени t; y_t — объем валового выпуска ХС в момент времени t; K_t — объем основного капитала ХС в момент t; ω — размер средней за период номинальной заработной платы; $f(\cdot)$ — производственная функция ХС; Q_t , $\bar{Q}_t$ — границы прогнозируемого спроса на продукцию ХС в момент времени t; χ_t — коэффициент интенсивности использования производственных возможностей ХС; Φ_t — фонд развития производства ХС в момент времени t, формируемый из собственных средств Φ_t^c и средств внешних источников Φ_t^b (за счет поступлений $\Delta \Phi_t^b$); δ_t — доля финансовых средств, расходуемая на увеличение основного капитала; $\underline{\delta}_t$ и $\bar{\delta}_t$ — соответственно нижняя и верхняя границы допустимого изменения доли δ_t ; v_t — доля средств, выделяемая на создание новых рабочих мест, в том числе увеличение фонда оплаты труда; $\underline{v}_t$ и $\bar{v}_t$ — соответственно нижняя и верхняя границы допустимого изменения доли v_t ; η — текущая ставка налога на прибыль; π_t — размер прибыли ХС в момент t, $\underline{\pi}_t$ — нижняя граница допустимой прибыли; ρ — доля социальных отчислений из фонда оплаты труда; b_r — коэффициент затрат r-го вида материального ресурса на единицу выпускаемой продукции, $r = 1, \dots, R$, где R — количество материальных ресурсов; γ — норма амортизации основного капитала (основных фондов); ω'_t — средние затраты ХС на создание одного рабочего места в момент времени t; $\tilde{K}$, $\tilde{L}$, $\tilde{\Phi}^c$, $\tilde{\Phi}^b$ — начальные значения (в момент времени $t = 0$) соответствующих показателей.

Модель (7) конкретизирована на основе данных статистической и бухгалтерской отчетности за период 1996—2013 гг. и практически реализована методом Соболя [14] как задача скалярной оптимизации с выпуклой функцией цели и нелинейной системой ограничений. Программные расчеты по-

казали, что при условиях, когда в начальный момент времени численность работников предприятия составляла $\tilde{L} = 305$ чел., а регулирующее воздействие со стороны администрации региона отсутствует, этот показатель составит $L_1^* = 332$ чел. ($t = 1$) и $L_2^* = 351$ чел. ($t = 2$).

Реализация механизма программного режима согласования показала, что в момент времени $t = 1$ изменение ставки налога на прибыль не требуется, а в момент $t = 2$ необходимо. Алгоритм формирования регулирования на основе изменения ставки налога на прибыль позволил получить следующие результаты: снижение региональной составляющей ставки налога на прибыль ХС в момент времени $t = 2$ с $\eta = 18\%$ до $\alpha^* = 14,6\%$ мотивирует предприятие к созданию требуемого числа рабочих мест (в этом случае расчетное значение численности трудовых ресурсов L_2^* составило 363 чел.).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный подход к решению актуальной проблемы регионального развития — достижение высокого качества жизни — основан на понимании необходимости целенаправленного воздействия на хозяйствующие субъекты региона, мотивирующего их на достижение таких показателей экономической деятельности, которые обеспечат требуемые значения социальных показателей развития региона. В этих целях сформулирована общая математическая задача согласования социальных и экономических показателей развития, позволившая теоретически обосновать механизмы согласования. Отличительная особенность предложенного подхода заключается в учете заинтересованности хозяйствующих субъектов не только в реализации сугубо экономических целей (прежде всего, максимизации прибыли), но и в улучшении качества жизни населения региона, на территории которого они осуществляют свою деятельность. Это свойство заинтересованности обозначено как лояльность, а в качестве его количественной оценки принят особый показатель — параметр лояльности, способы расчета которого представлены в настоящей работе. Сформированные механизмы согласования показателей, включающие в себя алгоритмы регулирования лояльности и алгоритмы обеспечения режимов согласования, позволяют обеспечить поддержку принятия решений по регулированию экономической деятельности хозяйствующих субъектов в целях достижения требуемых значений социальных показателей. Внедрение разработанных механизмов и алгоритмов в практику

управления позволило не только обосновать применение тех или иных форм и методов регулирования, рассчитать конкретные значения параметров регулирующих воздействий, но и определило направления дальнейшего развития предлагаемого подхода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багриновский К.А. Основы согласования плановых решений. — М.: Наука, 1977. — 304 с.
2. Новиков Д.А. Теория управления организационными системами. — М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 2007. — 584 с.
3. Бурков В.Н., Кузнецов В.Н., Павлов В.А. Согласованная оптимизация в расплывчатых условиях // Теория активных систем: Тр. междунар. науч.-практ. конф. (17–19 ноября 2009 г., Москва), 2009. — Т. 1. — С. 55–58.
4. Гераськин М.И. Согласование интересов в корпоративных структурах. — М.: ИПУ РАН; Анко, 2005. — 293 с.
5. Бондаренко Ю.В., Горошко И.В. Особенности регулирования процессов самоорганизации социально-экономической системы региона // Системы управления и информационные технологии. — 2013. — № 1.1 (51). — С. 231–236.
6. Бондаренко Ю.В. Математические основы поддержки согласованного управления социально-экономической системой региона // Современная экономика: проблемы и решения. — 2012. — № 3 (27). — С. 148–161.
7. Бондаренко Ю.В., Горошко И.В., Горошко Э.Г. Согласование интересов социальной и экономической систем региона // Стратегическое планирование и управление предприятием: Материалы Тринадцатого всеросс. симпозиума. Москва, 10–11 апреля 2012 г. — М., 2012. — С. 58–60.
8. Бондаренко Ю.В. Об одном подходе к регулированию социально-экономической системы региона // Системы управления и информационные технологии. — 2012. — № 3.1 (48). — С. 120–123.
9. Конституция Российской Федерации // Рос. газ. — 2009. — 21 янв.
10. Бондаренко Ю.В. Математические модели и методы поддержки принятия решений по регулированию процессов самоорганизации социально-экономической системы региона: Монография. — Воронеж: Научная книга, 2013. — 200 с.
11. Угольников Г.А. Иерархическое управление устойчивым развитием. — М.: Изд-во физ.-мат. литературы, 2010. — 336 с.
12. Фатхутдинов Р., Сивкова Л. Принуждение, побуждение, убеждение: новый подход к методам управления // Управление персоналом. — 1999. — № 2. — С. 32–40.
13. Новиков Д.А., Смирнов И.М., Шохина Т.Е. Механизмы управления динамическими активными системами. — М.: ИПУ РАН, 2002. — 124 с.
14. Соболев И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. — М.: Дрофа, 2006. — 175 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. РАН Д.А. Новиковым.

Горошко Игорь Владимирович — д-р техн. наук, начальник кафедры, Академия управления МВД России, г. Москва, ☎ (499) 150-16-93, ✉ garrygo@mail.ru,

Бондаренко Юлия Валентиновна — д-р техн. наук, доцент, Воронежский государственный университет, ☎ (473) 220-82-82, ✉ bond.julia@mail.ru.



МОДЕЛЬ СТИМУЛИРОВАНИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ РИСКАМИ В СИСТЕМЕ ПРОМЫШЛЕННЫХ ПРЕДПРИЯТИЙ

Е.П. Ростова

Разработана модель управления рисками системы промышленных предприятий-агентов, действующих под управлением центра. Рассмотрены варианты функционирования системы с учетом стимулирования согласованного взаимодействия центра и агентов и без стимулирования. Отмечено, что для некоторого вида функций модель апробирована.

Ключевые слова: управление рисками, центр, агенты, система предприятий, промышленные риски.

ВВЕДЕНИЕ

Управление техническими рисками, причиной которых стала хозяйственная деятельность человека, представляет собой важнейшую задачу, стоящую перед современным российским предпринимательством. По данным МЧС России [1] за период с 2002 по 2013 г. произошло более 12 700 катастроф техногенного характера, более 2300 природного и 440 биолого-социального характера. На протяжении 12-ти лет катастрофы техногенного характера доминируют и в процентном отношении ежегодно составляют не менее 50 % от общего числа катастроф. В техногенных катастрофах ежегодно страдает около 1000 чел. и гибнет более 500 чел.

Отметим, что вследствие последних изменений в нормативно-правовой базе по регулированию промышленной безопасности, особенно Федерального закона «О промышленной безопасности опасных производственных объектов» [2] в различных редакциях, Ростехнадзор ослабляет механизмы контроля за промышленной безопасностью, перенося ответственность на организации, эксплуатирующие опасные производственные объекты.

Создание надежной системы промышленной безопасности должно основываться на методах организации производственных процессов, ориентированных на снижение риска как со стороны уменьшения вероятности аварийных событий, так и со стороны уменьшения ущерба от последствий чрезвычайных ситуаций.

В отечественной и зарубежной литературе характерно разделение источников на те, в которых

рассматриваются проблемы оценки риска с технической точки зрения в тесной связи с особенностями конкретной отрасли [3—7] и те, в которых рассматривается риск как экономическая категория в общем, с позиций риск-менеджмента [8—14]. Однако в последнее время появляются работы, в которых рассматриваются вопросы технической безопасности с учетом эффективности решений, принятых с позиций организации производственного процесса [3, 15, 16 и др.]. При управлении рисками предприятия или промышленной системы следует рассматривать эту проблему комплексно с учетом интересов всех элементов системы, опираясь на механизмы согласованного взаимодействия и стимулирования, подробно описанные в работах [17—23].

Вместе с тем не получила должного решения проблема управления техническими рисками на предприятиях промышленного комплекса. При решении данной проблемы следует руководствоваться принципами оптимизации согласованного взаимодействия для всей системы в целом, учитывая при этом результаты каждого элемента, рассматривая воздействие центра на деятельность агентов с помощью стимулирующих и управляющих механизмов.

1. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ

Рассмотрим проблему промышленной безопасности для системы, включающей в себя агентов и центр, управляющий ими. Примерами подобной системы могут быть группа предприятий, объеди-

ненных единым руководством либо подразделения (цеха, участки, объекты) внутри предприятия, подчиненные руководству предприятия. На региональном уровне в качестве центра может выступать контролирующий орган, агентами будут промышленные предприятия региона. В зависимости от постановки задачи характеристики элементов будут меняться, но принцип постановки проблемы позволит решить ее как для региона и промышленного комплекса, так и для предприятия.

Поскольку далее будет рассмотрена задача управления рисками, отдельно остановимся на терминологии. Под риском будем понимать возможность неблагоприятного события, вследствие которого предприятие понесет убытки. Показателем риска выступает вероятность осуществления неблагоприятного события (остановка или сбой производственных процессов, авария, катастрофа). Под уровнем риска будем понимать значение показателя риска. Управление риском подразумевает комплекс мероприятий, направленных на снижение тяжести последствий неблагоприятных событий.

Рассмотрим систему, в которой взаимодействуют центр и агенты, подчиняющиеся центру. Центр формирует некоторые плановые значения показателей деятельности агентов, которых они могут либо достигнуть, либо не достигнуть. В условиях решения задачи управления рисками такими показателями могут быть уровни риска. Тогда p_i^0 — плановое значение показателя риска i -го агента, p_i — фактическое значение показателя риска i -го агента будут характеризовать состояние агента. Для каждого агента эти показатели могут принимать значения из некоторого множества допустимых значений Ω_i : $p_i^0 \in \Omega_i$, $p_i \in \Omega_i$. Целевая функция агента $\pi_i(p_i)$ характеризует итоговые показатели его деятельности. Поскольку в систему входят n агентов, то для каждого из них существуют свои значения описанных показателей. Тогда $p^0 = (p_1^0, p_2^0, \dots, p_n^0)$ — вектор плановых значений состояний агентов системы, определяемый центром, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ — вектор фактических значений состояний агентов системы. Множество допустимых значений плановых и фактических показателей риска агентов Ω : $p^0 \in \Omega$, $p \in \Omega$. Аналогично для вектора значений целевых функций агентов: $\pi(p) = (\pi_1(p_1), \pi_2(p_2), \dots, \pi_n(p_n))$.

Агенты могут достичь оптимальных (как правило, максимальных) значений целевых функций

$\pi_i^*(p_i)$. Те значения риска агента, при которых достигается максимум целевой функции агента, обозначим p_i^* :

$$p_i^*(\pi_i) = \arg \max_{p_i \in \Omega_i} \pi_i(p_i).$$

Тогда вектор оптимальных состояний системы $p^*(\pi) = (p_1^*(\pi_1), p_2^*(\pi_2), \dots, p_n^*(\pi_n))$; Ω^* — множество оптимальных значений состояний агентов, т. е. множество возможных значений векторов $p^*(\pi)$, при которых целевые функции агентов достигают максимальных значений.

Опишем функции и переменные, обозначающие состояние центра. Целевая функция центра $\Pi(p^0)$ зависит от плановых значений уровня риска всех агентов системы. Максимальное значение целевой функции $\Pi^*(p^0) = \arg \max_{p^0 \in \Omega} \Pi(p^0)$ достигается при значении аргумента $p^{0*} = \arg \max_{p^0 \in \Omega} \Pi(p^0)$, принадле-

жащем множеству оптимальных планов системы в целом $p^{0*} \in \Omega^{0*}$. Однако далеко не всегда агенты выполняют нормативы центра p^0 . В силу введенного обозначения, $\forall i \exists p_i^* | \pi_i(p_i^*) = \max_{p_i \in \Omega_i} \pi_i(p_i)$, сле-

довательно, это состояние p_i^* наиболее выгодное для i -го агента. Аналогично для всех агентов системы целесообразно придерживаться вектора оптимальных состояний p^* . Значение целевой функции центра на множестве оптимальных состояний агентов $\Pi(p^*)$. Поскольку возможно существование хотя бы одного значения $p_i^* \neq p_i^{0*}$, то $\Pi^*(p^0) \neq \Pi(p^*)$. Разность между максимальным значением целевой функции центра и ее значением при оптимальных состояниях агентов запишем как

$$\Delta \Pi^*(p^0) = \Pi^*(p^0) - \Pi(p^*).$$

Если $\Delta \Pi^*(p^0) > 0$, то значение целевой функции центра при соблюдении плановых значений центра p^0 всеми агентами превосходит ее значение на множестве оптимальных значений агентов p^* .

Если $\Delta \Pi^*(p^0) = 0$, то вектор оптимальных состояний агентов p^* совпадает с плановыми нормативами центра p^0 . Эта ситуация идеальна для системы, поскольку в данном случае интересы центра и агентов совпадают.

Вариант $\Delta \Pi^*(p^0) < 0$ не рассматривается, поскольку по определению $\Pi^*(p^0)$ — максимальное значение целевой функции центра.



Таким образом, разность $\Delta\P^*(p^0)$ показывает потери, которые несет центр в связи с несоблюдением агентами системы плановых состояний.

2. МОДЕЛЬ ВОЗДЕЙСТВИЯ ЦЕНТРА НА АГЕНТОВ ПО УПРАВЛЕНИЮ РИСКАМИ СИСТЕМЫ

Максимальное значение целевой функции агента $\pi_i(p_i^*) = \pi_i^*$ не всегда достигается при плановых значениях центра. Потери агента, обусловленные выполнением плана центра p_i^0 , обозначим

$$\Delta\pi_i^*(p_i^0) = \pi_i^* - \pi_i(p_i^0). \quad (1)$$

Как упоминалось, нормативные значения центра p_i^0 и оптимальное значение p_i^* , при котором достигается максимум целевой функции, не всегда совпадают. Агент, стремясь максимизировать свою целевую функцию, может отступить от плановых значений центра. Центр, в свою очередь, с целью заинтересовать агентов соблюдать нормативные значения p_i^0 , применяет функцию стимулирования агентов. Здесь под стимулированием будем понимать систему поощрений и штрафов со стороны центра. Поскольку агенты заинтересованы в получении дополнительных средств от центра в виде премий и поощрений и не заинтересованы в наложении на них штрафов, центр может использовать эти мотивы в качестве стимула к достижению агентами нормативных значений p_i^0 , т. е. в качестве функции стимулирования. Значение функции стимулирования зависит от планового и фактического состояний агента: $r_i(p_i, p_i^0)$. Стимулирование $r_i(p_i, p_i^0)$ принадлежит множеству возможных функций R : $r_i(p_i, p_i^0) \in R$. Вектор функций стимулирования системы имеет вид: $r(p, p^0) = (r_1(p_1, p_1^0), r_2(p_2, p_2^0), \dots, r_n(p_n, p_n^0))$. R — множество видов вектора функций стимулирования: $r(p, p^0) \in R$. Стимулирование $r(p, p^0)$ призвано заинтересовать агентов в изменении своей стратегии с целью соблюдения нормативов центра p^0 . Обозначим изменение целевой функции агента, обусловленное стимулированием $\Delta\pi_i(r_i, p_i, p_i^0)$. Тогда новое значение целевой функции агента в связи с изменением $\Delta\pi_i(r_i, p_i, p_i^0)$

$$\pi_i(r_i, p_i, p_i^0) = \pi_i(p_i) + \Delta\pi_i(r_i, p_i, p_i^0). \quad (2)$$

Новое значение целевой функции центра с учетом стимулирования агентов

$$\Pi(r, p, p^0) = \Pi(p^0) + \Delta\P(r, p, p^0), \quad (3)$$

где $\Delta\P(r, p, p^0)$ — изменение целевой функции центра, обусловленное стимулированием агентов.

Центр стремится выбрать плановые значения показателей риска элементов p^0 из множества оптимальных планов системы в целом: $p^0 \in \Omega^{0*} \subseteq \Omega$. Кроме плановых значений риска, центр воздействует на агентов с помощью системы стимулирования $Q(p^0, \pi)$: $Q(p^0, \pi) = (Q_1(p_1^0, \pi_1), Q_2(p_2^0, \pi_2), \dots, Q_n(p_n^0, \pi_n))$. Для того чтобы агенты были заинтересованы в выполнении нормативных значений p_i^0 , планируемых центром, центр должен выбирать p^0 из следующего условия: изменение целевой функции агентов при стимулировании $\Delta\pi_i(r_i, p_i, p_i^0)$ должно быть не больше, чем изменение их целевых функций $\Delta\pi_i^*(p_i^0)$, обусловленное стремлением выполнить плановые значения p^0 центра, т. е. для агентов должно быть выгодно следовать указаниям центра. Описать это условие можно следующим образом:

$$Q_i(p_i^0, \pi_i) = \{r_i(p_i, p_i^0) \in R_i \mid \forall p_i \in \Omega_i,$$

$$\Delta\pi_i(r_i, p_i, p_i^0) \leq \Delta\pi_i^*(p_i^0)\} \text{ для } p^0 \in \Omega^{0*} \subseteq \Omega.$$

Аналогично для центра требуется, чтобы изменение его целевой функции $\Delta\P(r, p, p^0)$ при взаимодействии с агентами и применении функции стимулирования было не меньше, чем его потери $\Delta\P^*(p^0)$ при достижении агентами оптимальных состояний: $\Delta\P(r, p, p^0) \geq \Delta\P^*(p^0)$.

Поясним последнее условие. Изменение целевой функции центра при стимулировании $\Delta\P(r, p, p^0)$ включает в себя не только сумму значений функций стимулирования отдельных агентов $r_i(p_i, p_i^0)$. В результате воздействия со стороны центра изменение результатов производственной деятельности агентов отражается также и на результатах деятельности самого центра. Таким образом, центр, применяя функцию стимулирования агентов, получает не только сумму штрафов или премий, но и возможные изменения объемов производства, качества продукции, ее себестоимости и т. д. Рассматривать подробно различные аспекты производственной деятельности, изменившиеся в зависимости от уровня риска предприятия, в данной статье нецелесообразно, поскольку отвлекает от ос-

новой проблематики и излишне усложняет модель. Суть рассматриваемого неравенства в том, что центру должно быть выгодно стимулирование агентов к согласованному взаимодействию. Иными словами, центр должен больше заработать со стимулированием, чем без него. Запишем это условие:

$$Q(p^0, \pi) = \{r(p, p^0) \in R \mid \forall p \in \Omega, \\ \Delta\Pi(r, p, p^0) \geq \Delta\Pi^*(p^0)\} \text{ для } p^0 \in \Omega^{0*} \subseteq \Omega.$$

Для того, чтобы реализация взаимодействия по достижению плановых значений показателя риска p^0 была выгодна как центру, так и агентам, необходимо, чтобы множество оптимальных планов центра пересекалось с множеством оптимальных значений показателя риска агентов: $\Omega^{0*} \cap \Omega^* \neq \emptyset$.

Таким образом, задача центра состоит в том, чтобы подобрать такое стимулирование агентов, при котором будут выполняться условия:

$$\exists r(p, p^0) \in Q(p^0, \pi), p^0 \in (\Omega^{0*} \cap \Omega^*) \mid \forall p \in \Omega \\ \Delta\pi_i(r_i, p_i, p_i^0) \leq \Delta\pi_i^*(p_i^0) \quad i = \overline{1, n} \\ \text{и } \Delta\Pi(r, p, p^0) \geq \Delta\Pi^*(p^0).$$

В данном условии объединяются требования к системе стимулирования со стороны центра и со стороны агентов, при этом множество возможных решений находится в пересечении множеств оптимальных планов, что позволяет учесть интересы центра, и множества оптимальных состояний агентов, что позволяет учитывать интересы агентов. Агенты должны организовывать свою деятельность таким образом, чтобы их уровень риска отвечал требованиям центра, при этом их затраты, вызванные достижением данной цели могут быть покрыты за счет стимулирования от центра. Центр в свою очередь формирует плановые значения риска агентов и выбирает функции стимулирования таким образом, чтобы агенты были заинтересованы в согласованном взаимодействии с центром, а затраты центра на организацию данного взаимодействия были оправданы благодаря снижению риска системы в целом. Затраты на управление рисками могут окупиться из-за снижения вероятности наступления нештатной ситуации и размера ущерба от нее.

Центр и агенты стремятся максимизировать свои целевые функции, но максимизация происходит в системе с учетом согласованного взаимодействия, т. е. максимизация целевых функций участников системы реализуется на множестве возможных значений, учитывающих интересы всех участников. Таким образом, целевая функция центра

$$\Pi(r, p, p^0) \rightarrow \max,$$

целевая функция агента

$$\pi_i(r_i, p_i, p_i^0) \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$r(p, p^0) \in Q(p^0, \pi), \\ p^0 \in \Omega^{0*} \cap \Omega^*,$$

$$\Delta\pi_i(r_i, p_i, p_i^0) \leq \Delta\pi_i^*(p_i^0), \quad i = \overline{1, n},$$

$$\Delta\Pi(r, p, p^0) \geq \Delta\Pi^*(p^0).$$

3. АПРОБАЦИЯ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИ УПРАВЛЕНИИ РИСКАМИ

Для апробации предложенной модели рассмотрим систему из трех агентов и центра. Фактические значения показателей риска агентов $p = (p_1, p_2, p_3)$. Плановые значения показателей риска для агентов составляют вектор $p^0 = (p_1^0, p_2^0, p_3^0)$. Целевые функции агентов $\pi_i(p_i)$ зададим в виде квадратичных зависимостей:

$$\pi_1(p_1) = 100 - 20(p_1 - 0,12)^2,$$

$$\pi_2(p_2) = 120 - 18(p_2 - 0,23)^2,$$

$$\pi_3(p_3) = 150 - 14(p_3 - 0,19)^2.$$

Агенты достигают максимальных значений целевых функций $\pi_1^* = 100$, $\pi_2^* = 120$, $\pi_3^* = 150$, при значениях соответственно $p_1^* = 0,12$, $p_2^* = 0,23$, $p_3^* = 0,19$. Тогда вектор оптимальных состояний системы $p^* = (0,12; 0,23; 0,19)$. Согласно формуле (1) потери агентов, обусловленные выполнением плана центра p^0 ,

$$\Delta\pi_1^*(p_1^0) = \pi_1^* - \pi_1(p_1^0) = 20(p_1^0 - 0,12)^2,$$

$$\Delta\pi_2^*(p_2^0) = \pi_2^* - \pi_2(p_2^0) = 18(p_2^0 - 0,23)^2,$$

$$\Delta\pi_3^*(p_3^0) = \pi_3^* - \pi_3(p_3^0) = 14(p_3^0 - 0,19)^2.$$

Рассмотрим линейные функции стимулирования, зависящие от планового и фактического состояний агентов:

$$r_1(p_1, p_1^0) = \delta_1(p_1^0 - p_1),$$

$$r_2(p_2, p_2^0) = \delta_2(p_2^0 - p_2),$$

$$r_3(p_3, p_3^0) = \delta_3(p_3^0 - p_3).$$

Здесь δ_i — параметр, позволяющий перевести безразмерную единицу измерения вероятности осуществления неблагоприятной ситуации в денежную



единицу измерения функции стимулирования r_i . Отметим, что параметр $\delta_i > 0$ и определяет размер штрафа или премии. Если $p_i^0 > p_i$, т. е. фактический уровень риска p_i i -го агента меньше планового p_i^0 , то функция стимулирования становится функцией поощрения $r_i(p_i, p_i^0) > 0$. В противном случае, при высоком фактическом уровне риска p_i i -го агента, т. е. при $p_i^0 < p_i$, функция стимулирования принимает отрицательное значение $r_i(p_i, p_i^0) < 0$ и становится функцией штрафа. В данном примере рассматривается линейная функция стимулирования $r_i(p_i, p_i^0)$, что является лишь частностью, поскольку функции стимулирования могут иметь различный вид, выражаться различными функциональными зависимостями.

Изменения целевых функций агентов, обусловленные стимулированием, имеют вид:

$$\Delta\pi_1(\delta_1, p_1, p_1^0) = 1,2 \delta_1 (p_1^0 - p_1),$$

$$\Delta\pi_2(\delta_2, p_2, p_2^0) = 0,9 \delta_2 (p_2^0 - p_2),$$

$$\Delta\pi_3(\delta_3, p_3, p_3^0) = 1,1 \delta_3 (p_3^0 - p_3).$$

Тогда новые значения целевых функций агентов (2) в связи с изменениями $\Delta\pi_i(\delta_i, p_i, p_i^0)$

$$\begin{aligned} \pi_1(\delta_1, p_1, p_1^0) &= \pi_1(p_1) + \Delta\pi_1(\delta_1, p_1, p_1^0) = \\ &= 100 - 20(p_1 - 0,12)^2 + 1,2 \delta_1 (p_1^0 - p_1), \\ \pi_2(\delta_2, p_2, p_2^0) &= \pi_2(p_2) + \Delta\pi_2(\delta_2, p_2, p_2^0) = \\ &= 120 - 18(p_2 - 0,23)^2 + 0,9 \delta_2 (p_2^0 - p_2), \quad (4) \\ \pi_3(\delta_3, p_3, p_3^0) &= \pi_3(p_3) + \Delta\pi_3(\delta_3, p_3, p_3^0) = \\ &= 150 - 14(p_3 - 0,19)^2 + 1,1 \delta_3 (p_3^0 - p_3). \end{aligned}$$

Целевая функция центра $\Pi(p^0)$ зависит от плановых значений показателей риска всех агентов системы: $\Pi(p^0) = 305 - 16(p_1^0 - 0,1)^2 - 15,3(p_2^0 - 0,2)^2 - 11,5(p_3^0 - 0,15)^2$. Новое значение целевой функции центра (3) с учетом стимулирования агентов

$$\begin{aligned} \Pi(\delta, p, p^0) &= \Pi(p^0) + \Delta\Pi(\delta, p, p^0) = \\ &= 305 - 16(p_1^0 - 0,1)^2 - 15,3(p_2^0 - 0,2)^2 - \\ &\quad - 11,5(p_3^0 - 0,15)^2 + \delta_1(p_1^0 - p_1) + \\ &\quad + \delta_2(p_2^0 - p_2) + \delta_3(p_3^0 - p_3). \quad (5) \end{aligned}$$

Отметим, что постоянные величины в функциях выбраны произвольно и показывают общий вид рассматриваемых закономерностей.

Допустим, центру требуется определить плановые показатели риска p^0 , при которых целевая функция центра $\Pi(\delta, p, p^0)$ принимала бы максимальное значение. Поскольку в данном примере изменение целевой функции центра $\Delta\Pi(\delta, p, p^0)$ представлено в виде суммы стимулирующих воздействий на агентов, то для центра выгодно достичь согласованного взаимодействия при минимальных затратах. Кроме интересов центра, также следует учесть интересы агентов, поскольку агенты со своей стороны поддержат условия центра и будут стремиться к их выполнению, если это приведет к увеличению значения их целевых функций.

Для целевых функций агентов $\pi_i(\delta_i, p_i, p_i^0)$ определим фактические уровни риска, при которых они достигают максимума.

Запишем систему уравнений, которая позволит выполнить перечисленные требования, $i = 1, 2, 3$:

$$\frac{\partial \Pi(\delta, p, p^0)}{\partial p_i^0} = 0, \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi(\delta, p, p^0)}{\partial (p_i^0)^2} \right|_{p_i^0 = p_i^{0*}} < 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Delta\Pi(\delta, p, p^0)}{\partial \delta_i} = 0, \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Delta\Pi(\delta, p, p^0)}{\partial \delta_i^2} \right|_{\delta_i = \delta_i^*} > 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \pi_i(\delta_i, p_i, p_i^0)}{\partial p_i} = 0, \quad (10)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \pi_i(\delta_i, p_i, p_i^0)}{\partial p_i^2} \right|_{p_i = p_i^*} < 0. \quad (11)$$

Поясним записанные условия. Уравнения (6), (8) и (10) отвечают необходимому условию экстремума функции нескольких переменных для функций $\Pi(\delta, p, p^0)$, $\Delta\Pi(\delta, p, p^0)$ и $\pi_i(\delta_i, p_i, p_i^0)$ соответственно и позволяют определить стационарные точки. Неравенства (7), (9) и (11) обеспечивают выполнение второго достаточного условия экстремума функции нескольких переменных в стационарных точках, а именно, условие максимума для функций $\Pi(\delta, p, p^0)$ (7) и $\pi_i(\delta_i, p_i, p_i^0)$ (11) и минимума

для функции $\Delta\P(\delta, p, p^0)$ (9). Записанные условия (6)—(11) позволяют определить значения плановых показателей риска, при которых целевая функция центра достигает максимального значения при минимальных затратах на стимулирование агентов.

Решим систему уравнений (6)—(11) и определим значения векторов p, p^0 и коэффициентов δ_i :

$$\frac{\partial \Pi(\delta, p, p^0)}{\partial p_1^0} = -32(p_1^0 - 0,1) + \delta_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi(\delta, p, p^0)}{\partial p_2^0} = -30,6(p_2^0 - 0,2) + \delta_2 = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi(\delta, p, p^0)}{\partial p_3^0} = -23(p_3^0 - 0,15) + \delta_3 = 0.$$

Тогда стационарные точки функции $\Pi(\delta, p, p^0)$

$$p_1^{0*} = 0,1 + \delta_1/32, \quad p_2^{0*} = 0,2 + \delta_2/30,6, \\ p_3^{0*} = 0,15 + \delta_3/23. \quad (12)$$

Проверим выполнение второго достаточного условия экстремума функции $\Pi(\delta, p, p^0)$ в стационарных точках (12):

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi(r, p, p^0)}{\partial (p_1^0)^2} \right|_{p_1^0 = 0,1 + \delta_1/32} = -32 < 0,$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi(r, p, p^0)}{\partial (p_2^0)^2} \right|_{p_2^0 = 0,2 + \delta_2/30,6} = -30,6 < 0,$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi(r, p, p^0)}{\partial (p_3^0)^2} \right|_{p_3^0 = 0,15 + \delta_3/23} = -23 < 0.$$

Второе достаточное условие экстремума функции для функции $\Pi(\delta, p, p^0)$ в стационарных точках (12) выполняется, и полученные результаты говорят о том, что в точках (12) находится локальный максимум целевой функции центра $\Pi(\delta, p, p^0)$.

Исходя из полученных условий, центр может определять нормативные значения показателей риска агентов, основываясь на параметрах функций стимулирования δ_1, δ_2 и δ_3 .

Подставим полученные нормативные значения показателей риска в функцию изменения $\Delta\P(\delta, p, p^0)$ целевой функции центра:

$$\Delta\P(\delta, p, p^0(\delta)) = \Delta\P(\delta, p) = \delta_1(0,1 + \delta_1/32 - p_1) + \\ + \delta_2(0,2 + \delta_2/30,6 - p_2) + \delta_3(0,15 + \delta_3/23 - p_3).$$

Продифференцируем полученную функцию $\Delta\P(\delta, p)$ по δ_i и получим

$$\frac{\partial \Delta\P(\delta, p)}{\partial \delta_1} = 0,1 + \frac{\delta_1}{16} - p_1 = 0,$$

$$\frac{\partial \Delta\P(\delta, p)}{\partial \delta_2} = 0,2 + \frac{\delta_2}{15,3} - p_2 = 0,$$

$$\frac{\partial \Delta\P(\delta, p)}{\partial \delta_3} = 0,15 + \frac{\delta_3}{11,5} - p_3 = 0.$$

Определим из полученных выражений стационарные точки δ_1, δ_2 и δ_3 :

$$\delta_1^* = 16(p_1 - 0,1), \quad \delta_2^* = 15,3(p_2 - 0,2), \\ \delta_3^* = 11,5(p_3 - 0,15). \quad (13)$$

Проверим выполнение второго достаточного условия экстремума функции $\Delta\P(\delta, p)$ в этих точках:

$$\left. \frac{\partial^2 \Delta\P(\delta, p)}{\partial \delta_1^2} \right|_{\delta_1 = 16(p_1 - 0,1)} = \frac{1}{16} > 0,$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Delta\P(\delta, p)}{\partial \delta_2^2} \right|_{\delta_2 = 15,3(p_2 - 0,2)} = \frac{1}{15,3} > 0,$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Delta\P(\delta, p)}{\partial \delta_3^2} \right|_{\delta_3 = 11,5(p_3 - 0,15)} = \frac{1}{11,5} > 0.$$

Второе достаточное условие экстремума функции для $\Delta\P(\delta, p)$ в точках (13) выполняется, а полученные значения говорят о том, что в точках (13) достигается локальный минимум функции $\Delta\P(\delta, p)$. Значит при нормативном уровне риска p^0 (13), при котором достигается максимум целевой функции центра $\Pi(\delta, p, p^0)$, определен и минимум изменения целевой функции центра, обусловленного стимулирующим воздействием. Таким образом, при полученных значениях коэффициентов (13) стимулирующих функций и нормативных уровнях риска (12), назначаемых центром, целевая функция центра достигает максимального значения при минимальных затратах на стимулирование агентов.

Агенты со своей стороны поддержат условия центра и будут стремиться к их выполнению, если это приведет к увеличению значений их целевых функций. Для целевых функций агентов $\pi_i(\delta_i, p_i, p_i^0)$ определим фактические уровни риска, при которых они достигают максимума.

$$\frac{\partial \pi_1(\delta_1, p_1, p_1^0)}{\partial p_1} = -40(p_1 - 0,12) - 1,2\delta_1 = 0,$$



$$\frac{\partial \pi_2(\delta_2, p_2, p_2^0)}{\partial p_2} = -36(p_2 - 0,23) - 0,9\delta_2 = 0,$$

$$\frac{\partial \pi_3(\delta_3, p_3, p_3^0)}{\partial p_3} = -28(p_3 - 0,19) - 1,1\delta_3 = 0.$$

Получим значения p_i^* , при которых целевые функции агентов имеют экстремум с учетом стимулирования:

$$\begin{aligned} p_1^* &= 0,12 - 1,2\delta_1/40, & p_2^* &= 0,23 - 0,9\delta_2/36, \\ p_3^* &= 0,19 - 1,1\delta_3/28. \end{aligned} \quad (14)$$

Проверим в этих точках выполнение второго достаточного условия экстремума функций:

$$\left. \frac{\partial^2 \pi_1(\delta_1, p_1, p_1^0)}{\partial p_1^2} \right|_{p_1 = 0,12 - 1,2\delta_1/40} = -40 < 0,$$

$$\left. \frac{\partial^2 \pi_2(\delta_2, p_2, p_2^0)}{\partial p_2^2} \right|_{p_2 = 0,23 - 0,9\delta_2/36} = -36 < 0,$$

$$\left. \frac{\partial^2 \pi_3(\delta_3, p_3, p_3^0)}{\partial p_3^2} \right|_{p_3 = 0,19 - 1,1\delta_3/28} = -28 < 0.$$

Второе достаточное условие экстремума для $\pi_i(\delta_i, p_i, p_i^0)$, $i = 1, 2, 3$, в точках (14) выполняется. Подставим в выражения для фактических уровней риска (14) вместо δ_1 , δ_2 и δ_3 значения стационарных точек (13), при которых выполняется условие максимума целевой функции центра и минимума ее изменений:

$$p_1^* = 0,12 - \frac{1,2}{40} 16(p_1 - 0,1),$$

$$p_2^* = 0,23 - \frac{0,9}{36} 15,3(p_2 - 0,2),$$

$$p_3^* = 0,19 - \frac{1,1}{28} 11,5(p_3 - 0,15).$$

Определим отсюда значения p_i : $p_1^* = 0,11$, $p_2^* = 0,22$, $p_3^* = 0,18$. Далее, зная фактические уровни рисков агентов, определим δ_1^* , δ_2^* и δ_3^* (13):

$$\delta_1^* = 16(p_1^* - 0,1) = 0,16,$$

$$\delta_2^* = 15,3(p_2^* - 0,2) = 0,31,$$

$$\delta_3^* = 11,5(p_3^* - 0,15) = 0,35.$$

Подставим полученные значения коэффициентов стимулирующих функций δ_i^* в выражения для нормативных уровней риска (13):

$$p_1^{0*} = 0,1 - \delta_1^*/32 = 0,095,$$

$$p_2^{0*} = 0,2 - \delta_2^*/30,6 = 0,19,$$

$$p_3^{0*} = 0,15 - \delta_3^*/23 = 0,135.$$

При полученных значениях векторов p^* , p^{0*} и δ^* определим значения целевых функций центра и агентов. Целевая функция центра (5) с учетом стимулирования агентов $\Pi(\delta^*, p^*, p^{0*}) = 305,0229$, что превышает максимальное значение целевой функции центра $\Pi^*(p^0) = 305$ при исходных значениях нормативного риска p^0 , а также значение целевой функции центра при исходных значениях оптимальных состояний агентов $\Pi^*(p) = 304,96$.

Целевые функции агентов (4) при полученных значениях p^* , p^{0*} и δ^* составят: $\pi_1(\delta_1^*, p_1^*, p_1^{0*}) = 99,995$, $\pi_2(\delta_2^*, p_2^*, p_2^{0*}) = 119,9898$, $\pi_3(\delta_3^*, p_3^*, p_3^{0*}) = 149,981$. Полученные значения меньше максимальных значений целевых функций агентов π_i^* . Это объясняется наличием функции стимулирования агентов со стороны центра, которая в рассматриваемом примере являлась функцией штрафов и премий. За уровень риска, превышающий нормативное значение центра, взимается штраф, а при уровне риска агента ниже нормативного значения, агент получает премию. В данной ситуации уровень риска агентов выше нормативного $p_i > p_i^0$, что привело к наложению штрафов и, как следствие, к снижению значений целевых функций агентов.

Проверим выполнение еще одного условия:

$$\Delta \pi_i(r_i, p_i, p_i^0) \leq \Delta \pi_i^*(p_i^0) \quad (\text{см. таблицу}).$$

Как видно, при введении стимулирования согласованного взаимодействия выигрывают как центр, так и агенты. Значение целевой функции центра увеличивается по сравнению даже с первоначальным оптимальным значением, достижимом при плановых значениях p^0 . Для агентов при стимулировании наблюдается значение целевой функции меньшее по сравнению с их оптимальными значениями, но большее по сравнению с тем результатом, который бы получили агенты, стремясь соблюсти нормативные требования центра.

Отметим, что результат получен для определенного вида целевых функций агентов и центра и ли-

Значения целевых функций и аргументов со стимулированием и без него

Агент	Без стимулирования				Со стимулированием			
	p_i^*	p_i^0	$\pi_i(p_i^0)$	π_i^*	p_i^*	p_i^{0*}	δ_i^*	$\pi_i(\delta_i^*, p_i^*, p_i^{0*})$
1	0,12	0,1	99,992	100	0,11	0,095	0,16	99,995
2	0,23	0,2	119,984	120	0,22	0,19	0,31	119,9898
3	0,19	0,15	149,978	150	0,18	0,135	0,35	149,981

нейной функции стимулирования. Возможны различные варианты, удовлетворяющие другим условиям и описывающие иные закономерности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена система «центр — агенты» для предприятий промышленного комплекса, описаны варианты подобных систем, для которых разрабатывается модель управления рисками.

Разработанная модель управления рисками в системе позволяет учесть интересы как центра, так и агентов. Применение функции стимулирования согласованного взаимодействия дает возможность центру влиять на результаты деятельности агентов.

Предложенная модель апробирована для квадратичной зависимости, характеризующей функцию прибыли электротехнических предприятий от риска реализации неблагоприятных событий. При согласованном взаимодействии агентов и центра результаты их деятельности как элементов системы лучше по сравнению с результатами без применения функций стимулирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Официальный сайт МЧС России. — URL: <http://www.mchs.gov.ru/stats/> (дата обращения: 24.01.2014).
2. Официальный сайт компании «КонсультантПлюс». — URL: <http://base.consultant.ru/cons/cgi/online.cgi?req=doc;base=LAW;n=144721> (дата обращения: 22.12.2014).
3. Грабовой П.Г., Петрова С.Н., Полтавцев С.И. Риски в современном бизнесе. — М.: Альянс, 1994. — 200 с.
4. Белозерский А.Ю. Методика выбора мероприятий по управлению рисками на металлургических предприятиях // Журнал правовых и экономических исследований. — 2011. — № 1. — С. 171—175.
5. Андриевских М.В., Любочская О.К. Передовой опыт предприятий по управлению рисками на рабочих местах // Охрана и экономика труда. — 2011. — № 3. — С. 40—42.
6. Клейнер Г.Б., Тамбовцев В.Л., Качалов Р.М. Предприятие в нестабильной экономической среде: риски, стратегия, безопасность. — М.: Экономика, 1997.
7. Шапкин А.С. Экономические и финансовые риски. Оценка, управление, портфель инвестиций. — М.: Торговая корпорация «Дашков и К», 2003. — 544 с.
8. Качалов Р.М. Управление хозяйственным риском. — М.: Наука, 2002.

9. Тэйлман Л.Н. Риски в экономике. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. — 380 с.
10. Шихвердиев А.П., Кириенко Е.С. Управление рисками в системе корпоративного управления // Корпоративное управление и инновационное развитие Севера. Вестник науч.-исслед. центра корпоративного права, управления и венчурного инвестирования Сыктывкарского гос. ун-та. — 2012. — № 4.
11. Балабанов И.Т. Риск-менеджмент. — М.: Финансы и статистика, 1996. — 192 с.
12. Балдин К.В. Риск-менеджмент. — М.: Эксмо, 2006. — 368 с.
13. Бартон Т., Шенкер У., Уокер П. Риск-менеджмент. Практика ведущих компаний: пер. с англ. — М.: Изд. дом «Вильямс», 2008.
14. Вяткин В.Н., Гамза В.А., Екатеринославский Ю.Ю., Иванушко П.Н. Управление рисками фирмы. Программы интегративного риск-менеджмента. — М.: Финансы и статистика. — 400 с.
15. Башкин В.Н. Экологические риски: расчет, управление, страхование. — М.: Высшая школа, 2007. — 360 с.
16. Хохлов Н.В. Управление риском: учебн. пособие для вузов. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. — 239 с.
17. Бурков В.Н., Грищенко А.Ф., Кулик О.С. Задачи оптимального управления промышленной безопасностью. — М.: ИПУ РАН, 2000. — 70 с.
18. Бурков В.Н., Джавахадзе Г.С., Динова Н.И., Шепкин А.В. Применение игрового имитационного моделирования для оценки эффективности экономических механизмов. — М.: ИПУ РАН, 2003. — 51 с.
19. Бурков В.Н., Новиков Д.А., Шепкин А.В. Механизмы управления эколого-экономическими системами. — М.: ИПУ РАН, 2008. — 244 с.
20. Иванов Д.Ю. Математическая постановка и решение задачи стимулирования в организационных системах // Вестник Самарского гос. экономического ун-та. — 2009. — № 9. — С. 42—46.
21. Богатырев В.Д. Модели и механизмы согласованного взаимодействия в задачах антикризисного управления. — Самара: СНЦ РАН, 2004. — 284 с.
22. Богатырев В.Д. Модели механизмов взаимодействия в активных производственно-экономических системах. — Самара: СНЦ РАН, 2003. — 230 с.
23. Рябинин И.А. Надежность и безопасность структурно-сложных систем. — СПб.: Из-во Санкт-Петерб. ун-та, 2007. — 278 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Бурковым.

Ростова Елена Павловна — канд. экон. наук, доцент, Самарский государственный аэрокосмический университет им. академика С.П. Королева, ✉ el_rostova@mail.ru.



ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ КОММЕРЧЕСКОЙ НЕДВИЖИМОСТИ С УЧЕТОМ ПОТРЕБИТЕЛЬСКИХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ¹

В.С. Спирина

Дана постановка задачи управления объектом коммерческой недвижимости с учетом потребительских предпочтений. Отмечено, что одной из существенных характеристик является потребительская привлекательность объекта коммерческой недвижимости. Для ее оценки предложена модифицированная модель Хаффа. Показано, что учет потребительской предпочтений позволяет прогнозировать посещаемость объекта коммерческой недвижимости при различных вариантах его управления. Дан сравнительный анализ точности прогнозирования посещаемости с помощью модифицированной и оригинальной моделей. На конкретном примере показано, что точность модифицированной модели выше.

Ключевые слова: коммерческая недвижимость, управление недвижимостью, потребительские предпочтения, потребительская привлекательность, модель Хаффа, квалиметрическая модель, матричный механизм комплексного оценивания.

ВВЕДЕНИЕ

Задача управления коммерческой недвижимостью описана во многих работах (см. например, [1–3]). Однако учет потребительских предпочтений в них практически не рассмотрен. В работе [4] в соответствии с современной концепцией управления стоимостью объекта управления в постановке задачи управления коммерческой недвижимостью учтен фактор посещаемости объекта коммерческой недвижимости, влияющий на его доходность. Прогнозировать посещаемость объектов коммерческой недвижимости можно на основе оценки потребительской привлекательности [5]. Учет потребительской привлекательности и прогнозируемой посещаемости объекта коммерческой недвижимости делает управление объектами данного класса более полным, поскольку появляется возможность сценарного моделирования различных вариантов управления.

Исторически сложилось, что для решения задачи оценки потребительской привлекательности используется модель Хаффа — один из методов, применяемых в рамках концепции выявленных

предпочтений [6]. Данный метод был предложен в 1963 г. Дэвидом Л. Хаффом [7] для определения местоположения торгового объекта, наиболее оптимального по критерию максимизации дохода. Подробному историческому обзору развития данной модели посвящена работа [8].

Основная идея модели Хаффа заключается в том, что привлекательность торгового объекта для потребителя прямо пропорциональна размеру объекта и обратно пропорциональна расстоянию между ним и покупателем:

$$A_{ij} = S_j / T_{ij}^{\lambda}, \quad (1)$$

где A_{ij} — привлекательность объекта j для покупателя i ; S_j — размер объекта j ; T_{ij} — время, потраченное покупателем i на путь до объекта j ; λ — эмпирически определяемый параметр, отражающий эффект влияния разных типов объектов на воспринимаемые временные затраты [9].

В практике управления коммерческой недвижимостью выделяют три аспекта эффективного управления, называемых еще аспектами успеха: управление, инфраструктура, окружающая среда. Эти аспекты легко классифицируются с позиций управляемости.

К факторам *управления* в основном относятся элементы, которыми можно управлять внутри торговой точки.

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке ФГБОУ ВПО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет».

К факторам *инфраструктуры* относятся элементы, связанные с уникальной физической планировкой здания и окружающих его объектов. Данные факторы предполагают частичное либо ресурсоемкое управление.

К факторам *окружающей среды* относятся неконтролируемые элементы, такие как демография населения, потребительский спрос, транспортная загрузка, образующие трафик предприятия (торговые центры, больницы, аэропорты, стадионы), населенность в дневное и вечернее время, конкуренты, дополняющий бизнес, образ жизни [10].

В модели Хаффа (1) не учитывается такой аспект, как управление; модель лишь частично учитывает факторы инфраструктуры через параметр площадь (S), что, очевидно, недостаточно в современных условиях; факторы окружающей среды модель учитывает через параметр времени корреспонденции покупателя до объекта коммерческой недвижимости (T) и эмпирически определяемый параметр, отражающий эффект влияния разных типов объектов на воспринимаемые временные затраты (λ). Распределения параметра λ для жителей г. Перми, полученные эмпирическим путем, описаны в работе [11].

В связи с тем, что модель Хаффа лишь частично описывает аспекты, определяющие эффективность управления коммерческой недвижимостью, модель целесообразно модифицировать в целях использования ее в задаче управления объектом коммерческой недвижимости. Так, в работах [11, 12] был расширен перечень контролируемых факторов путем введения параметра Q , описывающего качество объекта коммерческой недвижимости, и являющегося функцией многих переменных:

$$A_{ij} = \alpha Q / T_{ij}^{\lambda}, \quad (2)$$

где параметр α характеризует тип, а параметр Q — качество объекта коммерческой недвижимости.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТОМ КОММЕРЧЕСКОЙ НЕДВИЖИМОСТИ С УЧЕТОМ ПОТРЕБИТЕЛЬСКИХ ПРЕДПОЧТЕНИЙ

Как оригинальная (1), так и модифицированная модель Хаффа (2) могут быть использованы для прогнозирования потоков посетителей объектов коммерческой недвижимости. Так, вычислив привлекательность исследуемого торгового объекта (A) по формуле (1) или (2), а также привлекательности других торговых объектов, можно определить вероятность того, что покупатели могут посетить исследуемый объект (3):

$$P_{ij} = A_{ij} / \sum_{j=1}^n A_{ij}. \quad (3)$$

Зная вероятность посещения, можно определить ключевые показатели, используемые в качестве критериев эффективности управления объектами коммерческой недвижимости. Так, общие затраты покупателей на товар или услугу класса k в торговой точке j описываются выражением:

$$E_{jk} = \sum_{l=1}^m P_{lj} C_l B_{lk},$$

где C_l — число покупателей в зоне проживания l ; B_{lk} — среднегодовые затраты покупателей, проживающих в зоне l , на товар или услугу класса k ; m — общее число зон проживания покупателей.

Имея эти данные, можно спрогнозировать совокупную выручку торговой точки по всем товарам и услугам:

$$E_j = \sum_{k=1}^K E_{jk}.$$

В случае сдачи помещений объекта коммерческой недвижимости в аренду критерием эффективности управления будет служить не выручка, а доходность объекта. В общем же случае в качестве критерия эффективности управления коммерческой недвижимостью можно использовать изменение его рыночной стоимости. Так, в работе [4] сформулировано условие увеличения рыночной стоимости объекта коммерческой недвижимости, полученной доходным подходом, с учетом прогнозируемой посещаемости торговых помещений объекта:

$$\frac{\Delta V}{V_1} = (1 - \alpha) \sum_{i=1}^N \frac{\Delta x_i}{x_{i0}} \frac{S_i}{S} \cdot 100 \%,$$

где V_1 — стоимость объекта коммерческой недвижимости, ΔV — ее изменение стоимости с учетом управления, α — доля операционных расходов на обслуживание и поддержание объекта недвижимости в надлежащем состоянии от потенциального валового дохода, S_i — площади торговых помещений, S — сумма всех торговых площадей, x_{i0} — посещаемость торговой точки i , Δx_i — изменение посещаемости торговой точки i с учетом управления коммерческой недвижимостью, N — число торговых помещений в объекте i .

Посещаемость объекта можно определить по формуле:

$$x_j = \sum_{l=1}^m P_{lj} C_l.$$

Как видно из постановки задачи управления объектом коммерческой недвижимости одной из существенных характеристик является его потребительская привлекательность.

Учет факторов, влияющих на выбор потребителями объекта для посещения, делает возможным



Таблица 1

Результаты социологического опроса

i	Параметр	Q_i	
		ТРК «Семья»	ТРК «Колизей»
1	Площадь	9,47	7,40
2	Ассортимент товаров	8,53	6,48
3	Транспортная доступность	8,51	8,87
4	Эстетический параметр	8,61	8,42
5	Акции, скидки	6,60	5,16
6	Качество товаров	7,89	7,59
7	Наличие брендов	8,84	7,48
8	Мероприятия, концерты	6,81	6,05

сценарное моделирование различных вариантов управления объектом коммерческой недвижимости. Данный факт делает модифицированную модель Хаффа подходящей для решения задачи управления объектом с учетом потребительских предпочтений.

В случае использования модифицированной модели Хаффа (2), необходимо оценивание качества Q объекта коммерческой недвижимости.

В качестве допущения примем, что на качество объекта влияют дополнительные факторы: транспортная доступность, эстетический параметр, ассортимент товаров, качество товаров, наличие брендов, акции и скидки, мероприятия и концерты, управляя которыми можно повлиять на посещаемость и доходность объекта коммерческой недвижимости.

В рамках данного исследования был проведен социологический опрос среди жителей г. Перми (форма опроса доступна по ссылке [13]). Респондентам предлагалось оценить по 10-балльной шкале два крупных торгово-развлекательных комплекса (ТРК) г. Перми — «Семья» и «Колизей» по восьми предложенным критериям. После проведения опроса набор полученных оценок подвергался статистическому анализу, и респонденты, чьи оценки не попадали в третий доверительный интервал, исключались. Оставшиеся оценки респондентов были усреднены и представлены в табл. 1 (результаты опроса доступны по ссылке [14]).

2. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ОБЪЕКТА КОММЕРЧЕСКОЙ НЕДВИЖИМОСТИ

В общем случае качество объекта недвижимости Q зависит от множества характеристик Q_i , гетерогенных по отношению друг к другу, поэтому, оценка параметра $Q(Q_1, \dots, Q_n)$ возможна только с помощью различных механизмов комплексного оценивания. Рассмотрим их.

В практике комплексного оценивания получили широкое распространение квалиметрические модели [15, 16], где результатом комплексного оценивания становится средневзвешенная оценка. Применение квалиметрии в целях экспертизы и оценки объектов недвижимости описано в работе [17]. Более того, данные методы разрабатывались специально для количественного оценивания качества, что и требуется в данном исследовании.

В качестве альтернативных подходов к решению задачи комплексного оценивания могут выступать методы, разработанные в теории важности критериев [18], или известный в теории активных систем [19] матричный механизм комплексного оценивания, основанный на деревьях целей (критериев) и бинарных матриц свертки частных критериев (см. например, работы [20, 21]).

2.1. Квалиметрические механизмы комплексного оценивания

В работе [16] приводится ряд таких средневзвешенных оценок с рекомендациями их прикладного использования. В данном исследовании применялась геометрическая модель:

$$Q = \prod_{i=1}^n Q_i^{q_i}, \quad (4)$$

где q_i — взвешенные коэффициенты, сумма которых должна быть равна единице, Q_i — значение i -й характеристики в относительной шкале [0, 1].

Данную модель рекомендуется использовать при объединении неоднородных показателей, имеющих большой разброс, что удовлетворяет условиям задачи.

Адекватность моделей, описывающих величину Q , зависит от правильности выбора областей определения частных характеристик $[Q_{i\min}, Q_{i\max}]$ и определения взвешенных коэффициентов q_i . Для их определения респондентам социологического опроса предлагалось дать оценку по 10-балльной шкале — насколько им важен каждый из параметров ТРК. Результаты обработки данных опроса представлены в табл. 2.

Для применения квалиметрической модели оценки по каждому параметру Q_i (см. табл. 1) были приведены к относительной шкале [0; 1]. Используя модель (4), было определено непосредственно качество Q каждого ТРК (табл. 3).

Для определения привлекательности (А) ТРК были приняты следующие допущения.

- Будем считать, что никакого возмущения на привлекательность коммерческой недвижимости не происходит, т. е. параметр α можно принять равным единице.
- Рассмотрим категорию потребителей, проживающих в зоне 1, что было бы эквивалентно слу-

Таблица 2

Взвешенные коэффициенты квалиметрической модели

i	Параметр	Результаты опроса	q_i
1	Площадь	7,22	0,72
2	Ассортимент товаров	9,41	0,94
3	Транспортная доступность	9,22	0,92
4	Эстетический параметр	7,60	0,76
5	Акции, скидки	6,59	0,66
6	Качество товаров	9,50	0,95
7	Наличие брендов	7,50	0,75
8	Мероприятия, концерты	4,80	0,48

Таблица 3

Полученные значения качества и вероятности посещения ТРК потребителями

Параметр	«Семья»	«Колизей»
Качество (Q)	0,82	0,72
Привлекательность (A)	0,82	0,72
Вероятность посещения ТРК (P)	0,53	0,47

чаю, когда рассматриваемые ТРК находятся в шаговой доступности. Будем считать, что параметр времени не будет иметь влияния для потребителя при выборе объекта коммерческой недвижимости, т. е. параметр $\lambda = 0$.

Данные допущения позволяют оценить привлекательность торговых центров (A) и вероятность посещения (P) потребителями исследуемых ТРК, используя формулы (2) и (3), соответственно (табл. 3).

2.2. Матричные механизмы комплексного оценивания

Основополагающим принципом при построении матричных моделей комплексного оценивания является возможность интерпретации промежуточных результатов свертки (рис. 1). Так, свер-

тка факторов «Площадь» и «Эстетический вид» образуют обобщенную характеристику, описывающую факторы управления инфраструктурой торгового центра. Последующая свертка с фактором «Транспортная доступность», самостоятельно описывающим окружающую среду вокруг торгового центра, образует итоговую оценку, описывающую удобство пользования торговым центром для потребителя. А свертка факторов «Ассортимент», «Наличие брендов» и «Качество товаров» образуют обобщенную характеристику качества предложения в целом. Свертка с факторами «Акции» и «Мероприятия» образует характеристику непосредственно управления торговым центром. Итоговая свертка параметров отражает «Качество торгового центра» с потребительской точки зрения.

Следующий шаг состоит в описании входных характеристик в шкале комплексного оценивания. В данном случае предлагается использовать шкалу [1; 4]. Значения, описывающие состояние критериев для исследуемых ТРК, взяты из результатов социологического опроса (табл. 1) и приведены к шкале [1; 4].

Последний шаг разработки модели комплексного оценивания заключается в формализации логических отношений между сворачиваемыми параметрами и сверткой в виде матриц (рис. 2), которые должны заполняться носителями предпочтений.

Для формализации логических отношений шкала комплексного оценивания для каждого критерия должна быть проинтерпретирована, что позволит носителю предпочтений выстроить логические высказывания «если..., то...». Базовой интерпретацией служит стандартная балльная шкала 1 — «неудовлетворительное», 2 — «удовлетворительное», 3 — «хорошее» и 4 — «отличное» состояние. Свертки так же должны быть описаны в данной шкале.

Преимущество матричного механизма комплексного оценивания заключается в том, что, ис-

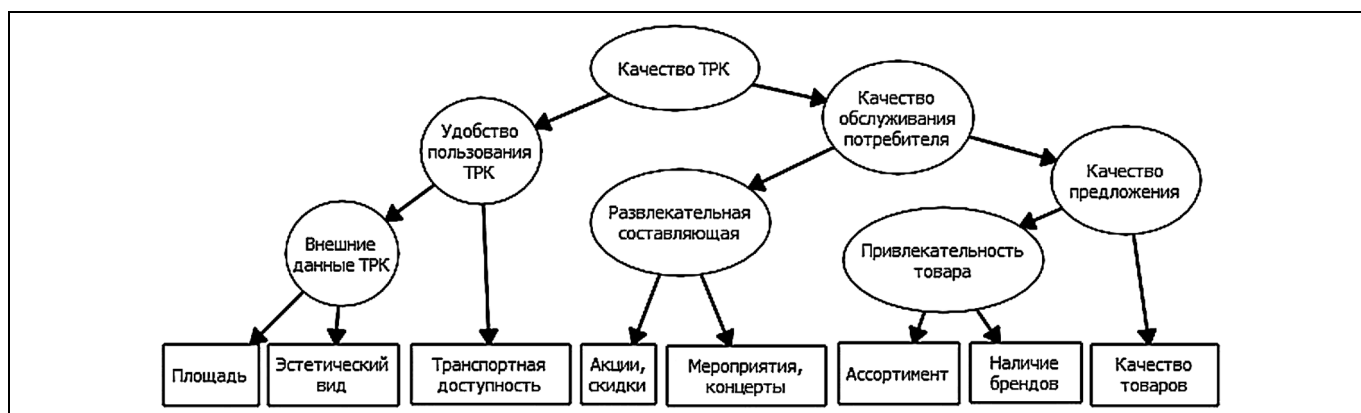


Рис. 1. Структура модели комплексного оценивания

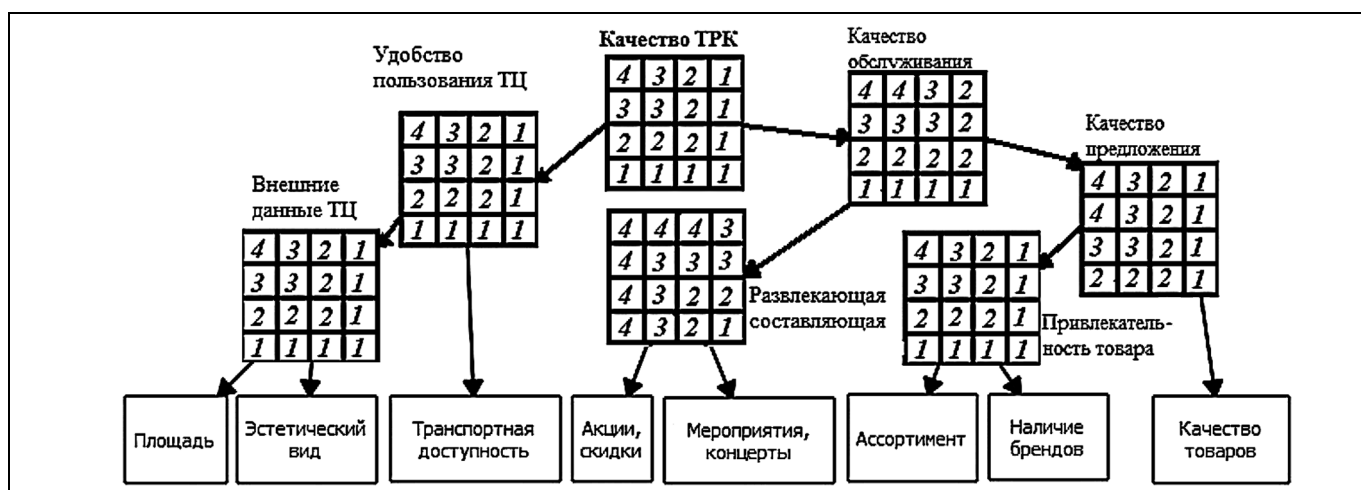


Рис. 2. Матричная модель комплексного оценивания

пользуя дискретную шкалу {1; 4} можно построить логическую модель комплексного оценивания (см. рис. 2), а применяя процедуру нечеткого комплексного оценивания (см. например, работы [20, 21]), можно оперировать с непрерывными шкалами [1; 4], т. е. оценивать любые параметры, приводя их к данной шкале. Отметим, что для вычисления оценок качества объектов коммерческой недвижимости применялся аддитивно-мультипликативный подход к теоретико-множественным операциям над нечеткими числами. Если при выполнении операции объединения нечетких чисел определять значение функции принадлежности сворачиваемого критерия, используя сумму значений функций принадлежности как для независимых событий, не вычитая результат пересечения, то свертка становится гладкой функцией. Именно такой подход применялся при вычислении качества объектов коммерческой недвижимости.

С помощью данной модели (см. рис. 2) комплексного оценивания были получены значения качества для исследуемых ТРК (табл. 4).

Для расчета привлекательности были приняты те же допущения, что и в случае квалиметрической модели. Привлекательность ТРК и вероятность их посещения потребителями были рассчитаны аналогично по формулам (1) и (2) соответственно.

Таблица 4

Полученные значения качества и вероятности посещения ТРК потребителями

Параметр	ТРК «Семья»	ТРК «Колизей»
Качество ТРК (Q)	3,10	2,73
Привлекательность ТРК (A)	3,10	2,73
Вероятность посещения	0,53	0,47

2.3. Анализ точности оценивания качества объекта коммерческой недвижимости

Для оценки точности оценивания качества объектов коммерческой недвижимости сравним расчетные значения вероятностей посещения потребителями ТРК «Семья» и «Колизей» с помощью двух моделей — квалиметрической (см. табл. 3) и матричной модели комплексного оценивания (см. табл. 4) с данными реальных посещений, определенными из опроса посетителей (форма опроса и результаты доступны по ссылке [22]).

Полученные в результате опроса вероятности будут сравниваться с вероятностями, посчитанными с помощью оригинальной и модифицированной моделей Хаффа (табл. 5).

Видно, что точность модифицированной модели Хаффа, использующей как квалиметрическую модель, так и матричную модель комплексного оценивания, превышает точность оригинальной модели Хаффа. Достоверность результатов подтверждается близостью результатов вычислительного эксперимента с реальными опросными данными посещаемости ТРК.

Несмотря на явное преимущество модифицированной модели Хаффа, все же определим среднее квадратическое отклонение результатов каждой модели от реальных данных. В данном случае среднее квадратическое отклонение служит параметром, показывающим уровень погрешности модели. Среднее квадратическое отклонение определяется по формуле:

$$CKO_i = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (P_{ifact} - P_{imodel})^2}.$$

Таблица 5

Сравнение расчетных вероятностей посещения ТРК с реальными данными

Вероятность (P)		ТРК «Семья»	ТРК «Колизей»
Реальные опросные данные		0,53	0,47
Оригинальная модель Хаффа		0,65	0,35
Модифицированная модель Хаффа	с квалитметрической моделью	0,53	0,47
	с матричной моделью	0,53	0,47

В результате получены значения: $СКО_1 = 0,0025$; $СКО_2 = 0,0031$, $СКО_{\text{Хафф}} = 0,1603$.

По значениям среднеквадратического отклонения можно судить о том, что оба подхода к оценке качества объекта адекватны, и поскольку в состав определяющих факторов входят контролируемые параметры, пригодны для обоснования управленческих решений в задаче управления объектом коммерческой недвижимости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поставлена задача управления объектом коммерческой недвижимости с учетом потребительских предпочтений. Отличительная черта постановки заключается в учете потребительских предпочтений посредством оценивания привлекательности объекта коммерческой недвижимости. Показано, что для ее оценки целесообразно использовать модифицированную модель Хаффа, поскольку в этом случае точность определения вероятности посещения объекта коммерческой недвижимости существенно превышает оригинальную модель. Особенность модифицированной модели заключается в расширении перечня контролируемых факторов, что дает возможность осуществлять сценарное моделирование «что будет, если...» различных вариантов управления объектом для выявления наиболее эффективного варианта его использования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Управление коммерческой недвижимостью*: Учебник / Кол. авторов; под ред. М.А. Разу. — М.: КНОРУС, 2009. — 248 с.
2. Асаул А.Н., Люлин П.Б. Управление объектами коммерческой недвижимости. — СПб.: СПб ГАСУ, 2008. — 144 с.
3. *Девелопмент недвижимости*: учеб. пособие / И.И. Мазур, В.Д. Шапиро, О.А. Бартенева, П.Б. Понкратов. — М.: ЕЛИМА; Омега-Л, 2010. — 928 с.
4. Назарова Е.Ю., Алексеев А.О. Управление коммерческой недвижимостью // *Master's Journal*. — 2013. — № 1. — С. 252–258.
5. Спирина В.С., Алексеев А.О. Разработка и исследование моделей оценивания потребительской привлекательности

объектов коммерческой недвижимости // *Master's Journal*. — 2013. — № 2. — С. 163–175.

6. *Выявленные предпочтения*. — URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D1%8B%D1%8F%D0%B2%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D1%8B%D0%B5_%D0%BF%D1%80%D0%B5%D0%B4%D0%BF%D0%BE%D1%87%D1%82%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F (дата обращения 10.01.2014 г.).
7. Huff D.L. A Probabilistic Analysis of Shopping Center Trade Areas. *Land Economics*. — 1963. — Vol. 39, N 1. — P. 81–90. — URL: <http://www.jstor.org/discover/10.2307/3144521?uid=3738936&uid=2&uid=4&sid=21102716073273> (дата обращения: 08.12.2012 г.).
8. Huff D.L., Black W.C. The Huff model in retrospect // *Applied Geographic Studies*. — 1997. — Vol. 1, N 2. — P. 83–93. — URL: [http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/\(SICI\)1520-6319\(199722\)1:2%3C83::AID-AGS1%3E3.0.CO;2-P/abstract](http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/(SICI)1520-6319(199722)1:2%3C83::AID-AGS1%3E3.0.CO;2-P/abstract) (дата обращения 23.11.2013 г.).
9. Угаров А.С. Методы выбора местоположения торговой точки // *Маркетинг в России и за рубежом*. — 2005. — № 6. — С. 99–108.
10. Леонов А.Л. Esri GIS. ГИС для розничной торговли // *ArcReview*. — 2010. — № 4 (55).
11. Спирина В.С. Эмпирическое определение коэффициента λ , описывающего степень влияния времени корреспонденции потребителей до торгового центра в формуле Д. Хаффа // *Master's Journal*. — 2013. — № 1. — С. 243–251.
12. Алексеев А.О., Спирина В.С., Кавиев М.И., Эрнст Н.А. Определение потребительской привлекательности объектов коммерческой недвижимости // *Известия вузов. Инвестиции. Строительство. Недвижимость*. — 2013. — № 1 (4). — С. 8–19.
13. Форма опроса потребителей г. Перми. — URL: <https://docs.google.com/forms/d/1OwIORWTm25uTYWsw7XKIyL35UWBFkFtIODZdj3g8Y/viewform#start=openform> (дата обращения: 04.03.2013 г.).
14. *Результаты опроса*, представленные в табличной форме. — URL: https://docs.google.com/file/d/0B_dG9pJJVt4JX0JFTnFLTDBld2s/edithttps://docs.google.com/spreadsheets/ccc?key=0AvdG9pJJVt4JdDNvazITdTFMYy1qYtJVRlh3SEpOdFE#gid=0 (дата обращения: 18.09.2013 г.).
15. Азгальдов Г.Г. Теория и практика оценки качества товаров (основы квалитметрии). — М.: Экономика, 1982. — 256 с.
16. Варжапетян А.Г. Квалитметрия: Учебное пособие / СПбГУАП, 2005. — 176 с.
17. *Квалитметрическая экспертиза строительных объектов* / под ред. В.М. Маругина и Г.Г. Азгальдова. — СПб.: Политехника, 2008. — 528 с.
18. Подиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. — М.: Физматлит, 2007. — 64 с.
19. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. — М.: СИНТЕГ, 1999. — 128 с.
20. Харитонов В.А., Винокур И.Р., Белых А.А. Функциональные возможности механизмов комплексного оценивания с топологической интерпретацией матриц свертки // *Управление большими системами*. — 2007. — Вып. 18. — С. 129–140.
21. *Интеллектуальные технологии обоснования инновационных решений*: монография / Харитонов В.А. [и др.]; под ред. В.А. Харитонova. — Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2010. — 363 с.
22. Форма опроса потребителей г. Перми товаров разной необходимости. — URL: <https://docs.google.com/spreadsheets/viewform?formkey=dFNsZVBNOwVLT0k3QzY0V3M0cVITUUE6MQ#gid=0> (дата обращения: 20.09.2012 г.).

Статья представлена к публикации членом редколлегии Р.М. Нижегородцевым.

Спирина Варвара Сергеевна — ассистент, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, ☎ (342) 219-84-09, ✉ spirina.vs@yandex.ru.



Первая российская междисциплинарная конференция «СОЦИОФИЗИКА И СОЦИОИНЖЕНЕРИЯ»

8—11 июня 2015 г., Москва

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова проводит конференцию, посвященную применению методов точных наук в исследованиях экономики и общества, расчетному моделированию и прогнозированию социальных процессов, разработке методов управления такими процессами. Место проведения: Москва, МГУ, физический факультет.

Оргкомитет конференции:

акад. А.Р. Хохлов (МГУ) — председатель;
акад. С.Н. Васильев (МГУ, ИПУ РАН) — зам. председателя;
д-р физ.-мат. наук, проф. Н.Н. Сысоев (МГУ) — зам. председателя;
д-р физ.-мат. наук. А.И. Абрамович (МГУ);
иностран. чл. РАН, д-р техн. наук, проф. А.А. Акаев (МГУ);
д-р хим. наук, проф. Л.А. Асланов (МГУ);
д-р физ.-мат. наук, проф. А.А. Васин (МГУ);
д-р психол. наук, проф. А.Н. Гусев (МГУ);
д-р ист. наук, проф. А.В. Коротаев (НИУ ВШЭ, РГГУ);
акад. В.В. Лунин (МГУ);
д-р физ.-мат. наук, проф. Г.Г. Малинецкий (ИПМ РАН);
д-р физ.-мат. наук, проф. В.А. Малышев (МГУ);
чл.-корр. РАН Д.А. Новиков (ИПУ РАН);
чл.-корр. РАН И.Г. Пospelов (ВЦ РАН, НИУ—ВШЭ);
д-р хим. наук, проф. Ю.Л. Словохотов (МГУ, ИНЭОС РАН) — отв. секретарь;
канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. М.В. Тамм (МГУ);
канд. физ.-мат. наук, доц. А.Ю. Флерова (ВЦ РАН, МФТИ).

Основные направления работы

- Применение методов физики сложных систем в науках об обществе
- Математические модели планирования и управления в социальных системах
- Физические методы и модели в экономике; эконофизика
- Сетевые структуры экономики и общества. Моделирование информационных, финансовых и транспортных потоков
- Сложные и многокомпонентные системы с точки зрения математика
- Демография и глобальное моделирование
- Естественнаучные подходы в археологии и истории; клиодинамика
- Измерения и использование результатов измерений в гуманитарных науках

По результатам конференции будут изданы тезисы докладов. Наиболее интересные представленные работы будут рекомендованы для публикации в журналах «Проблемы управления», «Управление большими системами», «Компьютерные исследования и моделирование».

Более подробную информацию можно найти на сайте www.soc-phys.org.

CONTENTS & ABSTRACTS

THE MODELS OF CORRUPTION IN HIERARCHICAL CONTROL SYSTEMS 2

O.I. Gorbaneva, G.A. Ougolnitsky, A.B. Usov

The concept of mathematical modeling of corruption in hierarchical control systems is presented. The main theses of the concept are formulated. The definitions of main used notions are given. The series of gradually complicated models of the administrative and economic corruption are built and investigated for static and dynamic cases. The main dependencies of the corruption behavior are revealed. Possibilities of anti-corruption drive are described.

Keywords: hierarchical control system, corruption, optimization and game-theoretic models.

NECESSARY OPTIMALITY CONDITIONS OF SINGULAR CONTROLS IN THE OPTIMAL CONTROL BY DISCRETE-CONTINUOUS SYSTEM 11

R.O. Mastaliyev

The paper derives a necessary condition for optimality in the form of the Pontryagin maximum principle for problems described by the system of difference and integro-differential equations of Volterra type. The singular in the sense of Pontryagin's maximum principle case is investigated.

Keywords: difference and integro-differential equations of the Volterra, stepwise problem, necessary conditions, optimality, principle of the maximum, singular control.

DISTRIBUTION OF LOCAL GOALS IN THE COMPONENT STRUCTURES OF COMPLEX POORLY FORMALIZABLE SYSTEMS 19

I.A. Shherbatov

The paper formalizes the concept of goal and goal structure of complex poorly formalizable system from the position of system approach. The direct (local goals for a number of components) and reverse (formation of a set of components necessary to ensure the achievement of a fixed number of goals) problem of distribution of local goals component in the component structure is defined. The methods for solving direct and inverse problem for a group of mobile robotic systems are described. The example demonstrating the applicability of methods of solution of local goals distribution problem in component structures of complex poorly formalizable systems is given.

Keywords: local goal, component, direct task allocation goals, inverse task allocation goals, complex poorly formalizable system, multi-agent technology, mobile robotic system.

THE ALGORITHM OF CHECK OF NUMBER OF CONTROL FLOWS IN BUSINESS PROCESS INSTANCE FINITENESS 30

A.M. Mironov, A.G. Miheev, V.E. Pyatetsky

Due to errors in business process development in contemporary computerized business process management systems there is a chance of unlimited growth of control flows number in business process instance that can lead to unjustified overload of computer system resources. The paper reviews the task of business process scheme analysis in order to avoid such situation and proposes the algorithm of checking if there is a finite number of control flows.

Keywords: executable business processes, business process management systems, control flow, directed graph.

HUMAN DEVELOPMENT INDEX AND GENDER EQUALITY: INDICATORS INTERCONDITIONALITY 38

I.S. Bogomolova, S.V. Grinenko, E.K. Zadorozhnyaya

The gender segregation of various types — branch, professional, educational — persistently influences distinction of human capital development level of men and women. The paper presents the assessment of human development index indicators interconditionality, inequality-adjusted human development index and the gender inequality index for different countries and for Russia taking into account Russian peculiarities.

Keywords: gender equality, gender segregation, human development index, gender inequality index.

QUANTILE HEDGING OF EUROPEAN OPTIONS IN INCOMPLETE MARKETS. PATH 2. MINIMAX HEDGING 47

O.V. Zverev, V.M. Khametov

The paper considers solution of the European option calculating problem with quantile criterion in incomplete market with discrete time. The method of European option calculation is justified with respect to the quantile criterion regarding the worst measure. The justification is based on the S-representation of two payment obligations regarding the worst measure.

Keywords: European option, quantile hedging, minimax portfolio, incomplete market, S-representation.

MATHEMATICAL MODELS, ALGORITHMS AND COMPLEXES OF PROGRAMS FOR MONITORING THE EFFICIENCY OF THE EDUCATIONAL ACTIVITIES OF THE HIGHER SCHOOL 53

N.V. Jandybaeva, V.A. Kushnikov

The complex of mathematical models developed to monitor the effectiveness of the educational activities of higher school is presented. The heuristic algorithm for numerical solution of system of differential equations based on neural networks and Runge—Kutta 4th order method is proposed. A software module to automate the calculation of performance indicators is developed.

Keywords: higher school, monitoring of educational activities, performance indicators, mathematical models, software module.

SOCIAL AND ECONOMIC INDICATORS OF REGION DEVELOPMENT COORDINATION: CONCEPT AND MECHANISMS 63

I.V. Goroshko, Yu.V. Bondarenko

The problem of coordination of social indicator values of region development and economic indicators of business units activity is considered. The formal statement of coordination problem is proposed, the complex of mechanisms focused on stimulation of business to participate in solving of regional social problems is developed. The distinctive feature of the proposed approach is consideration of different attitude of business units to solution of regional social problems. The quantitative assessment is made via loyalty parameter.

Keywords: social and economic system, region, social indicators of region development, economic indicators of region development, coordination, mechanism, regulation, enterprises.

MODEL OF STIMULATION AT RISK MANAGEMENT IN THE SYSTEM OF INDUSTRIAL ENTERPRISES. 73

E.P. Rostova

The model of risk management for a system of industrial enterprises-agents acting under control of the center is developed. Variants of system operation with and without consideration of stimulation of coordinated interaction of center and agents is considered. The model is tested for some type of functions.

Keywords: risk management, center, agents, system of enterprises, industrial risks

STATEMENT OF COMMERCIAL REAL ESTATE MANAGEMENT PROBLEM WITH CONSIDERATION OF CONSUMER PREFERENCES. 81

V.S. Spirina

The paper sets the problem of commercial real estate management with consideration of consumer preferences. One of the essential characteristics of the problem is the consumer appeal of estate. The modified Huff model is proposed for estimation of the consumer appeal. Considering consumer preferences allows predicting the attendance of commercial real estate under different management actions. The accuracy of estate attendance forecast is compared for original and modified models on real data of two biggest malls of Perm city. The analysis shows that the accuracy of the modified model is higher, which determines the practical significance of the study.

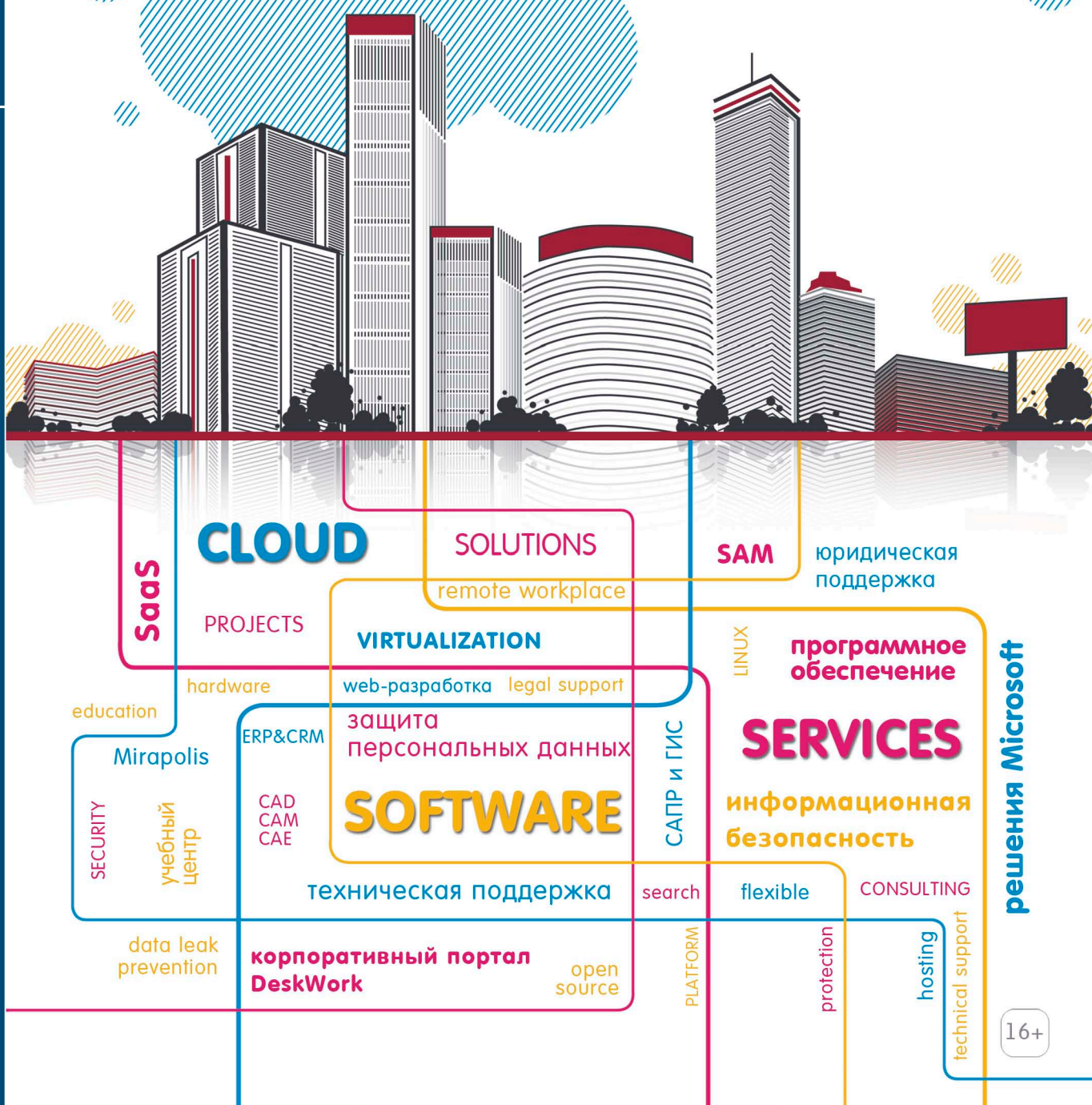
Keywords: commercial real estate, property management, consumer preferences, consumer appeal, Huff model, qualitative model, complex evaluation mechanism matrix.

softline®



Services Software Cloud

ИТ-архитектура вашего бизнеса



+7 (495) 232-00-23

www.softline.ru

info@softline.ru

