

# $H_\infty$ -УПРАВЛЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ В АВАРИЙНОМ РЕЖИМЕ.

## Ч. 1. Теоретические основы синтеза робастных $H_\infty$ -регуляторов

А.П. Курдюков, В.Н. Тимин

На основе метода размещения полюсов замкнутой системы в заданной области на комплексной плоскости и  $H_\infty$ -метода формирования контура с помощью аппарата линейных матричных неравенств решена задача подавления внешних возмущений в энергетической системе.

**Ключевые слова:** управление энергетической системой,  $H_\infty$ -теория управления, линейные матричные неравенства, подавление возмущений,  $H_\infty$ -метод формирования контура, расположение полюсов замкнутой системы в заданной области на комплексной плоскости.

### ВВЕДЕНИЕ

Современная энергетическая система (ЭС) представляет собой сложную многоуровневую и многосвязную динамическую систему. Задачи управления и защиты в нештатных ситуациях решаются с помощью элементов силовой электроники и микропроцессорной техники. Создание управляемых гибких линий электропередачи переменного тока (Flexible AC Transmission Systems—FACTS) [1—4] на основе элементов силовой электроники позволило существенно улучшить управление потоками мощности в электрических сетях в установившихся и переходных режимах работы. Устройства FACTS позволяют увеличить пропускную способность линии электропередачи и управлять параметрами, определяющими функционирование ЭС, включая реактивное сопротивление, ток, напряжение, углы фазовых сдвигов в узлах сети, затухание колебаний на различных частотах и др. В процессе функционирования ЭС при коммутациях в сети и изменении нагрузки возникают электромеханические колебания, компенсация которых обычно осуществляется автоматическими регуляторами возбуждения и системными стабилизаторами. Применение устройств FACTS совместно с системными стабилизаторами позволяет дополни-

тельными управляющими воздействиями улучшить качество функционирования ЭС. Синтез законов управления в ЭС с целью повышения робастной устойчивости и качества переходных процессов, демпфирования колебаний перетоков мощности и улучшения других характеристик, представляет собой достаточно сложную и актуальную задачу. В целях ее решения в данной работе исследуется возможность применения  $H_\infty$ -робастных регуляторов для управления ЭС в аварийном режиме.

В первой части статьи кратко изложены теоретические основы синтеза  $H_\infty$ -робастных регуляторов с помощью метода размещения полюсов замкнутой системы в заданной области на комплексной плоскости и  $H_\infty$ -метода формирования контура. Во второй части будет дана постановка и предложен метод решения задачи синтеза  $H_\infty$ -регулятора для подавления возмущений, возникающих в энергетической системе.

### 1. СОВРЕМЕННЫЕ КОРНЕВОЙ И ЧАСТОТНЫЙ МЕТОДЫ СИНТЕЗА СИСТЕМ

С инженерной точки зрения под синтезом системы управления можно понимать построение системы управления, обеспечивающей выполнение



всех предъявляемых к ней технических требований. Проектируемая система управления должна обеспечивать приемлемое качество переходных процессов, необходимую точность и грубость (робастность) к неопределенности в модели объекта.

Требования к проектируемой системе могут формулироваться как во временной, так и в частотной областях [5]. Качество переходных процессов в смысле запаса устойчивости (удаленности от границы устойчивости) и быстродействия (быстроты реагирования на управляющие и возмущающие воздействия) может характеризоваться во времени видом переходного процесса на типовое воздействие, расположением полюсов и нулей передаточной функции замкнутой системы и др.

Во временной области требования к запасу устойчивости по виду кривой переходного процесса при единичном воздействии могут задаваться в виде, например, максимального значения регулируемой величины, значения перерегулирования, допустимого числа колебаний и др. Быстродействие системы может определяться по длительности переходного процесса.

Расположение и вид корней характеристического полинома (полюсов передаточной функции замкнутой системы) также определяют характер переходного процесса, так как они однозначно определяют решение однородного дифференциального уравнения, описывающего модель объекта. Поэтому требования к запасу устойчивости и быстродействию, не рассматривая кривые переходного процесса, можно сформулировать, накладывая ограничения на корни характеристического полинома.

Следовательно, задавая ограничения на расположение и вид корней характеристического полинома, мы задаем ограничения во временной области на вид переходного процесса и, очевидно, на максимальные значения регулируемой величины, значения перерегулирования и времени переходного процесса и др. Поэтому *корневой метод* размещения полюсов передаточной функции замкнутой системы в заданной области на комплексной плоскости достаточно удобен для задания требований к качеству переходных процессов.

Таким образом, требования к расположению полюсов передаточной функции замкнутой системы в некоторой заданной области позволяет задавать ограничения на:

- быстродействие, которое может быть оценено по степени устойчивости (абсолютной величине действительной части ближайшего к мнимой оси корня);
- запас устойчивости, который может быть оценен по колебательности (максимальному отношению мнимой части корня к его действитель-

ной части) или параметру затухания (коэффициенту демпфирования);

- максимальную угловую частоту собственных колебаний системы (максимальную абсолютную величину мнимой части корня).

В теории управления широко используется аппарат линейных матричных неравенств (ЛМН) [6—10]. Он хорошо подходит для синтеза регулятора в обратной связи, когда различные требования к замкнутой системе можно задавать в виде линейных матричных неравенств.

Концепция расположения полюсов в выпуклой области, которая может быть описана линейными матричными неравенствами, предложена в работе [6]. Класс областей, описываемый ЛМН (см. п. 2.2), представляет собой достаточно широкое множество областей для размещения полюсов, включая полуплоскости, круги, секторы, вертикальные и горизонтальные полосы, а также любые пересечения этих областей. В соответствии с данной концепцией процедура синтеза регулятора сводится к минимизации какого-либо критерия оптимальности на данной ЛМН-области. Так, в работах [6, 7] задача синтеза  $H_\infty$ -оптимального регулятора с расположением полюсов передаточной функции замкнутой системы в ограниченной выпуклой области на комплексной плоскости сводится к решению ЛМН.

Вопросы чувствительности к возмущениям и шумам, а также точностные характеристики при таком подходе считаются менее сложными и не рассматриваются, однако они требуют дополнительного решения.

Альтернативный путь дает синтез системы управления *в частотной области*. Он основан на частотных свойствах объекта, частотных критериях устойчивости и качества переходных процессов, частотных методах анализа и синтеза систем [5].

Одним из широко распространенных современных методов синтеза многомерных систем в частотной области является  $H_\infty$ -метод формирования контура, предложенный в работе [17]. Под методом формирования контура замкнутой системы в частотной области понимают метод синтеза, при котором разработчик непосредственно определяет форму амплитудно-частотной характеристики разомкнутой или замкнутой систем. В общем случае передаточная функция многомерной системы матричная. Элементы матрицы представляют собой передаточные функции от каждого входа к каждому выходу системы. Началом построения более строгой классической теории управления в частотной области, распространенной на многомерные системы, послужила статья [11], посвященная роли сингулярных чисел в анализе и синтезе многомерных систем управления. Зависимость сингулярных чисел матричной передаточной функции

от частоты представляет собой обобщение амплитудной частотной характеристики. В системах с одним входом и одним выходом эти понятия тождественны.

Сингулярные числа комплекснозначной матрицы  $A$  определяются как квадратные корни из собственных чисел матрицы  $A^*A$ , где  $A^*$  — эрмитово сопряженная матрица. Они характеризуют по соответствующему выходу многомерной системы коэффициент усиления на заданной частоте [11]. Для квадратной матрицы передаточных функций число сингулярных чисел равно числу выходов системы. На заданной частоте минимальный (максимальный) коэффициент усиления многомерной системы характеризуется соответственно минимальным (максимальным) сингулярным числом.

Для многомерных систем требования к форме амплитудно-частотных характеристик замкнутой системы формулируются в терминах ограничений типа неравенств на сингулярные числа многомерных передаточных функций замкнутой [11–15] или разомкнутой [16, 17] систем.

Требования к замкнутой системе могут быть сформулированы в частотной области в виде требований к максимальным и минимальным значениям сингулярных чисел многомерной передаточной функции разомкнутой системы [16]. Принципиальная идея  $H_\infty$ -метода формирования контура в данном случае в многомерных системах заключается в том, что максимальные сингулярные числа матричных передаточных функций *замкнутой* системы, характеризующие коэффициент усиления по соответствующему выходу, могут быть непосредственно *аппроксимированы в соответствующих частотных диапазонах* максимальными или минимальными сингулярными числами соответствующих матричных передаточных функций *разомкнутой* системы.

Таким образом, основные требования состоят в:

- высоком коэффициенте усиления (ограничение снизу на минимальные значения сингулярных чисел (обозначение  $\underline{\sigma}(\cdot)$ ) на низких частотах, позволяющем уменьшить ошибку слежения и влияние возмущений на входе и выходе объекта;
- малом коэффициенте усиления (ограничение сверху на максимальные значения сингулярных чисел (обозначение  $\bar{\sigma}(\cdot)$ ) на высоких частотах для парирования шума и повышения робастности (грубости) к неопределенности в модели объекта;
- плавном переходе в области частоты среза контура.

В области частоты среза коэффициент усиления контура не должен убывать быстрее, чем  $-20$  дБ на декаду, чтобы были желаемые робастная устойчи-

вость, запасы по амплитуде и фазе, перерегулирование и параметр затухания [18, 19].

Рассмотрим замкнутую систему управления с объектом управления  $G$  и регулятором  $K$ , изображенную на рис. 1, где  $r$  — командный сигнал,  $e$  — ошибка слежения,  $u$  — управление,  $y$  — выход объекта,  $d$  — возмущение,  $n$  — шум измерения. Передаточная функция разомкнутой системы  $L = GK$ . Передаточная функция замкнутой системы с *отрицательной* обратной связью от командного сигнала  $r$  к ошибке слежения  $e$  называется функцией чувствительности  $S = (I + GK)^{-1}$ , а передаточная функция от командного сигнала  $r$  к выходу  $y$  объекта называется функцией дополнительной чувствительности  $T = GK(I + GK)^{-1}$ , где  $I$  — единичная матрица соответствующей размерности. В принятых обозначениях на рис. 2 приведена графическая иллюстрация основных требований к формированию контура разомкнутой системы. Под желаемой формой контура понимается желаемое поведение графиков сингулярных чисел от частоты для многомерной передаточной функции разомкнутой системы. На рисунке по оси абсцисс отложена угловая частота  $\omega$  в логарифмическом масштабе, а по оси ординат  $A$  — значения сингулярных чисел передаточных функций в децибелах.

Желаемая форма контура передаточной функции разомкнутой системы определяется тем, что на графики минимального  $\underline{\sigma}(GK)$  и максимального  $\bar{\sigma}(GK)$  сингулярных чисел передаточной функции разомкнутой системы накладываются частотные ограничения (рис. 2). В области низких частот  $\omega < \omega_L$  график минимального сингулярного числа расположен выше заданного проектировщиком ограничения  $A_L(\omega)$ . В области высоких  $\omega > \omega_U$  график максимального сингулярного числа расположен ниже заданного проектировщиком ограничения  $A_U(\omega)$ . Ограничения в области средних частот не налагаются, в чем состоит недостаток метода.

При выполнении частотных ограничений на сингулярные числа передаточной функции *разомкнутой* системы гарантируется, что графики сингулярных чисел передаточной функции *замкнутой* системы также удовлетворяют некоторым ограничениям. В области низких частот  $\omega < \omega_L$

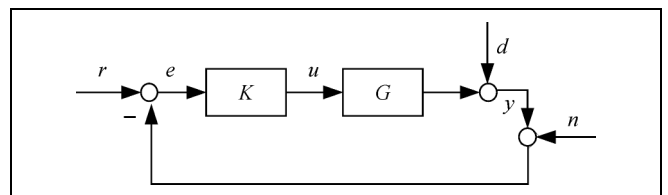


Рис. 1. Замкнутая система управления

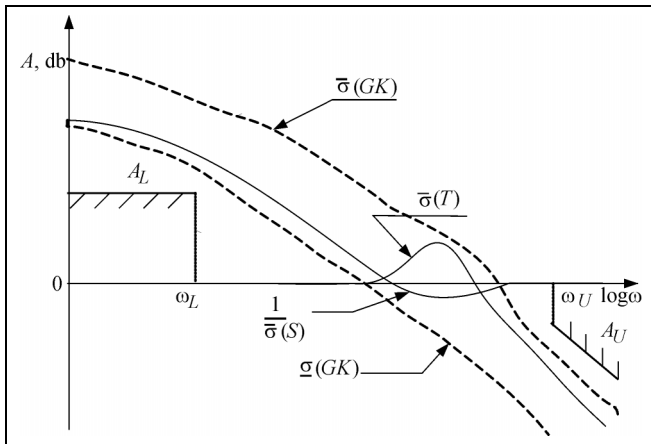


Рис. 2. Требования к сингулярным числам разомкнутой системы

график обратного значения максимального сингулярного числа  $1/\bar{\sigma}(S)$  функции чувствительности  $S = (I - GK)^{-1}$  расположен выше графика минимального сингулярного числа передаточной функции разомкнутой системы  $\underline{\sigma}(GK)$ . В области высоких частот  $\omega > \omega_U$  график максимального сингулярного числа  $\bar{\sigma}(T)$  функции дополнительной чувствительности  $T = GK(I - GK)^{-1}$  расположен ниже графика максимального сингулярного числа  $\bar{\sigma}(GK)$  передаточной функции разомкнутой системы. Более подробно указанные свойства передаточных функций рассматриваются в п. 2.6.

В работе [17] предложен оригинальный  $H_\infty$ -метод формирования контура для многомерных систем (см. п. 2.6). В ней впервые выдвинута идея применения нормализованной взаимно простой факторизации [20] модели объекта для обеспечения робастной устойчивости на основе решения задачи  $H_\infty$ -оптимизации (см. п. 2.4). Центральный элемент в предложенном методе заключается в решении задачи робастной стабилизации [21].

Задача робастной стабилизации состоит в нахождении максимальной неопределенности (робастного запаса устойчивости), при которой единственный регулятор  $K$  обеспечит устойчивость замкнутой системы для семейства возмущенных объектов с ограниченными по  $H_\infty$ -норме возмущениями (см. п. 2.5).

В методе  $H_\infty$ -формирования контура задача робастной стабилизации решается не для исходного, а для нового обобщенного объекта, образованного с помощью формирующих функций (префильтра и постфильтра) — более подробно см. п. 2.6. Требуемые характеристики качества и робастности замкнутой системы обеспечиваются благодаря выбору соответствующих формирующих функций, а

решение задачи робастной стабилизации *гарантирует* устойчивость замкнутой системы. Отметим, что в данном методе не требуется информации о фазовой характеристике номинального объекта  $G$ . Кроме того, значение запаса робастной устойчивости является единственным индикатором, характеризующим степень достижения задаваемых требований к замкнутой системе.

Каждый из кратко описанных методов (корневой и частотный) синтеза регулятора обладает своими достоинствами и недостатками. Корневой метод по расположению полюсов передаточной функции замкнутой системы в заданной области на комплексной плоскости очень удобен для задания требований к качеству переходных процессов (к быстродействию и запасу устойчивости). Кроме того, он позволяет в явном виде задавать требования к замкнутой системе в виде ограничения на параметр затухания (коэффициент демпфирования). Однако вопросы чувствительности к возмущениям и шумам, а также точностные характеристики требуют дополнительного решения.

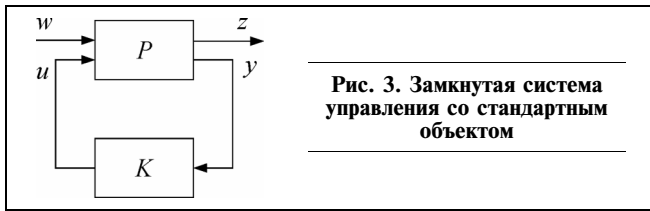
$H_\infty$ -метод формирования контура позволяет в частотной области задавать требования к быстродействию, точности слежения, уровню подавления шумов и возмущений. Требование к качеству переходных процессов в виде ограничения на колебательность (параметр затухания) в явном виде не задается. В частотной области аperiodичность переходного процесса определяется наклоном в  $-20$  дБ на декаду графиков сингулярных чисел (в логарифмическом масштабе) в области частоты среза. В  $H_\infty$ -методе формирования контура удовлетворение ограничения на колебательность (близость к наклону в  $-20$  дБ на декаду) может быть обеспечено *только* с помощью формирующих функций (см. п. 2.6), выбор которых представляет собой достаточно сложную задачу (особенно в классе формирующих функций низкого порядка).

Комбинированный подход, объединяющий  $H_\infty$ -метод формирования контура [17] и расположение полюсов замкнутой системы в заданной ЛМН-области [6], предложен в работе [22] для решения энергетической задачи. В ней с помощью аппарата ЛМН решается классическая задача робастной стабилизации для объекта, представленного в виде нормализованной левой взаимно простой факторизации.

## 2. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В РАБОТЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И МЕТОДЫ

### 2.1. Стандартный объект

Произвольная многомерная замкнутая система с объектом управления  $G(s)$  и регулятором  $K(s)$  в *положительной* обратной связи (см. рис. 1) может



быть представлена в виде структурной схемы, изображенной на рис. 3. Объект управления  $G(s)$  называется номинальным, а объект  $P(s)$  — стандартным объектом.

Стандартный объект имеет два входа, а именно: обобщенный вектор всех входов  $w$ , включающий в себя командный сигнал, внешние возмущения и шумы, и вектор управления  $u$ .

Выходами стандартного объекта является обобщенный вектор управляемых выходов  $z$ , обычно включающий в себя сигнал ошибки, и вектор измеряемых выходов  $y$ .

Стандартный объект задается уравнениями вида

$$\begin{bmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

где  $Z(s)$ ,  $Y(s)$ ,  $W(s)$  и  $U(s)$  — преобразования Лапласа сигналов соответственно  $z$ ,  $y$ ,  $w$  и  $u$ ,  $s$  — переменная оператора Лапласа.

Стандартный объект  $P(s)$  обязательно включает в себя номинальный объект  $G(s)$  и всевозможные связи, а также, при необходимости, произвольные передаточные функции (см., например, работу [12]). Произвольные передаточные функции (например, префильтр и постфильтр) используются для формирования требований к замкнутой системе в частотной области. Обычно блок  $P_{22}(s)$  является номинальным объектом  $G(s)$ .

Замкнутая система управления определяется уравнениями вида

$$\begin{aligned} Z(s) &= P_{11}(s)W(s) + P_{12}(s)U(s), \\ Y(s) &= P_{21}(s)W(s) + P_{22}(s)U(s), \\ U(s) &= K(s)Y(s). \end{aligned}$$

Передаточная функция замкнутой системы  $T_{wz}(P, K)$  от обобщенного вектора входов  $w$  к обобщенному вектору контролируемых выходов  $z$  определяется выражением

$$T_{wz}(P, K) = P_{11} + P_{12}K(I + P_{22}K)^{-1}P_{21}. \quad (2.2)$$

Стандартный объект управления  $P(s)$  описывается в пространстве состояний системой линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_{1w}w + B_{2u}u, \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u, \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $x$  — вектор внутреннего состояния системы.

Связь между матричными передаточными функциями  $P_{ij}(s)$  стандартного объекта и представлением в пространстве состояний стандартного объекта определяется уравнениями вида

$$P_{ij} = C_i(sI - A)^{-1}B_j + D_{ij}, \quad i, j = 1, 2.$$

## 2.2. ЛМН-область

Описание выпуклой области на комплексной плоскости линейными матричными неравенствами приведено в работе [6].

Рассмотрим область  $D$  левой комплексной полуплоскости  $C^-$ , которую можно определить следующим образом:

$$D = \{z \in C^- : L + zM + \bar{z}M^T\},$$

где  $L = L^T$  и  $M$  — действительные матрицы,  $z$  — комплексная переменная, а  $\bar{z}$  — комплексно сопряженная. Область  $D$ , описываемая линейными матричными неравенствами, называется ЛМН-областью.

Матричнозначная функция  $f_D(z) = L + zM + \bar{z}M^T$  называется характеристической функцией множества  $D$  [6]. Значения матриц  $L$  и  $M$  определяют конкретный вид выпуклой области на комплексной плоскости.

В теории управления в аспекте расположения полюсов передаточной функции замкнутой системы интересны следующие виды элементарных ЛМН-областей.

- $D_1(z)$  — полуплоскость  $\text{Re}(z) < -\eta$ :

$$f_{D_1}(z) = z + \bar{z} + 2\eta < 0.$$

Матрицы, задающие вид области, имеют вид  $L = 2\eta$ ,  $M = 1$ . Характеристическая функция множества  $f_{D_1}(z)$  определяет все точки  $z$  на комплексной плоскости, расположенные левее прямой  $\text{Re}(z) < -\eta$ .

- $D_2(z)$  — сектор, образованный двумя лучами, выходящими из начала координат и симметрично расположенными относительно вещественной оси под некоторым углом  $\varphi$ :

$$f_{D_2}(z) = \begin{bmatrix} \sin \varphi (z + \bar{z}) & \cos \varphi (z - \bar{z}) \\ -\cos \varphi (z - \bar{z}) & \sin \varphi (z + \bar{z}) \end{bmatrix} < 0.$$

Матрицы, задающие вид области, имеют вид:

$$L = 0, \quad M = \begin{bmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi \\ -\cos \varphi & \sin \varphi \end{bmatrix}.$$



Характеристическая функция множества  $f_{D_2}(z)$  определяет все точки  $z$  множества на комплексной плоскости, расположенные между двумя лучами.

- $D_3(z)$  — круг с центром в точке  $(-q, 0)$  и радиусом  $r$ :

$$f_{D_3}(z) = \begin{bmatrix} -r & q+z \\ q+\bar{z} & -r \end{bmatrix} < 0.$$

Матрицы, задающие вид области, имеют вид:

$$L = \begin{bmatrix} -r & q \\ q & -r \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Характеристическая функция множества  $f_{D_3}(z)$  определяет все точки  $z$  множества на комплексной плоскости, расположенные внутри окружности с центром в точке  $(-q, 0)$  и радиусом  $r$ .

Основные свойства ЛМН-областей [6, 7]:

- пересечение ЛМН-областей также может быть описано линейными матричными неравенствами, т. е. является ЛМН-областью;
- любая выпуклая область на комплексной плоскости, симметричная относительно действительной оси, может быть аппроксимирована ЛМН-областью с любой заданной точностью.

Важной с точки зрения разработчика систем управления представляет изображенная на рис. 4 ЛМН-область, образованная пересечением элементарных областей  $D_4 = D_1 \cap D_2 \cap D_3$ , с характеристической функцией вида

$$f_{D_3} = \begin{bmatrix} f_{D_1} & 0 & 0 \\ 0 & f_{D_2} & 0 \\ 0 & 0 & f_{D_3} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

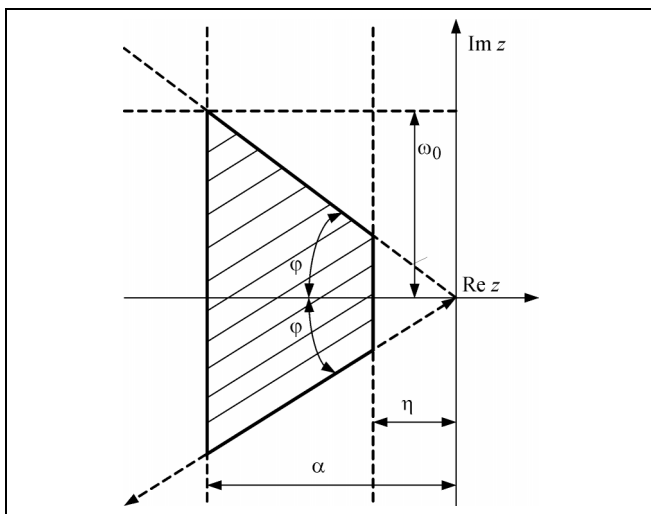


Рис. 4. Заданная ЛМН-область

Размещение полюсов замкнутой системы в указанной области гарантирует:

- затухание колебаний переходных процессов не менее  $\eta$ ;
- колебательность не более  $\mu = \operatorname{tg} \varphi$  или параметр затухания (коэффициент демпфирования) не менее  $\zeta = \cos \varphi$ ;
- максимальную угловую частоту собственных незатухающих колебаний не более  $\omega_0 = \alpha \operatorname{tg} \varphi$ .

Напомним, что задача размещения полюсов в заданной области может рассматриваться в совокупности с другими целями управления, такими как минимизация нормы передаточной функции замкнутой системы [6, 7].

### 2.3. $H_\infty$ -норма передаточной функции

Для устойчивой (не имеющей полюсов при  $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ ) и правильной (порядок полинома числителя не более порядка полинома знаменателя) передаточной функции  $F(s)$   $H_\infty$ -норма определяется как [23]

$$\|F(j\omega)\|_\infty = \sup_{\omega} \{\bar{\sigma}(F(j\omega)), \omega \in [0, \infty)\},$$

где

$$\bar{\sigma}(\omega) \equiv \sigma_{\max}(\omega) = \max_i \{\lambda_i^{\frac{1}{2}}(F^*(j\omega)F(j\omega))\} —$$

максимальное сингулярное значение матрицы  $F(j\omega)$ ,  $\lambda_i$  — собственные числа произведения матриц, «звездочка» означает комплексное сопряжение.

Для скалярной функции  $H_\infty$ -норма равна максимальному значению амплитудной частотной характеристики. Класс функций с конечной  $H_\infty$ -нормой состоит из устойчивых физически реализуемых передаточных функций. Использование  $H_\infty$ -нормы в качестве критерия оптимальности при синтезе многомерных систем основано на том факте, что она может служить мерой усиления системы. Иначе,  $H_\infty$ -норма передаточной функции есть энергия выхода системы при подаче на вход сигнала с единичной энергией. Если выходом является ошибка, а входом — возмущение, то минимизируя  $H_\infty$ -норму передаточной функции, мы минимизируем энергию ошибки для наихудшего случая входного возмущения.

### 2.4. Задача $H_\infty$ -оптимизации

Задача нахождения  $H_\infty$ -оптимального регулятора формулируется следующим образом [23]:

для объекта управления  $G$  найти регулятор  $K$  такой, чтобы:

- замкнутая система была внутренне устойчива (все состояния системы асимптотически стремятся к нулевому из произвольного начального состояния при нулевых внешних входах  $w$ );
- для  $H_\infty$ -нормы передаточной функции замкнутой системы (2.2) выполнялось равенство

$$\|T_{wz}(P, K)\|_\infty = \gamma_{\min}, \quad (2.5)$$

где  $\gamma_{\min}$  — минимально возможное значение нормы для заданного объекта  $P$ .

В работе [23] был предложен метод решения задачи  $H_\infty$ -оптимизации, так называемый «2-Риккати подход». Его основная идея состоит в том, что задача нахождения регулятора, минимизирующего  $H_\infty$ -норму передаточной функции замкнутой системы  $T_{wz}$  от внешнего входа  $w$  к контролируемому выходу  $z$ , сводится к задаче поиска регулятора, который обеспечивает заданное значение  $\gamma$  ее  $H_\infty$ -нормы, т. е. решается следующая субоптимальная задача:

найти регулятор  $K$  такой, чтобы выполнялось неравенство

$$\|T_{wz}(P, K)\|_\infty < \gamma, \quad (2.6)$$

где  $\gamma > \gamma_{\min}$  и  $K$  — допустимый регулятор.

Эта задача решается в пространстве состояний. Вычисление  $H_\infty$ -субоптимального регулятора основывается на решении двух обобщенных алгебраических уравнений Риккати. Для решения задачи минимизации (2.5) применяется итерационная процедура по  $\gamma$ . На каждом шаге решается субоптимальная задача (2.6). На первом шаге  $\gamma$  задается заведомо больше  $\gamma_{\min}$ . Затем значение  $\gamma$  уменьшается, и субоптимальная задача решается до тех пор, пока существуют неотрицательно определенные решения алгебраических уравнений Риккати—Лурье. Полученное в результате итерационной процедуры минимальное значение  $\gamma$ , «близкое» к  $\gamma_{\min}$  с заданной степенью точности, а также решения обобщенных алгебраических уравнений Риккати—Лурье однозначно определяют робастный  $H_\infty$ -субоптимальный регулятор.

В работе [6] представлен алгоритм построения  $H_\infty$ -субоптимальных регуляторов, альтернативный «2-Риккати подходу». Обобщенные алгебраические уравнения Риккати—Лурье по управлению и фильтрации [23] заменяются неравенствами Риккати—Лурье, и множество решений данных неравенств используется для параметризации всех  $H_\infty$ -субоптимальных регуляторов, включая регуляторы пониженного порядка. Синтез регулятора производится при минимизации значения  $\gamma$  на ос-

нове множества пар симметричных матриц  $R$  и  $S$ , удовлетворяющих системе матричных неравенств

$$\begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AR + RA^T & RC_1^T & B_1 \\ C_1 R & -\gamma I & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.7)$$

$$\begin{bmatrix} N_S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T S + SA & SB_1 & C_1^T \\ B_1^T S & -\gamma I & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0, \quad (2.8)$$

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0, \quad (2.9)$$

где  $0$  и  $I$  соответственно нулевая и единичная матрицы соответствующей размерности, а матрицы  $N_R$  и  $N_S$  определяют базис нуль-пространств (ядро) соответственно  $(B_2^T \ D_{12}^T)$  и  $(C_2 \ B_{21})$ .

Матрицы  $A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{12}, D_{21}$  и  $D_{22}$  определяются (см. п. 2.1) стандартным объектом (2.3).

### 2.5. Задача робастной стабилизации

Более общим описанием неопределенности, которое позволяет как нулям, так и полюсам передаточной функции находиться в правой полуплоскости, является взаимно простое описание неопределенности [20]. Нормализованная левая взаимно простая факторизация [21] передаточной функции  $G(s)$  модели объекта означает представление в виде  $G(s) = M(s)^{-1}N(s)$ , если матричные передаточные функции (факторы)  $M(s)$  и  $N(s)$  принадлежат множеству устойчивых действительных рациональных матричных передаточных функций и  $M(s)M^*(s) + N(s)N^*(s) = I$  для всех  $s$ , находящихся на мнимой оси.

Задача робастного проектирования состоит в том, чтобы одним регулятором стабилизировать, т. е. обеспечить устойчивость замкнутой системы, не только номинальный объект  $G(s)$ , но и все семейство возмущенных объектов с ограниченными по  $H_\infty$ -норме возмущениями.

Множество возмущенных объектов с ограниченным по  $H_\infty$ -норме возмущениями  $\Delta M(s)$  и  $\Delta N(s)$  задается следующим образом:

$$\Omega_\varepsilon = \{(M + \Delta M)^{-1}(N + \Delta N) : \|[\Delta M, \Delta N]\|_\infty \leq \varepsilon\}.$$

Таким образом, задача робастной стабилизации состоит в том, чтобы найти регулятор  $K$  в обратной связи, который стабилизирует для заданного значения неопределенности  $\varepsilon$  все возмущенные объекты из множества возмущенных объектов  $\Omega_\varepsilon$ .



Следовательно, задача состоит в нахождении максимальной неопределенности, определяемой значением  $\varepsilon_{\max}$ , при которой регулятор  $K$  обеспечит устойчивость замкнутой системы для всех возмущенных объектов. В рамках  $H_\infty$ -оптимизации данная задача формулируется следующим образом:

Найти стабилизирующий регулятор  $K$  такой, что

$$\left\| \begin{matrix} (I - GK)^{-1} M^{-1} \\ K(I - GK)^{-1} M^{-1} \end{matrix} \right\|_\infty \leq \gamma \leq \varepsilon^{-1}, \quad (2.10)$$

где  $K$  выбирается из множества регуляторов, стабилизирующих объект управления  $G$ .

В работе [21] показано, что для случая нормализованной левой взаимно простой факторизации модели объекта выполняется равенство  $H_\infty$ -норм двух передаточных функций, а именно:

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{matrix} (I - GK)^{-1} M^{-1} \\ K(I - GK)^{-1} M^{-1} \end{matrix} \right\|_\infty = \\ & = \left\| \begin{matrix} (I - GK)^{-1} & (I - GK)^{-1} G \\ K(I - GK)^{-1} & K(I - GK)^{-1} G \end{matrix} \right\|_\infty. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из равенства норм вытекает *принципиально важный вывод*:  $H_\infty$ -оптимальный регулятор, полученный при решении задачи робастной стабилизации (2.10), также является  $H_\infty$ -оптимальным при минимизации  $H_\infty$ -нормы передаточной функции замкнутой системы вида

$$T_{wz}(G, K) = \begin{bmatrix} (I - GK)^{-1} & (I - GK)^{-1} G \\ K(I - GK)^{-1} & K(I - GK)^{-1} G \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Данное свойство используется в  $H_\infty$ -методе формирования контура, предложенном в работе [17].

### 2.6. $H_\infty$ -метод формирования контура

Метод формирования контура позволяет достичь компромисса между качеством переходных процессов и робастной устойчивостью замкнутой системы.

Кратко поясним его основные идеи. Рассмотрим многомерную замкнутую систему управления с объектом  $G$  и регулятором  $K = K_\infty$ , изображенную на рис. 5. Пусть передаточные функции  $W_1 = I_1$  и  $W_2 = I_2$ , где  $I_1$  и  $I_2$  — единичные матрицы соответствующих размерностей. Тогда на замкнутую систему действуют два внешних входа:  $d_1$  на входе объекта  $G$  и  $d_2$  на его выходе. Матричная передаточная функция замкнутой системы  $T_{wz}$  от вектора

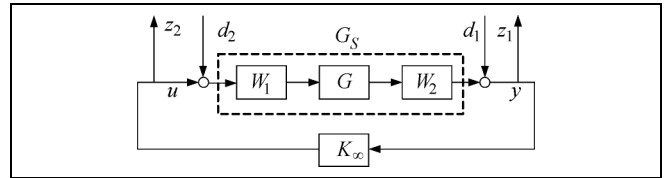


Рис. 5. Замкнутая система управления с формирующими функциями

внешних входов  $w = [d_1, d_2]^T$  к вектору выходов  $z = [z_1, z_2]^T$  имеет вид (2.12).

Рассмотрим матричную передаточную функцию  $T_{wz}$ . Малые значения максимальных сингулярных чисел передаточных функций  $(I - GK)^{-1}$  и  $(I - GK)^{-1} G$  обеспечивают требуемое качество функционирования замкнутой системы (подавление возмущений, уменьшение ошибки слежения). Для обеспечения робастности системы необходимо обеспечивать малые значения максимальных сингулярных чисел передаточных функций  $K(I - GK)^{-1}$  и  $GK(I - GK)^{-1} G$  (см. работу [17]). Как уже отмечалось, принципиальный момент  $H_\infty$ -метода формирования контура заключается в том, что максимальные сингулярные числа матричных передаточных функций замкнутой системы могут быть аппроксимированы в соответствующих частотных диапазонах максимальными или минимальными сингулярными числами соответствующих матричных передаточных функций разомкнутой системы и регулятора (см. рис. 2).

На низких частотах  $\omega < \omega_L$ , при которых  $\underline{\sigma}(GK) \gg 1$  имеем следующие аппроксимации

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}((I - GK)^{-1}) &\approx 1/\underline{\sigma}(GK), \\ \bar{\sigma}((I - GK)^{-1} G) &\approx 1/\underline{\sigma}(K). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Для случая высоких частот  $\omega > \omega_U$ , при которых  $\bar{\sigma}(GK) \ll 1$ , имеем аппроксимации вида

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(K(I - GK)^{-1}) &\approx \bar{\sigma}(GK), \\ \bar{\sigma}(K(I - GK)^{-1} G) &\approx \bar{\sigma}(K). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Обеспечение требований к качеству переходных процессов ( $\underline{\sigma}(GK)$  и  $\underline{\sigma}(K)$  большие) на низких частотах вступает в конфликт с требованием робастной устойчивости ( $\bar{\sigma}(K)$  и  $\bar{\sigma}(GK)$  малые) на высоких частотах. Компромисс достигается благодаря тому, что требования к качеству переходных процессов ( $\underline{\sigma}(GK)$  и  $\underline{\sigma}(K)$  большие) существенны на низких частотах, а требования робастной устой-



чивости ( $\bar{\sigma}(K)$  и  $\bar{\sigma}(GK)$  малые) важны на высоких частотах.

Далее рассмотрим замкнутую систему (см. рис. 5) при произвольных передаточных функциях  $W_1$  и  $W_2$ . Аппроксимации максимальных сингулярных чисел передаточных функций (2.13) и (2.14) будут соответственно иметь вид

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}((I - W_2GW_1K_\infty)^{-1}) &\approx 1/\underline{\sigma}(W_2GW_1K_\infty), \\ \bar{\sigma}((I - W_2GW_1K_\infty)^{-1}W_2GW_1) &\approx 1/\underline{\sigma}(K_\infty), \\ \bar{\sigma}(K_\infty(I - W_2GW_1K_\infty)^{-1}) &\approx \bar{\sigma}(W_2GW_1K_\infty), \\ \bar{\sigma}(K_\infty(I - W_2GW_1K_\infty)^{-1}W_2GW_1) &\approx \bar{\sigma}(K_\infty). \quad (2.15)\end{aligned}$$

Таким образом, требования к максимальным сингулярным числам замкнутой системы могут быть сформулированы в терминах сингулярных чисел разомкнутой системы.

В соответствии с этим методом разработчик формирует новый обобщенный объект с префильтром  $W_1(s)$  и постфильтром  $W_2(s)$ , как показано на рис. 5. Это позволяет задать желаемое поведение сингулярных чисел разомкнутой системы в соответствии с основными требованиями формирования разомкнутой системы (высокий коэффициент усиления на низких частотах, малый коэффициент усиления на высоких частотах и плавный переход в области частоты среза контура). Требования к сингулярным числам разомкнутой системы задаются в виде минимальных и максимальных сингулярных чисел обобщенного объекта на всем диапазоне частот. Таким образом, графики сингулярных чисел обобщенного объекта задают желаемую форму разомкнутой системы.

Заданная желаемая форма контура достигается, если  $H_\infty$ -норма матрицы передаточных функций замкнутой системы от внешних входов  $d_1$  и  $d_2$  к выходам  $z_1$  и  $z_2$  минимизируется по всем стабилизирующим регуляторам  $K_\infty$  так, чтобы получить минимальное значение  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}\gamma &= \left\| T \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \\ &= \left\| \begin{array}{cc} (I - G_s K_\infty)^{-1} & (I - G_s K_\infty)^{-1} G_s \\ K_\infty (I - G_s K_\infty)^{-1} & K_\infty (I - G_s K_\infty)^{-1} G_s \end{array} \right\|_\infty \geq \gamma_{\text{opt}},\end{aligned}$$

где  $G_s = W_2GW_1$  — обобщенный («взвешенный») объект,  $K_\infty$  — регулятор. Величина, обратная  $\gamma$ , называемая запасом робастной устойчивости  $\varepsilon$ , принимает значения между 0 и 1. Чем больше  $\varepsilon$ , тем больше запас робастной устойчивости. В работе

[17] показано, что величина  $\varepsilon_{\text{max}}$  также является индикатором совместимости требований к замкнутой системе.

Если значение  $\varepsilon_{\text{max}}$  мало, то это значит, что требование к качеству переходных процессов и требование робастной устойчивости не могут выполняться одновременно. В этом случае разработчик должен выбрать новые префильтр  $W_1(s)$  и постфильтр  $W_2(s)$  для задания новой формы обобщенного объекта.

Процедура формирования контура состоит из следующих шагов.

**Шаг 1. Формирование контура.** Выбираются префильтр  $W_1(s)$  и (или) постфильтр  $W_2(s)$  номинального объекта  $G$  для формирования требований к сингулярным значениям желаемой разомкнутой системы. Новый обобщенный («формирующий») объект представляется в виде  $G_s = W_2GW_1$ . Предполагается, что  $W_1$  и  $W_2$  такие, что  $G_s$  не содержит скрытых неустойчивых мод.

**Шаг 2. Оценка совместимости требований к формированию контура.** Решается задача робастной стабилизации для объекта  $G_s$  и вычисляется максимальный запас робастной устойчивости  $\varepsilon_{\text{max}}$ . Для этого минимизируется  $H_\infty$ -норма передаточной функции замкнутой системы  $T_{wz}$  по всем стабилизирующим регуляторам  $K_\infty$  для получения оптимального значения  $\gamma_{\text{opt}}$  в виде

$$\begin{aligned}\gamma_{\text{opt}} &= \varepsilon_{\text{max}}^{-1} = \\ &= \left\| \begin{array}{cc} (I - G_s K_\infty)^{-1} & (I - G_s K_\infty)^{-1} G_s \\ K_\infty (I - G_s K_\infty)^{-1} & K_\infty (I - G_s K_\infty)^{-1} G_s \end{array} \right\|_\infty.\end{aligned}$$

Далее:

— если  $\varepsilon_{\text{max}} \ll 1$  (обычно  $\varepsilon_{\text{max}} < 0,25$ ), то возвращаемся к шагу 1 и выбираем новые  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$ ;

— иначе выбираем  $\varepsilon \leq \varepsilon_{\text{max}}$ ; при выбранном  $\varepsilon$  синтезируем регулятор  $K_\infty$ , который робастно стабилизирует объект  $G_s$  с областью робастной устойчивости  $\varepsilon$ , применяя подход, описанный в работе [21].

**Шаг 3. Синтез искомого регулятора.** Окончательный регулятор  $K$  представляется комбинацией регулятора  $K_\infty$  с префильтром  $W_1(s)$  и постфильтром  $W_2(s)$  в виде  $K = W_1K_\infty W_2$ .

Теоретический базис  $H_\infty$ -метода формирования контура состоит в том, что регулятор  $K_\infty$  не модифицирует желаемую форму контура существенным образом на низких и высоких частотах, если достигнутое значение  $\varepsilon_{\text{max}}$  слишком мало [24].



Решающую роль в синтезе играет процедура нахождения формирующих функций (префильтра  $W_1(s)$  и постфильтра  $W_2(s)$ ). Обобщенный объект  $G_s = W_2GW_1$  задает желаемое поведение сингулярных чисел (требуемое разработчиком) разомкнутой системы во всем диапазоне частот. Значение  $\gamma_{\text{opt}}$  характеризует меру близости (точность приближения) между сингулярным числом желаемой разомкнутой системы  $G_s = W_2GW_1$  (в виде обобщенного объекта) и полученной в результате синтеза  $K_\infty$  регулятора передаточной функции разомкнутой системы  $L = W_2GW_1K_\infty$ . Соотношение между ними имеет вид

$$\sigma(G_s K_\infty) = \sigma(W_2GW_1K_\infty) = \sigma(W_2GW_1) \pm \gamma_{\text{opt}} \text{ (дБ)}.$$

Таким образом, на графиках соответствующие сингулярные значения синтезированной разомкнутой системы находятся в некоторой трубке диаметром  $2\gamma_{\text{opt}}$  относительно соответствующих сингулярных значений желаемого обобщенного объекта.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первой части статьи приведены основные теоретические сведения по синтезу робастного  $H_\infty$ -регулятора с применением  $H_\infty$ -метода формирования контура и метода расположения полюсов замкнутой системы в заданной выпуклой области на комплексной плоскости. Оба метода основаны на аппарате линейных матричных неравенств. Во второй части будет приведена постановка и предложен алгоритм решения задачи синтеза регулятора для подавления возмущений в энергетической системе в аварийном режиме.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Кочкин В.И., Нечаев О.П. Применение статических компенсаторов реактивной мощности в электрических сетях энергосистем и предприятий. — М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2000.
2. FACTS: Modelling and Simulation in Power Networks / Tacha E., et al. — N.-Y.: John Wiley and Sons, 2004.
3. Flexible AC Transmission Systems (FACTS) / Ed. Yong Hua Song and Allan T. Johns. — London, IEE, 1999.
4. Hingorani N.G., Gyugyi L. Understanding FACTS: Concepts and Technology of Flexible AC Transmission Systems. — N.-Y.: IEEE Press, 2000.
5. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1972.

6. Chilali M., and Gahinet P.  $H_\infty$  Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach // IEEE Trans. AC. — 1996. — Vol. 41, N 3. — P. 358–367.
7. Chilali M., Gahinet P., Apkarian P. Robust Pole Placement in LMI Regions // IEEE Trans. AC. — 1999. — Vol. 44, N 12. — P. 2257–2270.
8. Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory / Boyd, S., et al. — Philadelphia: SIAM books, 1994.
9. Баландин Д.В., Коган М.М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. — М.: Физматлит, 2007.
10. Scherer C., Gahinet P., Chilali M. Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization // IEEE Trans. AC. — 1997. — Vol. 42, N 7. — P. 896–911.
11. Zames G. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses // IEEE Trans. AC. — 1981. — Vol. AC-26, N 2. — P. 301–320.
12. Francis B.A., A Course in  $H_\infty$  Control Theory, Lecture Notes in Control and Information Sciences. — N.-Y.: Springer-Verlag, 1987.
13. Essays on Control: Perspectives in the Theory and its Applications. Progress in System and Control Theory / Ed. H.L. Trentelman, J.C. Willems. — Birkhauser, 1993. — Vol. 14.
14. Postlethwait L, Tsai M., Gu D. Weighting function selecting in  $H_\infty$  design // 11<sup>th</sup> IFAC World congress, Tallinn, Estonia, August 13–17. — 1990. — Vol. 5. — P. 104–109.
15. Gjerrit Meinsma.  $H_\infty$  control with Unstable and Nonproper Weights // Proc/ of 3<sup>rd</sup> European Control Conference, Roma, Italy, September 1995.
16. Doyle J.C., Stein G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical / Modern Synthesis // IEEE Trans. AC. — 1981. — Vol. AC-26, N 1. — P. 4–16
17. McFarlane and Glover K. A Loop Shaping Design Procedure Using  $H_\infty$  Synthesis // IEEE Trans. AC. — 37(6). — P. 759–769.
18. Papageorgiou G. Robust Control System Design:  $H_\infty$  Loop Shaping and Aerospace Applications // PhD thesis, University of Cambridge, Department of Engineering, July 1998.
19. Skogestad S. and Postlethwaite I. Multivariable Feedback Control. — London: John Wiley and Sons, 2001.
20. Vidyasagar M. Control System Synthesis: A Coprime Factorization Approach. — USA, Cambridge: MIT Press, 1985.
21. McFarlane D.C. and Glover K. Robust Controller Design Using Normalized Coprime Factorization Description. — N.-Y.: Springer-Verlag, 1990.
22. Bikash Pal, Balarko Chaudhuri, Robust Control in Power Systems. — N.-Y.: Springer Science + Business Media, Inc., 2005. — P. 140–150.
23. State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems / J.C. Doyle et al. // IEEE Trans. AC. — Vol. 34, N 8. — 1989. — P. 831–847.
24. Zhou K., Doyle J.C., Glover K. Robust and Optimal Control. — New Jersey: Prentice-Hall, 1996.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.Д. Земляковым.

Курдюков Александр Петрович — д-р техн. наук, зав. лабораторией, ☎ (495) 334-92-61, e-mail: akurd@ipu.ru,

Тимин Виктор Николаевич — канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник, ☎ (495) 334-92-41, e-mail: timin.victor@rambler.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова, г. Москва.