УДК 519.714.2

АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ С ПЕРЕХОДОМ В ПРОСТРАНСТВО ПАРАМЕТРОВ

С.С. Гусев, В.М. Чадеев

Рассмотрен алгоритм идентификации статического объекта в случае, когда ошибка измерения выхода объекта приводит к выходу оценок параметров за допустимую область с некоторой вероятностью p, и в случае больших ошибок, когда эта вероятность равна нулю. Дан анализ связи ошибок измерения и вероятного распределения ошибки определения параметров.

Ключевые слова: идентификация, ограничения, статический объект, оценки параметров, ошибка измерения выхода.

ВВЕДЕНИЕ

Качество идентификации объекта управления в большой степени определяет и качество управления сложным объектом. Значительную роль играет учет априорной информации о структуре и параметрах объекта. В статье исследуется работа специального алгоритма идентификации, учитывающего априорную информацию о параметрах объекта и требующего большого объема вычислительных ресурсов. Однако в наше время такие объемы вполне доступны большинству пользователей. Исследуется работа алгоритма при наличии ошибки измерения выхода. Анализируется связь точности идентификации и ошибки измерения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим алгоритм идентификации, учитывающий априорную информацию о параметрах объекта. Будем рассматривать объект вида

$$y = xh^T, \tag{1}$$

где y — скалярный выход объекта, x — вектор-строка входных переменных размерности n, h — вектор-строка неизвестных параметров объекта тоже размерности n. Дополнительно об объекте (1) известно, что параметры h принадлежат априорно известной области H, т. е.

$$h \in H. \tag{2}$$

Задача состоит в том, чтобы по экспериментальным данным, заданным в виде матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & y_1 \\ 2 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ i & x_{i1} & x_{i2} & \dots & x_{in} & y_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s & x_{s1} & x_{s2} & \dots & x_{sn} & y_s \end{pmatrix} \tag{3}$$

определить оценки параметров h с учетом условия (2).

2. АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Из матрицы исходных экспериментальных данных (3) выделим матрицу входов размером $n \times s$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{s1} & x_{s2} & \dots & x_{sn} \end{pmatrix}$$

и матрицу выхода $Y^T = (y_1, y_2, \dots, y_s)$ размером $1 \times s$.

Предполагается, что строки матрицы X линейно независимы. Если в исходных данных есть линейно зависимые строки, то их необходимо удалить до применения алгоритма, сократив число данных. Это условие означает, что определитель матрицы, составленный из любых n строк матрицы X, не равен нулю.

Алгоритм идентификации, подробно описанный в работе [1], состоит в следующем. Из матрицы исходных данных (3) выбираются блоки из произвольных n строк (по размерности объекта). Для каждого блока составляется своя система уравнений. Соответствующая первому из таких блоков система уравнений имеет вид:

$$\begin{gathered} k_1x_{11} + k_2x_{12} + \dots k_nx_{1n} = y_1 \\ k_1x_{21} + k_2x_{22} + \dots k_nx_{2n} = y_2 \\ \dots \\ k_1x_{n1} + k_2x_{n2} + \dots k_nx_{nn} = y_n \end{gathered}$$

где k — оценки параметров объекта h, или в матричном виде $Xk^T = Y$.

Умножая левую и правую части этого равенства слева на X^T, получим систему нормальных уравнений

$$X^TXk^T = X^TY, \tag{4}$$

из которой методом наименьших квадратов вычисляются оценки параметров объекта (1).

Из матрицы (3) можно получить C_s^n таких n-мерных блоков, для каждого из которых строится свой вектор оценок параметров объекта (1). Все эти оценки параметров собраны в матрицу B, содержащую C_s^n строк и $2n$ столбцов и имеющую вид

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{L1} & a_{L2} & \dots & a_{Ln} & k_{L1} & k_{L2} & \dots & k_{Ln} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $L = C_s^n$.

В любой строке матрицы B в первых n позициях перечислены номера строк a_{ij} матрицы A (i — номер строки матрицы B, $i = 1, 2, \dots, L$), j — номер строки матрицы A, $j = 1, 2, \dots, s$)), использованных для вычисления n оценок k_{ij}, вычисленных по этим строкам и расположенных в матрице (5) на последних n позициях. Априорное условие (2) учитывается путем вычеркивания из матрицы (5) всех строк, в которых оценки k не удовлетворяют условию $k_i \in H$, где $k_i = (k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{in})$, $i = 1, 2, \dots, L$.

В результате вычеркивания получается матрица

$$B_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{Nn} & k_{N1} & k_{N2} & \dots & k_{Nn} \end{pmatrix}, \ k_i \in H,$$

где $N \leqslant L$.

Введем вектор $w^T = (w(1), w(2), \dots, w(s))$, размерности s, где $w(j)$ — частота использования j-й строки матрицы A в матрице B_0.

Введем матрицу F, отличающуюся от матрицы A тем, что в нее добавлен вектор-столбец w

$$F = \begin{pmatrix} w(1) & 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} & y_1 \\ w(2) & 2 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ w(s) & s & x_{s1} & x_{s2} & \dots & x_{sn} & y_s \end{pmatrix}.$$

Последний шаг алгоритма состоит в том, что строки матрицы F сортируются по первому столбцу так, чтобы значения $w(j)$ возрастали снизу вверх. Обозначим полученную таким образом матрицу через F_0.

Оператор, реализующий описанный алгоритм, обозначим через Ψ. Он преобразует матрицу исходных данных A в матрицу данных, отсортированную по частоте использования строк в матрице B_0, учитывающей априорные условия $k_i \in H$. Это можно записать как $F_0 = \Psi\{A\}$, $k_i \in H$.

Рассмотрим некоторые свойства оператора Ψ, позволяющие существенно повысить точность идентификации.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Докажем, что оператор Ψ преобразует матрицу исходных данных (3) таким образом, что данные с большими ошибками измерения с большой вероятностью оказываются внизу блока данных. Это позволяет отбросить часть данных с большими ошибками и использовать для идентификации только отфильтрованные данные.

Предположим, что входные переменные x измеряются без ошибок, а выход y — с ошибкой ε. Рассмотрим несколько основных случаев.

3.1. Большие ошибки

Предварительно введем некоторые определения.

Будем называть ошибку измерения конкретного выхода y_i большой, если при использовании этого выхода в любом n-мерном блоке оценки $k \notin H$.

Теорема 1. *Если в матрице исходных данных* (3) *точно в m произвольных строках выход y измеряется с большой ошибкой, а в остальных без ошибки, и выполняется условие $s > n + m$, то в результате применения оператора Ψ все строки с ошибкой окажутся внизу матрицы F_0, по верхним $s—m—n$ строкам этой матрицы могут быть получены точные оценки параметров объекта* (1). ♦

Доказательство.

Заметим, что из общего числа C_s^n строк матрицы (5) только C_{s-m}^n строк не будут содержать ошибочных выходов. Только эти строки войдут в матрицу B_0. Каждая строка в этой матрице будет встречаться C_{s-m-1}^{n-1} раз. Строки с ошибками (по определению большой ошибки) в матрицу B_0 не войдут и, следовательно, значение w для этих строк будет равно нулю. Поскольку оператор Ψ сортирует строки по частоте w, то это и доказывает утверждение. ♦

3.2. Общий случай

Рассмотрим теперь случай, когда ошибка измерения выхода y приводит к выходу оценок за область H только с некоторой вероятностью p для всех n-мерных блоков, в который вошел этот выход y. Ранее, при больших ошибках, эта вероятность была равна единице.

Пусть среди всех s строк матрицы исходных данных (3) только два произвольных измерения выхода сделаны с ошибкой. Для краткости будем называть n-мерный блок, не содержащий строки с ошибочными измерениями, чистым, а содержащий — ошибочным. Ссылки на n-мерный блок и однозначно ему соответствующую строку в матрице B будем использовать одновременно.

Теорема 2. *Если среди исходных данных* (3) *есть только два измерения выхода* y_i *и* y_j, *сделанных с ошибками, которые приводят к выходу оценок за область* H *с вероятностью* p_i *и* p_j (*для определенности* $p_i > p_j$) соответственно, то в результате применения оператора Ψ *в среднем будут выполняться неравенства* $w(k) > w(j) > w(i)$, $k \neq i$, $k \neq j$. ♦

Доказательство приведено в работе [2].

Подчеркнем, что последовательность строк, задаваемая условиями теоремы 2, выполняется только в среднем, а не в каждом конкретном случае.

3.3. Редкие ошибки

Если в объекте типа (1) входные x и выходные y переменные редко измеряются с ошибками, то рассмотренный алгоритм идентификации при соблюдении некоторых условий дает возможность по экспериментальным данным (3) точно определить неизвестные параметры h.

Теорема 3. *Если матрица исходных данных* A *содержит точно* m *переменных* (*входных или выходных*), *измеренных с ошибкой, то параметры объекта* (1) *могут быть определены точно при условии* $s > n + m + l$, *где* $l \geqslant 1$. ♦

Доказательство. В наихудшем случае все m ошибок будут распределены по разным строкам матрицы исходных данных (3). Соответственно оставшиеся, по крайней мере, $(n + l)$ строк не будут содержать ошибок. Следовательно, построенные по этим строкам оценки будут точными. В каких именно строках не было ошибок, заранее не известно. Но матрица (5) будет содержать C_{n+l}^n строк, в которых векторы оценок k будут совпадать. Совпадающие оценки и будут точными параметрами объекта. ♦

4. СВЯЗЬ ОШИБКИ И ВЕРОЯТНОСТЕЙ

При реализации описанного алгоритма промежуточные оценки вычисляются по методу наименьших квадратов с помощью формулы Крамера $k_i = |U_i|/|U|$, $i = 1, 2, ..., n$, где $|U| = |X^TX|$ — определитель системы нормальных уравнений (4), $|U_i|$ — определитель, который получается из определителя матрицы U заменой i-го столбца столбцом свободных членов системы нормальных уравнений (4).

При наличии ошибок измерения выхода оценки можно представить в виде [3] $k_j = |U_j|/|U| = h_j + |U_\varepsilon|/|U|$, где U_ε — матрица, содержащая ошибку ε в j-м столбце, или

$$k_j = h_j + \varepsilon|B_{ij}|/U, \qquad (6)$$

где $|B_{ij}|$ — минор матриц U_j, не содержащий ошибок измерения выхода.

Ошибка оценки параметров $\Delta h_j = h_j - k_j$ и ошибка измерения выхода ε связаны, как следует из формулы (6), следующим образом:

$$\Delta h = -\varepsilon|B_{ij}|/|U|.$$

Вероятностное распределение ошибки определения параметра Δh будет таким же, как и распределение ошибки ε измерения выхода с точностью до не зависящего от помехи коэффициента $|B_{ij}|/|U|$.

Если $f(\varepsilon)$ — плотность вероятности распределения центрированной ошибки измерения выхода ($M\{\varepsilon\} = 0$), то среднее значение ошибки определения параметра объекта будет определяться формулой

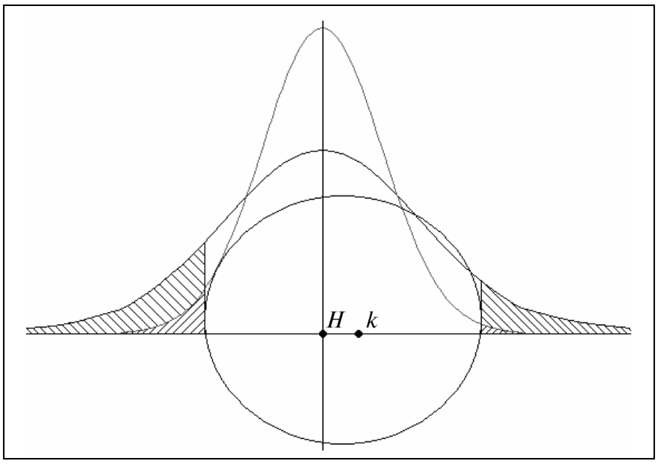
$$M\{\Delta h\} = -\int_{\varepsilon \notin Q} f(\varepsilon)\varepsilon\frac{|B_{ij}|}{|U|}\,d\varepsilon$$

и, очевидно, равно нулю.

Дисперсия ошибки определения параметра

$$D\{\Delta h\} = -\int_{\varepsilon \notin Q} f(\varepsilon)\varepsilon^2\frac{|B_{ij}|^2}{|U|^2}\,d\varepsilon.$$

Рассмотрим случай, когда априорно известная область существования параметров H представляет собой параллелепипед с ребрами, параллельными осям координат в пространстве параметров. Ошиб-



Распределение ошибки оценки

ка измерения выхода имеет центрированное нормальное распределение $N(0, \sigma)$. Для оценок параметров используются блоки по n произвольных строк исходных данных, в которых только один выход измеряется с ошибкой. Рассмотрим два блока данных, отличающихся тем и только тем, что в одном случае ошибка измерения выхода имеет распределение $N(0, \sigma_1)$, а в другом $N(0, \sigma_2)$. Для определенности $\sigma_1 > \sigma_2$. Тогда имеет место следующее утверждение.

При прочих равных условиях, вероятность p_1 выхода оценки k_j за границы области H в первом случае будет больше вероятности p_2 выхода оценки k_j за границы области H во втором. Доказательство непосредственно следует из рисунка.

Дисперсии ошибки измерения выхода ε и ошибки оценки Δh параметров связаны (в соответствии с формулой (6)) коэффициентом $a = -|B_{ij}|/|U|$, т. е. дисперсии оценок σ_{1h} и σ_{2h} вычисляются через дисперсии ошибки измерения выхода по формулам $\sigma_{1h} = a\sigma_1$ и $\sigma_{2h} = a\sigma_2$.

Плотность вероятности ошибки определения параметров при ошибке измерения выхода с параметрами $N(0, \sigma_1)$ и $N(0, \sigma_2)$ и определяется формулами

$$f_1(k_1) = \frac{1}{\sigma_{1h}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(h-k_1)^2}{2\sigma_{1h}^2}},$$

$$f_2(k_2) = \frac{1}{\sigma_{2h}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(h-k_2)^2}{2\sigma_{2h}^2}}.$$

Поскольку априорная область существования оценок в обоих случаях одна и та же, $h_{\min} < h_i < h_{\max}$, то для вычисления вероятностей необходимо выполнять интегрирование тоже в одинаковых пределах.

Вероятности выхода оценок за область H задаются формулами

$$p_1 = 1 - \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} f_1(k_1)dh,$$

$$p_2 = 1 - \int_{h_{\min}}^{h_{\max}} f_2(k_2)dh.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрен алгоритм идентификации статического объекта, учитывающий априорную информацию о его параметрах. Алгоритм преобразует блок исходных данных в множество блоков меньшей размерности. Для каждого из этих блоков вычисляются оценки параметров объекта и запоминаются номера строк, использованных для вычисления этих оценок. Оператор, реализующий описанный алгоритм, преобразует матрицу исходных данных в специальную матрицу, учитывающую частоту попадания оценок в область H. Рассмотрен объект, в котором входные переменные измерялись без ошибки, а выходные — с ошибкой.

Дан анализ связи ошибки измерения выхода с вероятностью выхода оценок параметров за априорно известную область существования параметров объекта. Найдены условия, при которых возможна точная идентификация объекта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чадеев В.М., Илюшин В.Б.* Метод идентификации, учитывающий априорную информацию о параметрах объекта // Тр. V междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'06. Москва, 30 января — 2 февраля 2006 г. / ИПУ РАН. — М. — 2006. — С. 1091—1105.
2. *Чадеев В.М., Гусев С.С.* Идентификация с ограничениями. Определение оценок параметров статического объекта // Тр. VII междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'08. Москва, 28 — 31 января 2008 г. / ИПУ РАН. — М. — 2006. — С. 261—269.
3. *Райбман Н.С., Чадеев В.М.* Построение моделей процессов производства. — М.: Энергия, 1975.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Ф. Пащенко.

Чадеев Валентин Маркович — д-р техн. наук, ведущий науч. сотрудник, e-mail: chavama@yandex.ru,

Гусев Сергей Сергеевич — аспирант, e-mail: gs-serg@mail.ru,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎ (495) 334-87-59.