УДК 519.8

АДАПТИВНОЕ ГАРАНТИРОВАННОЕ ОЦЕНИВАНИЕ С УЧЕТОМ ИНФОРМАЦИИ ПО МНОЖЕСТВУ «РОДСТВЕННЫХ» ОБЪЕКТОВ

К.Е. Афанасьева, В.И. Ширяев

Предложены алгоритмы оценивания состояния объекта с использованием информации о «родственных» объектах при наличии действующих на объект возмущений и помех (ошибок) в измерениях при неполных и неточных измерениях вектора объекта. Информация о возмущениях и ошибках измерений известна с точностью до некоторых заданных множеств. В случае изменения траектории движения объекта предложено использовать информацию о группе аналогичных объектов с целью определения модели дальнейшего движения рассматриваемого объекта.

Ключевые слова: адаптивное гарантированное оценивание, информационное множество, «родственные» объекты, разладка.

ВВЕДЕНИЕ

Во многих прикладных задачах движение объекта по одной траектории сменяется движением по другой траектории из рассматриваемого множества типов траекторий. В задачах навигации и сопровождения летательных аппаратов [1—3] изменение типа траектории может классифицироваться как «маневр». В терминах социально-экономических объектов изменение внешних или внутренних условий может повлечь за собой изменение развития объекта, которое проявится в виде изменения типа траектории объекта. Когда имеется множество аналогичных объектов, движение которых происходит сходным образом, представляется возможным в момент изменения характера движения объекта (разладки) выделить объект (объекты), траектория движения которого близка к рассматриваемой. Далее определить модели, опираясь на известную траекторию движения схожего («родственного») объекта. Оценка дальнейшего состояния объекта вычисляется как взвешенная оценка на основе параллельной работы фильтров, соответствующих одной из моделей «родственников» на основе применения, например, калмановской фильтрации [4, 5].

В данной работе оценка состояния объекта вычисляется также на основе параллельной работы фильтров, но в предположении либо отсутствия информации о законах распределения ошибок в измерениях и возмущениях, действующих на объект, либо при условии, что ошибки не подчиняются аксиоматике вероятностного подхода [6, 7]. Применяется гарантированный подход с использованием минимаксных фильтров [8, 9], где оценка состояния объекта вычисляется как пересечение множеств, полученных от нескольких фильтров. Работа продолжает исследования [4] и развивает подход [8 — 10].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается объект, описываемый уравнениями вида

$$x_{k+1} = A_k x_k + c_k + w_k; \quad y_{k+1} = Gx_{k+1} + v_{k+1}, \quad k = 0, 1, ..., n-1. \qquad (1)$$

Информация о векторах w_k, v_{k+1} и x_0 ограничивается заданием включений

$$x_0 \in X_0, \quad w_k \in W, \quad v_{k+1} \in V, \qquad (2)$$

где V, W и X_0 — известные выпуклые компакты. Матрица A_k считается неизвестной, c_k — неизвестная функция, матрица G известна.

Существует множество других аналогичных объектов $I = \{1, 2, ..., m\}$, описываемых известными уравнениями движения и измерений

$$x_{ik+1} = A_{ik} x_{ik} + c_{ik} + w_{ik}, \quad y_{ik+1} = Gx_{ik+1} + v_{ik+1}, \quad k = 0, 1, ..., n-1, \quad i = 1, 2, ..., m. \qquad (3)$$

Векторы

$$x_{i0} \in X_0, \quad w_{ik} \in W_i, \quad v_{ik+1} \in V_i, \qquad (4)$$

где V_i и W_i — известные выпуклые компакты.

Необходимо из множества I выбрать объект (группу объектов), наиболее похожий на объект, описываемый системой (1), (2); такие объекты будем называть «родственными». Схожесть объектов или «родственность» в момент времени p устанавливается согласно следующему критерию:

$$J_i = \sum_{j=p-\Delta}^{p} (y_j - y_{ij-\tau^i})^T Q_j (y_j - y_{ij-\tau^i}) \to \min_{\tau^i,\, i \in I}, \qquad (5)$$

где $I = \{1, 2, ..., m\}$ — множество аналогичных объектов, τ^i— сдвиг по оси времени для наложения траектории i-го объекта на траекторию объекта, для которого ищутся «родственники», Δ — временной интервал минимизации, т. е. наилучшего совпадения траекторий (задается изначально), $y_{ij-\tau^i}$ — вектор измерений в момент времени $j - \tau^i$ для i-го аналогичного объекта, y_j — вектор измерений интересующего объекта в момент времени j, Q_j — известные положительно определенные и симметричные матрицы. Полагается, что на момент времени p известна информация для $\forall i \in I$ о векторе y_{ij} как минимум для всех $j = \overline{1, p}$. При поиске сдвига τ^i перебор ведется для всех моментов времени от 1 до $p - \Delta$, т. е. $\tau^i \in [1, p - \Delta]$. Очевидно, что для определения «родственников» должна быть накоплена некоторая информация о них, т. е. как минимум должно выполняться неравенство $p > \Delta$.

Первый «родственный» объект определяется согласно критерию

$$J^* = \min_{i \in I} J_i, \qquad (6)$$

где индекс i^*, соответствующий значению J^*, есть индекс объекта, являющегося первым «родственником», и τ^{i^*} — сдвиг траектории первого «родственника». Для определения второго «родственного» объекта и его сдвига положим $I = I\backslash\{i^*\}$ и вновь применив критерий (6) к множеству объектов, из которого исключен номер объекта первого «родственника», получим минимальное значение критерия (5) и соответственно индекс для второго «родственника» и т. д. Условие остановки определения «родственников» может быть записано в виде $J^* > \varepsilon$, где ε — заданная скалярная величина.

Если $J^* > \varepsilon$ для первого значения J^*, то следует: а) либо увеличить значение ε; б) либо «пропустить» этот момент времени, т. е. не вычислять оценку вектора состояния объекта, и вновь повторить процедуру поиска «родственных» объектов на следующем шаге. Если же действия а) и б) не приводят к желаемому результату, то «родственники» отсутствуют и необходимо либо пополнять множество объектов, среди которых производится поиск «родственников», либо воспользоваться другими способами оценивания.

Определив q ($q < m$) «родственных» объектов, получим соответственно q моделей вида (3), (4). Полагаем, что истинная модель движения объекта (1), (2) совпадает с одной из q моделей движения (2) «родственных» объектов.

2. АДАПТИВНОЕ ГАРАНТИРОВАННОЕ ОЦЕНИВАНИЕ

Для вычисления оценки вектора состояния объекта (1), (2) работают параллельно q фильтров, для которых уравнение движения и измерений имеют вид (3), (4), где в качестве измерений y_{ik+1} используются значения y_{k+1}. Применяя минимаксный подход [8—10], можно получить оценку вектора состояния объекта согласно алгоритму адаптивного оценивания.

Предположим, известна одна модель вида (3), т. е. $i = 1$, совпадающая с моделью (1), тогда для нахождения информационного множества на $k + 1$-м шаге используются известные уравнения минимаксного фильтра [8—10]

$$X_{1k+1} = X_{1k+1/k} \cap X[y_{k+1}], \quad k = 0, 1, ..., \qquad (7)$$

где X_{k+1} — информационное множество и $x_{k+1} \in \in X_{k+1}$,

$$X_{1k+1/k} = A_{1k}X_{1k} + c_{1k} + W_1 \qquad (8)$$

— априорное множество прогнозов,

$$X[y_{k+1}] = \{x | Gx + v = y_{k+1},\ v \in V\} \qquad (9)$$

— множество, совместимое с результатами измерения.

Допустим, что в результате работы алгоритма минимаксного фильтра (7) в момент времени $k + 1 = k*$ имеем $X_{1k*} = \varnothing$, что можно классифицировать как разладку или, другими словами, модель перестала корректно описывать движение объекта и требуется корректировка параметров модели. Пусть теперь к моменту времени $k*$ имеется множество I моделей вида (3), каждой из которых может принадлежать движение объекта.

Для определения q моделей вида (3) привлекается информация о развитии схожих на данном этапе объектов путем выбора q «родственных» объектов из множества I по критериям (5) и (6). Далее с момента времени $k*$ создается банк из q минимаксных фильтров вида (7) — (9). Информационное множество, которому должна принадлежать оценка вектора состояния объекта на $k* + 1$-м и последующих шагах, вычисляется согласно выражениям:

$$X_{ik+1} = X_{ik+1/k} \cap X[y_{k+1}],$$
$$k = k^* + 1, ..., \quad i = 1, ..., q,$$
$$X[y_{k+1}] = \{x|Gx + v = y_{k+1}, v \in V\}$$
$$X_{ik+1/k} = A_{ik}X_{1k} + c_{ik} + W_i. \qquad (10)$$

Здесь $X_{ik+1/k}$ — априорное множество прогнозов i-й модели, $X[y_{k+1}]$ — множество, совместимое с результатами измерений. Обозначим через $L_{k+1} = \{1, 2, ..., q\}$ множество моделей вида (3) на шаге $k + 1$. Если при $l_1 \in L_{k+1}$ $X_{l_1 k+1} = \varnothing$, тогда $L_{k+1} = L_{k+1} \backslash \{l_1\}$. Если при $l_1, l_2 \in L_{k+1}$ $X_{l_1 k+1} = \varnothing$ и $X_{l_2 k+1} = \varnothing$, то $L_{k+1} = L_{k+1} \backslash \{l_1, l_2\}$ и т. д. Тогда результирующее информационное множество получим как пересечение

$$X_{k+1} = \bigcap_{i \in L_{k+1}} X_{ik+1}. \qquad (11)$$

Таким образом, множества X_{k+1} для всех $k + 1 \geqslant 1$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям (10) и (11). Например, для $q = 1$ X_{k+1} совпадает с оценкой информационного множества для минимаксного фильтра [9]. В двумерном случае, для $q = 2$, может быть приведена следующая иллюстрация (рис. 1).

В случае, если в результате выполнения операции пересечения (11) $X_{k+1} = \varnothing$ или операции (10) $X_{ik+1} = \varnothing$ для $\forall i = \overline{1, q}$, то делается вывод о разладке (рис. 2, *а*). Для определения новых q моделей вида (3) вновь привлекается информация о развитии схожих на данном этапе объектов путем выбора «родственных» объектов по критериям (5) и (6).

Если в результате операции пересечения (10) $X_{ik+1} = \varnothing$ для $i = i_1, ..., i_l$, где $l < q$ (рис. 2, *б*), то

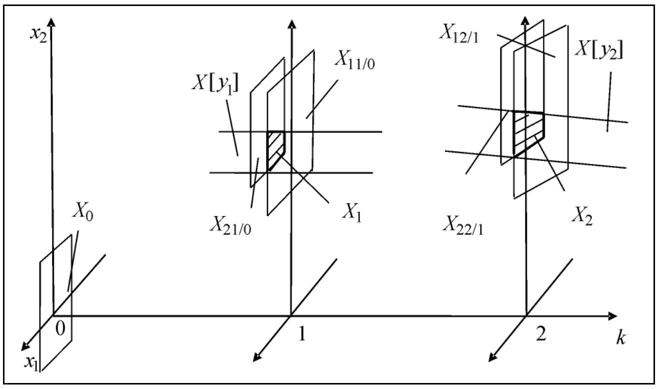

Рис. 1. Операция (11) для $q = 2$ (двумерный случай)

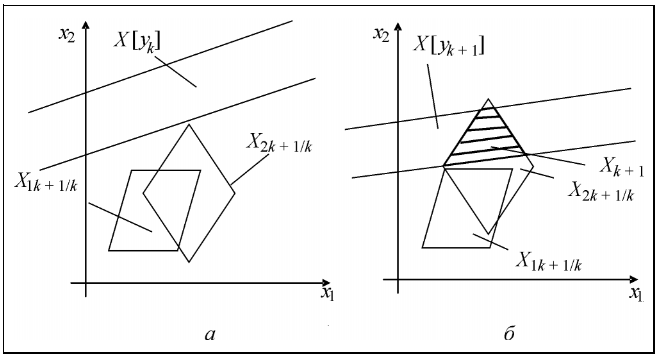

Рис. 2. Пример:
а — разладки $X_{ik+1} = \varnothing$, $i = 1, 2$; *б* — возникновения на шаге $k + 1$ пустого пересечения по одной модели $X_{1k+1} = \varnothing$

каждая из l-х моделей заменяется на новую модель вида (3), путем определения l новых «родственников». Если не удается найти все l новых «родственников» или часть из них, то число моделей уменьшается, вплоть до $q = 1$.

Последовательность действий алгоритма адаптивного оценивания состоит в следующем.

Шаг 1. Вычислить информационное множество в соответствии с уравнениями (7)—(9). Если $X_{1k+1} = \varnothing$, то переход к шагу 2. Если $X_{1k+1} = \varnothing$, то положить $k = k + 1$ и повторить шаг 1.

Шаг 2. Определить «родственные» объекты согласно критериям (5) и (6), взять их модели вида (3) для дальнейшей оценки вектора состояния объекта. Переход к шагу 3.

Шаг 3. Вычислить X_{ik+1} в соответствии с операцией (10). Если для $\forall i = \overline{1, q}$ $X_{ik+1} = \varnothing$, то вывод — разладка в момент времени $k + 1$ и переход к шагу 6, иначе шаг 4.

Шаг 4. Если для l множеств $X_{lk+1} = \varnothing$, где $l < q$, то соответствующие l моделей заменить путем определения «родственников», множества X_{lk+1} скорректировать. Переход к шагу 5. Если не удается найти часть l' или все l «родственников», тогда положить $q = q - l'$ или $q = q - l$ и переход к шагу 5.

Шаг 5. Вычислить информационное множество X_{k+1} согласно операции (11), положить $k = k + 1$, переход к шагу 3. Если $X_{k+1} = \varnothing$, то положить $X_{k+1} = X[y_{k+1}]$, $k = k + 1$, переход к шагу 3.

Шаг 6. Заменить все q моделей, выбрав «родственные» объекты из множества I согласно критериям (5) и (6) и взяв их модели вида (3) за новые. Положить $X_{k+1} = X[y_{k+1}]$, $k = k + 1$, переход к шагу 3. Если не удается найти часть l' «родственников», тогда положить $q = q - l'$ и перейти к шагу 3.

На каждом k-м временном такте в памяти алгоритма хранится информация о векторе y_{ij} для $\forall i$

и $j = \overline{1, k}$, т. е. на следующем шаге $k + 1$ весь массив информации пополняется данными о векторе $y_{ik + 1}$ для всех объектов и т. д. В алгоритме предполагается, что на шаге 6 можно найти как минимум один «родственный» объект, если нет возможности его определить, тогда это алгоритм без использования информации о «родственных» объектах.

Таким образом, алгоритм обладает адаптивными свойствами: смена и поиск новых «родственных» объектов с целью использования их моделей движения происходит при изменении движения объекта (изменении ситуации) либо когда модели «родственных» объектов перестают быть «родственными».

Если система (объект) описывается нелинейным уравнением движения вида

$$x_{k+1} = f(x_k) + w_k, \quad k = 0, 1, ..., n - 1, \quad (12)$$

то возможна кусочно-линейная аппроксимация уравнения (12) в виде (3) при требовании определенных свойств функции $f(\cdot)$ [11]. Таким образом, алгоритм адаптивного оценивания может применяться и для нелинейных моделей. Обзор по идентификации различных систем в практике решения задач управления приведен в работе [12].

3. ПРИМЕНЕНИЕ К ЗАДАЧЕ О РЫНКАХ

Рассматривается задача о росте числа абонентов сотовой связи в регионах и показывается, что предложенный алгоритм адаптивного гарантированного оценивания в случае нелинейной модели вида (12) и при $x_k \in R^1$ может быть применен без линейной аппроксимации.

Рассматривается множество регионов $I = \{1, 2, ..., 12\}$, где для каждого региона известны неточные данные о числе абонентов сотовой связи. Под процентом проникновения понимается число абонентов, деленное на численность населения в регионе (рис. 3). Очевидно, что процент проникновения не может превышать 100 %, но как следует из рис. 3, например, в Москве и Московской области процент проникновения превысил эту отметку в начале 2005 г. Это связано с учетной политикой операторов, поэтому с середины 2004 — начала 2005 г. под числом абонентов понимается число SIM-карт. Анализируется совокупность всего рынка в регионе без детализации по компаниям-операторам. Изменение числа абонентов описывается логистической кривой [13], но в результате выходов новых конкурентов в регион, рекламных акций операторов и других событий происходит искажение «гладкой» кривой. Эти особенности будут в модели учитываться как возмущения неопределенного характера w_k, известные с точностью до некоторого множества W.

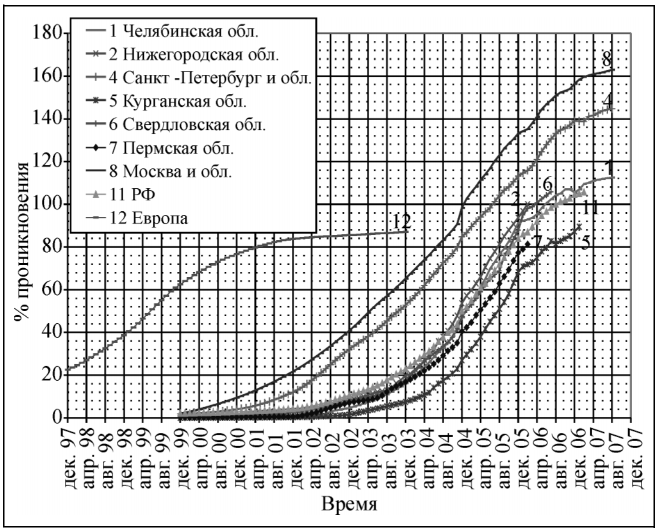

Рис. 3. Траектории изменения числа абонентов в некоторых регионах

Поведение абонентов в регионе описывается в виде

$$x_{k+1} = \varphi(x_k) + w_k,\ y_{k+1} = x_{k+1} + \nu_{k+1}, \\ k = 0, 1, ..., n - 1, \quad (13)$$

где $x_k \in R^1$, $w_k \in [-\mu, \mu] = W$, $\nu_{k+1} \in [-\nu, \nu] = V$, $x_0 \in [-l_0, l_0] = X_0$, здесь $\varphi(x_k) = x_k + (\alpha + \beta x_k)(N - x_k)$, числа $\mu \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$ и $l_0 \geqslant 0$ также заданы. Параметры α и β характеризуют информационное воздействие на потенциальных абонентов (влияние рекламы и степень общения покупателей между собой соответственно), N — потенциальная емкость рынка. Оценка числа абонентов (13) вычисляется по соотношениям (7)—(9), где априорное множество прогнозов $X_{k+1/k} = \breve{X}_k + W$, $\breve{X}_k = \{\varphi(x_k) | x_k \in X_k\}$ и множество, совместимое с результатами измерений, $X[y_{k+1}] = \{x \mid x + \nu = y_{k+1}, \nu \in V\}$. Точечная оценка x_k^* — чебышевский центр множества X_{k+1} [8] представляет собой в одномерном случае центр отрезка. Параметры α, β и N неизвестны.

В случае обнаружения изменений привлекается информация об изменении числа абонентов в других регионах путем нахождения ближайших («родственных») регионов в данный момент времени [2]. Следовательно, получаем множество моделей «родственников» вида (13) для описания развития рынка. Далее применяется алгоритм адаптивного оценивания с использованием двух «родственников», описанный выше, для которого операция (11) не изменится, а (10) будет иметь вид

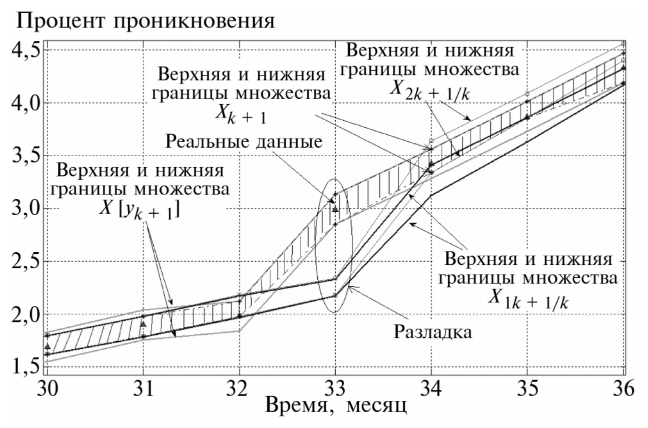

Рис. 4. Гарантированная оценка числа абонентов на примере Челябинской области

$X_{ik+1} = (\breve{X}_{ik} + W_i) \cap X[y_{k+1}]$ — информационные множества, полученные в результате оценивания по двум моделям вида (13).

Результаты работы алгоритма на примере Челябинской области представлены на рис. 4. Гарантированная оценка рассчитывалась в течение 54-х мес., разладка была обнаружена в моменты времени $k = 33$, $k = 45$ и $k = 48$. До момента времени $k = 25$ работал один фильтр, оценки параметров $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ и $\hat{N}$ для первоначальной модели были определены по 10-ти известным точкам методом наименьших квадратов. Далее «родственниками» для определения параметров являлись: республика Татарстан, Нижегородская, Новосибирская и Самарская области, г. Москва и Московская область, Свердловская область. Таким образом, на протяжении 4,5 лет «родственниками» были 6 регионов из 12. При подборе параметров накладывались ограничения $0 \leqslant \alpha \leqslant \bar{\alpha}$, $0 \leqslant \beta \leqslant \bar{\beta}$ и $\hat{N}_i \leqslant N_i \leqslant \bar{N}$, где $\hat{N}_i$ — оценка емкости рынка на предыдущем периоде.

Поскольку в реальной задаче о числе абонентов истинное его значение неизвестно, то приведем ошибку $\tilde{e}_k = (\bar{x}_k^* - x_k^*) \cdot 100\,\%/\bar{x}_k^*$, где $\bar{x}_k^*$ — центр отрезка множества $X[y_k]$, совместимого с результатами измерений, и x_k^* — центр отрезка результирующего множества X_k. Ошибка $\tilde{e}_k$ на интервале с 1 по 25 мес, когда работает один фильтр на начальных этапах, может составлять и 20—23 %, с 25 мес, когда начинает работать алгоритм адаптивного оценивания ошибка, $\tilde{e}_k$ не превосходит 5 %. В среднем ошибка $\tilde{e}_k$ составляет не более 8 % на всем интервале оценивания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан алгоритм адаптивного оценивания с использованием информации о группе объектов на основе гарантированного подхода. Показана эффективность предложенного подхода на данных о числе абонентов сотовой связи в регионах. По результатам моделирования было установлено, что ошибка $\tilde{e}_k$ в среднем составляет не более 8 % за 5 лет.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фарина А., Студер Ф.* Цифровая обработка радиолокационной информации. Сопровождение целей. — М.: Радио и связь, 1993. — 320 с.
2. *Алгоритмы* оценивания и управления беспилотным летательным аппаратом на этапе посадки / М.О. Антонов, К.Е. Афанасьева, А.И. Коблов, В.И. Ширяев // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2005. — № 2. — С. 166—173.
3. *Bar-Sholom Y.* Tracking methods in a multitarget environment // IEEE Trans. on Automatic Control. — 1978. — Vol. 23, № 4. — P. 618—626.
4. *Афанасьева К.Е., Ширяев В.И.* Идентификация состояния и прогнозирование регионального рынка // Проблемы управления. — 2007. — № 3. — С. 63—65.
5. *Обнаружение* изменения свойств сигналов и динамических систем / Под. ред. М. Бассвиль, А. Банвениста. — М.: Мир, 1989. — 278 с.
6. *Калман Р.Е.* Идентификация систем с шумами // Успехи мат. наук. — 1985. — Т. 40, Вып. 4 (244). — С. 27—41.
7. *Гольц Г.А.* Опыт высокоточного моделирования социально-экономических процессов на массовидных статистических материалах // Экономика и математические методы. — 2008. — Т. 41, № 1. — С. 24—25.
8. *Куржанский А.Б.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. — М.: Наука, 1977. — 392 с.
9. *Кац И.Я., Куржанский А.Б.* Минимаксная многошаговая фильтрация в статистически неопределенных ситуациях // Автоматика и телемеханика. — 1978. — № 11. — С. 79—87.
10. *Ширяев В.И.* Синтез управления линейными системами при неполной информации // Изв. РАН. Техн. кибернетика. — 1994. — № 3. — С. 229—237.
11. *Бек В.В., Вишняков Ю.С., Махлин А.Р.* Интегрированные системы терминального управления — М.: Наука, 1989. — 224 с.
12. *Идентификация* систем и задачи управления: на пути к современным системным методологиям / И.В. Прангишвили и др. // Проблемы управления. — 2004. — № 4. — С. 2—15.
13. *Bass F.* A new product growth model for consumer durables // Management Sci. — 1969. — N 15. — P. 215—227.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.Д. Земляковым.

Афанасьева Ксения Евгеньевна — аспирантка, ☎ (351) 267-90-43, e-mail: afanasyeva@prima.susu.ac.ru,

Ширяев Владимир Иванович — д-р техн. наук, профессор, ☎ (351) 267-91-74, e-mail: vis@prima.susu.ac.ru,

Южно-Уральский государственный университет, г. Челябинск.