

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ПОИСКА ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ ДВИЖЕНИЯ РЕЛЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ¹

С.Д. Земляков, Е.А. Данилова

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Рассмотрена проблема анализа и синтеза релейной нестационарной системы. Показано, что можно подобрать конструктивные параметры, при которых желаемое движение системы, описываемой редуцированной математической моделью, асимптотически устойчиво в целом. Для частного случая доказано, что движение системы, описываемой полной математической моделью, сходится при этом к некоторой области, включающей в себя желаемое движение. Предложена методика поиска области сходимости.

ВВЕДЕНИЕ. МОТИВАЦИЯ ЗАДАЧИ. ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

В задачах управления сложными объектами [1], в адаптивных [2] и других системах управления возникает необходимость изучения движения, описываемого дифференциальным уравнением вида

$$\tau \ddot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon} = N\varepsilon + \beta(t, \varepsilon, c), \quad (\text{В.1})$$

где $\varepsilon \in R^n$ — вектор, $\tau > 0$ — постоянная скалярная величина, N — постоянная матрица $n \times n$, $c \in R^n$ — постоянный вектор некоторых конструктивных параметров объекта или системы управления, допускающий целенаправленный выбор своих компонент, $\beta(t, \varepsilon, c)$ — вектор с нулевыми компонентами за исключением последней, т. е.

$$\beta_j = 0, \quad j = \overline{1, (n-1)}, \quad \beta_n = -\rho(t) \text{sign}(c^T \varepsilon), \quad (\text{В.2})$$

$\rho(t)$ — скалярная функция, определяемая неравенствами

$$\rho^{\max} \geq \rho(t) \geq 0. \quad (\text{В.3})$$

Суть рассматриваемой задачи заключается в следующем. Пусть при условии $\tau = 0$ доказано, что движение

$$y(t) \equiv 0 \quad (\text{В.4})$$

системы, описываемой математической моделью (ММ)

$$\dot{y} = Ny + \beta(t, y, c), \quad (\text{В.5})$$

асимптотически устойчиво в целом. Как поведет себя движение системы, описываемой ММ (В.1)? Можно ли отыскать пусть малый, но конечный диапазон значений τ

$$0 < \tau < \tau^0, \quad (\text{В.6})$$

при котором это движение сходится к желаемому

$$\varepsilon(t) \equiv 0? \quad (\text{В.7})$$

Далее будем называть ММ (В.1) полной, ММ (В.5) — редуцированной.

Может случиться, что движение системы с полной ММ (В.1) не сходится асимптотически к желаемому движению (В.7), но сходится в некоторую конечную область, включающую в себя это движение. Если эта область достаточно «мала», а диапазон (В.6) достаточно конструктивен в смысле его реализуемости, то для реальной системы с ММ (В.1) такой результат может быть вполне приемлемым. Известны, например, конкретные реализа-

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 05-08-18175) и Программы фундаментальных исследований № 15 Отделения ЭММПУ РАН.



ции адаптивных систем с автоколебательным предельным циклом для управления объектами важного оборонного назначения [3]; реализации экстремальных систем, для которых колебательный режим является определяющим [4]; системы, работающие на основе скользящих режимов, которые практически всегда выливаются в колебательные режимы с конечной частотой [5], и др.

В настоящей работе будет показано, что при определенных условиях для системы с редуцированной ММ (В.5) может быть выбран вектор конструктивных параметров c , при котором наблюдается асимптотическая устойчивость в целом движения (В.4).

Для частного случая

$$n = 1 \quad (\text{В.8})$$

будет доказано, что движение системы с ММ (В.1) в зависимости от вида функции $\rho(t)$ может асимптотически сходиться к желаемому движению (В.7), движение (В.7) может оказаться неустойчивым, однако при любом виде функции $\rho(t)$ движение системы сходится к некоторой области, включающей в себя движение (В.7). Будет предложена методика построения области сходимости для системы с ММ (В.1) (основной результат статьи).

Решение интересной и весьма актуальной задачи при любом конечном значении n авторам представляется возможным, но, к сожалению, пока они таким решением не обладают. Тем не менее, полученный частный результат авторам представляется интересным по трем причинам. Прежде всего, результат дает ответ на некоторые конкретные вопросы в теории адаптивных систем с эталонной моделью, в теории управления сложными системами, которые были поставлены, например, в работах [6, 7], но до сих пор не решены. Далее, решение частной задачи говорит о непустом классе решений для общей задачи. Наконец, в рассматриваемой постановке задачи, а главное, и в ее решении, просматривается аналогия с концепцией систем сравнения, мажорант и минорант метода векторных функций Ляпунова, развиваемых школой академика В.М. Матросова [8]. Однако, как представляется авторам, в настоящей работе на относительно простом примере рассматривается возможность не только гарантирования устойчивости, но и обеспечения заданной динамической точности движения сложных систем.

По определению Я.З. Цыпкина, уравнение (В.1) представляет собой ММ релейной системы регулирования, поэтому в настоящей работе будут использованы как классические результаты, полученные в его работе [9], так и новые результаты, основанные на применении функций Ляпунова и рассмотрении движения системы в фазовом пространстве.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим движение системы с редуцированной ММ вида (В.5), в которой вектор $\beta(t, y, c)$ с точностью до обозначений определен соотношениями (В.2) и (В.3). Матрицу N будем полагать гурвицевой и обладающей формой Фробениуса с характеристическим полиномом

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0. \quad (\text{1.1})$$

Первой задачей настоящей работы будем считать доказательство того факта, что в принятой постановке имеется возможность выбора вектора конструктивных параметров c таким, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость в целом движению (В.4).

Далее к ММ (В.5) добавляем в левой части слабое $\tau \dot{y}$ и переходим к полной ММ вида (В.1). Для этой ММ ставим задачу ответить на вопрос: можно ли отыскать пусть малый, но конечный диапазон значений τ (В.6), при котором движение (В.7) системы с полной ММ (В.1) также было бы асимптотически устойчивым в целом?

Заранее скажем, что ответ окажется отрицательным. В таком случае ставится задача получить ответ на такой вопрос: можно ли отыскать пусть малый, но конечный диапазон значений τ (В.6), при котором движение системы с полной ММ (В.1) сходится к некоторой области, включающей в себя движение (В.7)? Ответ окажется положительным.

Далее ставится основная задача статьи: предложить методику отыскания области сходимости полной системы.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В ЦЕЛОМ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЕМОЙ РЕДУЦИРОВАННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛЬЮ

В рассматриваемой относительно простой постановке задачи нетрудно видеть, что редуцированная ММ может быть представлена в виде

$$P(D)y = -\rho(t)\text{sign}[C(D)y], \quad (\text{2.1})$$

где $D = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования; $P(D)$ — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, определяемыми коэффициентами характеристического полинома (1.1); $C(D)$ — линейный дифференциальный оператор порядка $(n-1)$ с постоянными коэффициентами, определяемыми компонентами вектора c . Если изобразить уравнение (2.1) в виде структурной схемы (рис. 1), то можно видеть, что при условии

$$\rho(t) \equiv 1, \quad (\text{2.2})$$

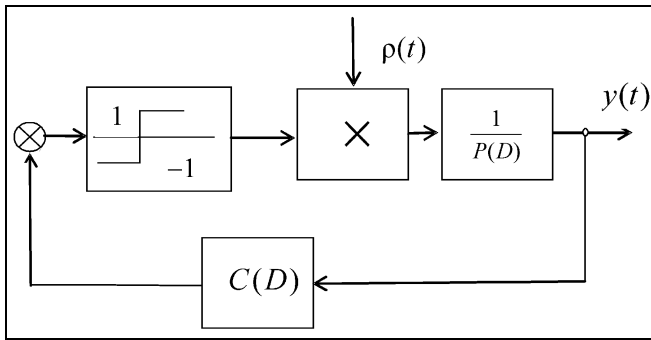


Рис. 1. Структурная схема релейной нестационарной системы управления

она совпадает со структурной схемой релейной системы, изучаемой в работе [9, с. 127]. Критерий устойчивости Я.З. Цыпкина рассматриваемой релейной системы включает в себя необходимое условие: порядок линейного дифференциального оператора $P(D)$ не должен превышать порядок оператора $C(D)$ более чем на два. Необходимое и достаточное условие устойчивости в целом при условии устойчивости линейной части системы требует, чтобы частотная характеристика $W(j\omega)$ для дифференциального оператора $W(D) = \frac{C(D)}{P(D)}$ была расположена в нижней полуплоскости.

Поскольку условие (2.2) является возможным вариантом рассматриваемой ММ (2.1), то, естественно, сформулированные требования критерия устойчивости Я.З. Цыпкина следует считать необходимыми и в рассматриваемом случае при $\rho(t) \neq 1$.

Рассмотрим устойчивость нелинейной нестационарной системы с ММ (В.5) с помощью функции Ляпунова вида

$$V(y) = y^T L y, \quad (2.3)$$

где $L = (l_{ij})$, $i, j = \overline{1, n}$ — положительно определенная постоянная матрица. Цель рассмотрения состоит в отыскании условий на вектор c выбираемых конструктивных параметров системы с ММ (В.5), при которых движение (В.4) асимптотически устойчиво в целом.

Производная $\dot{V}(y)$, полученная в силу ММ (В.5), имеет вид

$$\dot{V}(t, y) = y^T Q y - 2\rho(t)\sigma(y)\text{sign}(c^T y), \quad (2.4)$$

где $\sigma(y) = l_n y$, $l_n = (l_{n1}, l_{n2}, \dots, l_{nn})$ — последняя строка матрицы L ,

$$Q = N^T L + L N. \quad (2.5)$$

По условию матрица N — гурвицева, и по теореме Ляпунова из соотношения (2.5) для любой отрицательно определенной матрицы Q можно по-

лучить положительно определенную матрицу L и соответствующую величину $\sigma(y)$.

Выберем вектор конструктивных параметров c пропорциональным вектору l_n^T , т. е.

$$c = M l_n^T, \quad (2.6)$$

где $M = \text{const} > 0$ — некоторая численная величина. В таком случае из выражения (2.4) получаем

$$\dot{V}(t, y) = y^T Q y - \frac{2\rho(t)}{M} |c^T y| < 0.$$

Полученные условия

$$V(y) > 0, \quad \dot{V}(y) < 0 \quad (2.7)$$

в рассматриваемом случае еще не гарантируют устойчивость движения (В.4) системы с ММ (В.5). Действительно, такая система относится к классу систем с разрывной правой частью [5, 10]. В ней возможно возникновение скользящего режима на поверхности разрыва. В данном случае такой поверхностью является гиперплоскость

$$c^T y = 0, \quad (2.8)$$

движение вдоль которой в скользящем режиме может происходить как в направлении к движению (В.4), так и в противоположном направлении. Поэтому необходимо потребовать, чтобы движение в гиперплоскости (2.8) сходилась к движению (В.4). Это сводится к требованию, чтобы корни уравнения $C(\lambda) = 0$ лежали в левой полуплоскости корней.

Таким образом, если для нестационарной релейной системы с ММ (В.5) или (2.1) задана отрицательно определенная матрица Q , которая в силу равенства (2.5) определяет положительно определенную матрицу L с последней строкой l_n , причем полином

$$l(\lambda) = \lambda_{n,n} \lambda^{n-1} + \lambda_{n,n-1} \lambda^{n-2} + \dots + \lambda_{n,2} \lambda + \lambda_{n,1}$$

устойчив, то взятие вектора конструктивных параметров системы c в виде, определяемым соотношением (2.6), гарантирует асимптотическую устойчивость в целом движения (В.4) системы с ММ (В.5).

3. О НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ХАРАКТЕРА УСТОЙЧИВОСТИ ЖЕЛАЕМОГО ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЕМОЙ ПОЛНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛЬЮ

Добавим к левой части редуцированной ММ (В.5) слагаемое $\tau \ddot{y}$ и таким образом перейдем к полной ММ релейной системы (В.1). Рассмотрим наиболее простой случай, определяемый равенством (В.8). В результате получим ММ вида

$$\tau \ddot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon} + a_0 \varepsilon = -\rho(t) \text{sign}(\varepsilon). \quad (3.1)$$



Очевидно, что движение (В.4) системы, описываемой редуцированной ММ вида

$$\dot{y} + a_0 y = -\rho(t)\text{sign}y, \quad (3.2)$$

асимптотически устойчиво в целом. Действительно, если функцию Ляпунова (2.3) выбрать в виде $V(y) = \frac{1}{2}y^2$, то, в силу ММ (3.2), получим $\dot{V}(y) = -a_0 y^2 - \rho(t)|y(t)|$, и при условиях $a_0 > 0$, $\rho(t) \geq 0$ имеют место соотношения (2.7). В рассматриваемом частном случае конструктивный параметр $c = 1$, поэтому, если скользящий режим и возникнет, то он будет определяться движением (В.4).

Далее нас интересует движение нестационарной релейной системы, описываемой полной ММ (3.1). Для этого рассмотрим фазовую плоскость с осями координат $x_1 = \varepsilon$, $x_2 = \dot{\varepsilon}$ и запишем ММ (3.1) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{\tau}(a_0 x_1 + x_2 + \rho(t)\text{sign}x_1) \end{aligned} \quad (3.3)$$

или в матричном представлении

$$\dot{x} = Ax + \mu(t, x), \quad (3.4)$$

где

$$x^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{\tau} & -\frac{1}{\tau} \end{pmatrix},$$

$$\mu(t, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\rho(t)\text{sign}x_1}{\tau} \end{pmatrix}.$$

Нас интересует вопрос: существует ли такое малое значение τ , при котором движение системы с ММ (3.1), (3.3) или (3.4) сохраняет свойство асимптотической устойчивости движения

$$x_1 \equiv 0, \quad x_2 \equiv 0, \quad (3.5)$$

наблюдавшееся для редуцированной ММ?

Утверждение 1. Движение (3.5) системы с ММ (3.3) в зависимости от конкретного вида функции $\rho(t)$ может быть асимптотически устойчивым, просто устойчивым и не устойчивым. ♦

При условии $\rho(t) \equiv 0$ движение (3.5) системы (3.3) асимптотически устойчиво в целом. Однако при условии $\rho(t) \neq 0$ это движение может оставаться устойчивым, неустойчивым или, в общем случае, движение системы (3.5) в малой окрестности нулевой точки будет носить хаотичный вид. Действительно, для доказательства утверждения 1 выберем функцию Ляпунова вида (2.3) $V(x) = x^T Lx$, и

получим ее производную по времени в силу ММ (3.4)

$$\dot{V}(t, x) = x^T Qx - 2\rho(t)l_{21}|x_1| - 2\rho(t)l_{22}x_2\text{sign}x_1, \quad (3.6)$$

где матрица Q определяется соотношением (2.5) и является отрицательно определенной, l_{21} и l_{22} — соответствующие элементы матрицы $L = (l_{ij})$, $i, j = \overline{1, 2}$. Легко показать, что в данном случае матрицу Q можно выбрать так, чтобы элементы l_{21} , l_{22} были положительны, т. е. $l_{21} > 0$ и $l_{22} > 0$.

Рассмотрим сколь угодно малую область, охватываемую кривой

$$V(x) = \alpha, \quad (3.7)$$

где $\alpha = \text{const} > 0$, включая точки самой кривой.

Из равенства (3.6) можно видеть, что на фазовой плоскости $\{x_1, x_2\}$ во втором и четвертом квадрантах существуют области, примыкающие к осям координат, в которых

$$\dot{V}(t, x) > 0. \quad (3.8)$$

Действительно, в четвертом квадранте, т. е. при $x_1 \geq 0$, $x_2 \leq 0$, эту область ограничивают оси координат и некоторая кривая, проходящая через точку $\left(x_1 = 0, |x_2| = \frac{2\rho^{\max} l_{22}}{q_{22}}\right)$ и точку (x_1^*, x_2^*) , где x_1^* и x_2^* определяются неравенством

$$|x_2| < \frac{2\rho^{\max} l_{22}}{q_{22}} - \frac{q_{11}}{q_{22}} \frac{x_1^2}{|x_2|} - \frac{2\rho^{\max} l_{21}}{q_{22}} - \frac{2q_{12}}{q_{22}} x_1.$$

Аналогичная область расположена во втором квадранте.

Выберем значение α настолько малым, чтобы линия, определяемая равенством (3.7), включала в себя точки рассмотренных областей, где соблюдается условие (3.8). Какой бы малой эта область не была, движение, начинающееся в этих точках, покинет саму область. После этого движение может не вернуться в эту область, т. е. решение (3.5) окажется неустойчивым; вернуться в эту область и остаться в ней, т. е. решение (3.5) окажется устойчивым, возможно, асимптотически устойчивым. В общем случае при произвольном виде функции $\rho(t)$ движение системы (3.4) в малой окрестности положения равновесия будет совершать хаотичные движения. В этом мы убедимся ниже при рассмотрении иллюстративного примера. Утверждение 1 доказано. ♦

Возможно, что движение системы с ММ (3.4) со временем сходится к некоторой области, включающей в себя начало координат (3.5). Эта область может оказаться вполне приемлемой при решении практических задач. Следовательно, следующая задача состоит в ответе на вопрос: существует

ли такое малое значение τ , при котором движение системы с ММ (3.1), (3.3) или (3.4) приходит со временем в некоторую область, включающую в себя начало координат, и остается в этой области? При положительном ответе необходимо предложить процедуру построения области сходимости.

4. ПОИСК ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ ДВИЖЕНИЯ РЕЛЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

На фазовой плоскости $\{x_1, x_2\}$ обозначим замкнутую область $G(x_1, x_2)$ (рис. 2), включающую в себя начало координат и ограниченную многоугольником $ABCDEF$, вершины которого имеют координаты, указанные на рисунке

Утверждение 2. Движение системы с ММ (3.1) или (3.4) из любой точки фазовой плоскости за конечное время приходит в область $G(x_1, x_2)$ и остается в ней далее при $t \rightarrow \infty$. ♦

Доказательство. При

$$\rho(t) \equiv 0 \quad (4.1)$$

ММ (3.1) принимает вид однородного дифференциального уравнения $\tau \ddot{\varepsilon} + \dot{\varepsilon} + a_0 \varepsilon = 0$ с характеристическим уравнением

$$\tau \lambda^2 + \lambda + a_0 = 0, \quad (4.2)$$

корни которого $\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2\tau} (1 \pm \sqrt{1 - 4a_0\tau})$.

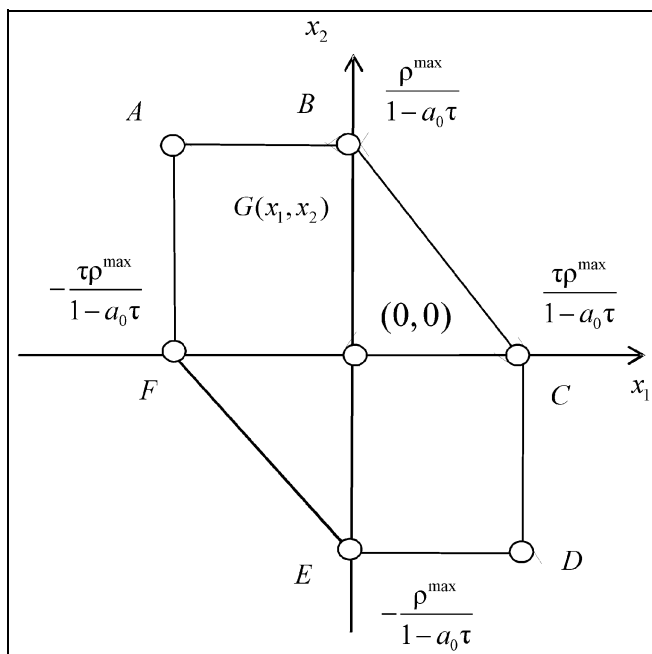


Рис. 2. Область сходимости движения релейной нестационарной системы управления

При

$$t \leq \frac{1}{4a_0} \quad (4.3)$$

характеристическое уравнение (4.2) имеет два отрицательных действительных корня, а фазовый портрет движения дифференциального уравнения (3.4) на фазовой плоскости $\{x_1, x_2\}$ носит характер устойчивого узла [11].

Далее полагаем, что неравенство (4.3) имеет место. С этим условием рассмотрим движение системы с ММ (3.4) на фазовой плоскости $\{x_1, x_2\}$. Сначала рассмотрим движение в первом квадранте фазовой плоскости, т. е. при условии $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Из системы уравнений (3.3) находим уравнение интегральных кривых в виде

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{1}{\tau} \left[1 + a_0 \frac{x_1}{x_2} + \rho(t) \frac{1}{x_2} \right].$$

Легко проверить, что фазовые траектории, начинающиеся в точке $(x_1(0) = 0, x_2(0) > 0)$ при $t = 0$, далее при $t > 0$ в первом квадранте фазовой плоскости лежат ниже отрезка, соединяемого точками $(x_1 = 0, x_2 = x_2(0))$ и $(x_1 = \tau x_2(0), x_2 = 0)$. Таким образом, этот отрезок охватывает сверху все движения при

$$\rho(t) \neq 0, \quad (4.4)$$

начинающиеся в точке $(x_1(0) = 0, x_2(0) > 0)$. В указанном смысле этот отрезок является мажорантой для фазовых траекторий в первом квадранте фазовой плоскости.

Рассмотрим четвертый квадрант фазовой плоскости $\{x_1, x_2\}$, т. е. условия $x_1 \geq 0, x_2 \leq 0$. Здесь фазовые траектории, начинающиеся в точке $(x_1(0) > 0, x_2(0) = 0)$ при $t = 0$, далее при $t > 0$ остаются внутри области, ограниченной осями координат и двумя отрезками, параллельными осям координат: первый проходит через точки $(x_1(0), x_2(0) = 0)$ и $(x_1(0), x_2^* = -a_0 x_1(0) - \rho^{\max})$; второй — через точки $(x_1(0), x_2(0) = x_2^*)$ и $(x_1 = 0, x_2^*)$.

На рис. 3 показана фазовая плоскость $\{x_1, x_2\}$ с расположением описанных отрезков, формирующих мажоранты.

Пусть, как это показано на рис. 3, движение на фазовой плоскости началось в точке $(0, x_2(0))$. Получим в этом случае значение $|x_2^*| = a_0 \tau x_2(0) + \rho^{\max}$.

Отсюда делаем вывод: при условии $x_2(0) = \frac{\rho^{\max}}{1 - a_0 \tau}$ — равенство $|x_2^*| = x_2(0)$; при условии

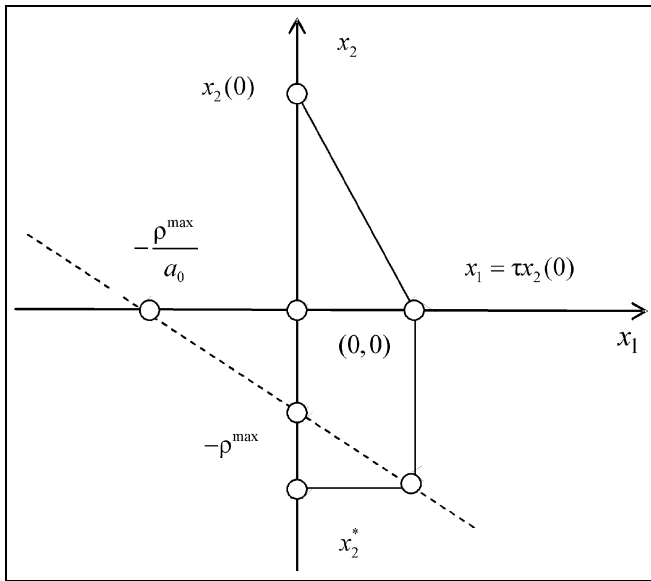


Рис. 3. Мажоранты для построения области сходимости движения релейной нестационарной системы управления

$x_2(0) > \frac{\rho^{\max}}{1 - a_0\tau}$ — неравенство $|x_2^*| \leq x_2(0)$; при условии $x_2(0) < \frac{\rho^{\max}}{1 - a_0\tau}$ имеет место неравенство $|x_2^*| \geq x_2(0)$.

Аналогично рассмотрим левую полуплоскость фазовой плоскости $\{x_1, x_2\}$. Прделав подобные построения, получаем многоугольник $G(x_1, x_2)$, показанный на рис. 2. Очевидно, что движение системы с ММ (3.4) при условии (4.3), начавшееся вне области $G(x_1, x_2)$ при $t = 0$, далее при $t > 0$ придет в эту область и останется в ней. Утверждение доказано. ♦

При относительно малом ρ^{\max} и достаточно малом значении τ область сходимости $G(x_1, x_2)$ может оказаться настолько малой, что практическая реализация рассмотренного движения будет вполне приемлемой.

6. ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим ММ системы в виде (3.4) с конкретными значениями

$$a_0 = 1, \quad \tau = 0,2. \quad (5.1)$$

Равенство (4.3) выполняется, следовательно, характеристическое уравнение (4.2) имеет два отрицательных действительных корня, а фазовый портрет движения системы (3.4) при условии (4.1) носит вид устойчивого узла. Как показано выше, при снятии условия (4.1) и переходе к общему слу-

чаю (4.4), на фазовой плоскости $\{x_1, x_2\}$ существует область сходимости $G(x_1, x_2)$, в которую со временем входят все фазовые траектории, начинающиеся вне этой области, и остаются там при первом же вхождении. Выберем значение $\rho^{\max} = 0,8$. В данном случае область $G(x_1, x_2)$ принимает конкретный вид, показанный на рис. 4.

Обратим внимание, что в процессе доказательств утверждений 1 и 2 никаких условий на вид функции $\rho(t)$, кроме неравенств (В.3), не налагалось. Поэтому примем к рассмотрению два вида функций $\rho(t)$: один — непрерывный

$$\rho(t) = \rho_1(t) = 0,8(1 + \sin\omega t), \quad \omega = 10 \text{ с}^{-1}, \quad (5.2)$$

второй — ступенчатый

$$\rho(t) = \rho_2(t) = 0,4(1 - \text{sign}x_1 \cdot \text{sign}x_2). \quad (5.3)$$

Цель примера состоит в иллюстрации, что, действительно, любое движение системы с ММ (3.4) при принятых значениях (5.1), начавшееся вне области $G(x_1, x_2)$, обозначенной на рис. 4, сходится к этой области как при $\rho(t) = \rho_1(t)$, так и при $\rho(t) = \rho_2(t)$.

На рис. 5 показаны фазовые плоскости $\{x_1, x_2\}$ при $\rho(t) = \rho_1(t)$, рис. 5, а, и при $\rho(t) = \rho_2(t)$, рис. 5, б, ($x_1(0) = 0, x_2(0) = 2$). В силу различий функций $\rho_1(t)$ и $\rho_2(t)$ фазовые траектории отличаются одна от другой, однако и та, и другая сходятся в окрестность нулевой точки. Но именно в окрестность,

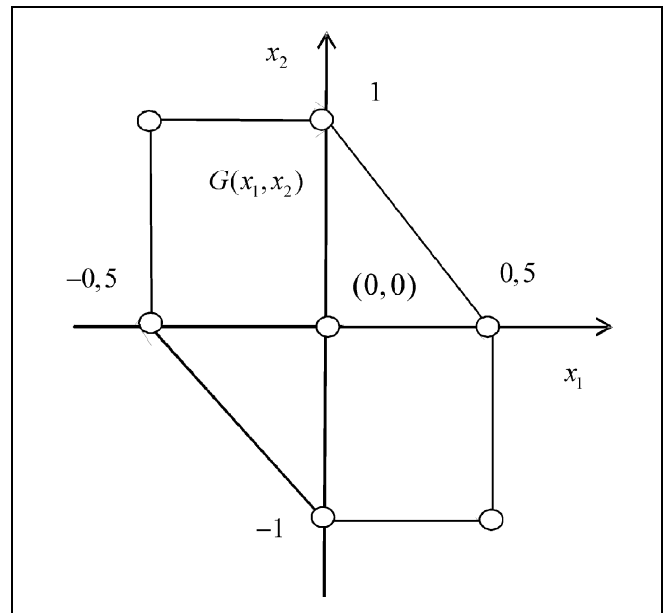


Рис. 4. Пример области сходимости движения релейной нестационарной системы управления

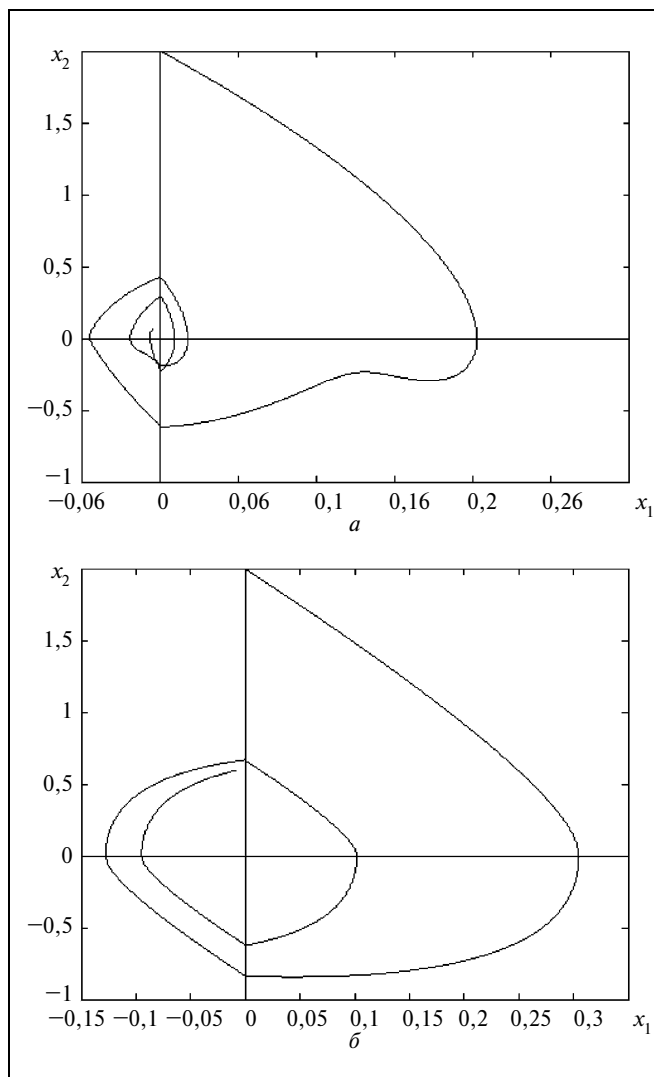


Рис. 5. Сходящиеся фазовые траектории движения:
 а — для функции (5.2); б — для функции (5.3)

поскольку доказано, что внутри этой области движение может:

- асимптотически сходиться к нулевой точке (например, при условии $\rho(t) \equiv 0$);
- при $\rho(t) = \rho_1(t)$ (рис. 6, а) положение равновесия (3.5) носит характер устойчивого движения;
- при $\rho(t) = \rho_2(t)$ (рис. 6, б) положение равновесия (3.5) не устойчиво.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулирована проблема анализа и синтеза движения релейных систем управления, описываемых нелинейной нестационарной математической моделью. Показано, что в условиях доступности полного объема информации движению такой системы можно придать те или иные желаемые

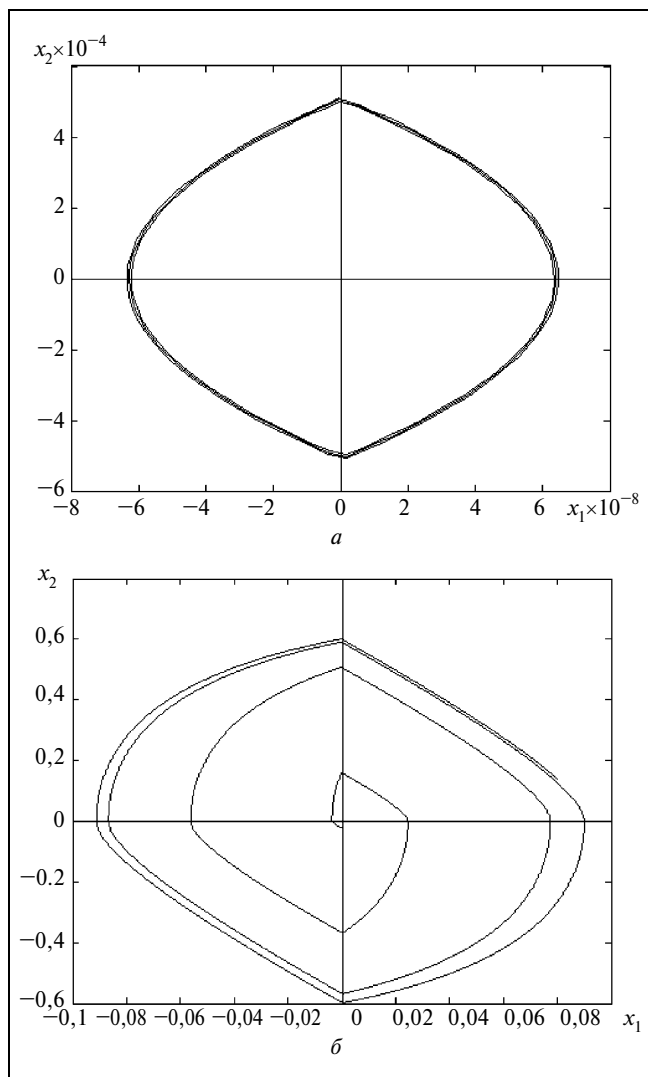


Рис. 6. Неопределенность (а) неустойчивость (б) характера движения фазовой траектории внутри области сходимости

свойства. При отсутствии полной информации эти свойства нарушаются. Полная информация, как правило, недоступна. Спрашивается: можно ли получить условия, при которых движение системы при отсутствии полной информации будет в том или ином смысле близким к желаемым свойствам? Для относительно простой релейной нестационарной системы удалось доказать, что такая возможность существует. В результате показано, что для частного случая решение сформулированной проблемы существует. Следовательно, задачи, связанные с подобной проблемой, можно решать и для более общих случаев.

Выскажем несколько замечаний, которые возникли у авторов в связи с результатами настоящей работы и их возможного дальнейшего развития.



- Область сходимости для рассматриваемого случая нестационарной релейной системы, показанная на рис. 2, построена на основе мажорант движения на фазовой плоскости. Реальная или истинная область сходимости расположена внутри этого многоугольника и, следовательно, занимает меньшую площадь. Для рассматриваемого достаточно простого частного случая представляется возможным построить реальную истинную область сходимости.
- Рассмотренный частный случай нестационарной релейной системы представляется действительно «слишком частным» в следующем смысле: результаты статьи получены с помощью классических подходов к изучению движения динамических систем на фазовой плоскости. Однако известны трудности, а как правило, и невозможность, применения таких подходов к исследованию динамических систем более высоких порядков. Тем не менее, сформулированную проблему изучения движения нестационарных релейных систем, встречающуюся в актуальных практических задачах, решать необходимо. Отсюда возникает необходимость отыскания других, более конструктивных, способов решения сформулированной проблемы.

2. Петров Б.Н., Рутковский В.Ю., Земляков С.Д. Адаптивное координатно-параметрическое управление нестационарными объектами. — М.: Наука, 1980.
3. Рутковский В.Ю. Работы Института проблем управления в области беспоисковых адаптивных систем и систем управления космическими аппаратами // Автоматика и телемеханика. — 1999. — № 6. — С. 42—49.
4. Земляков С.Д. Принципы построения и методы исследования адаптивных САУ. Учеб. пос. — М.: МИРЭА. 1978.
5. Теория систем с переменной структурой / Емельянов С.В., Уткин В.И., Таран В.А. и др. — М.: Наука, 1970.
6. Земляков С.Д., Рутковский В.Ю. О некоторых результатах совместного использования принципов построения систем с переменной структурой и адаптивных систем с эталонной моделью // Автоматика и телемеханика. — 1999. — № 5. — С. 67—78.
7. Земляков С.Д., Криворучко Д.А. Компьютерное решение некоторых задач, относящихся к управлению сложными механическими системами // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 8. — С. 146—155.
8. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / Под ред. А.А. Воронова, В.М. Матросова. — М.: Наука, 1987.
9. Цыпкин Я.З. Релейные автоматические системы. — М.: Наука, 1974.
10. Краснова С.А., Уткин В.А. Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. — М.: Наука. 2006.
11. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. — М.: Наука, 1981.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронов А.А. Введение в динамику сложных управляемых систем. — М.: Наука, 1985.

☎ (095) 334-87-30, 334-87-79, e-mail: zeml@ipu.ru

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским. □

Новая книга

Краснова С.А., Уткин В.А. Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. — М.: Наука, 2006. — 272 с.
ISBN 5-02-033678-5
e-mail: krasnova@ipu.rssi.ru

Представлены теоретические основы каскадного синтеза наблюдателей состояния, заключающиеся в представлении исходной динамической модели объекта управления в блочно-наблюдаемой форме и применении методов синтеза систем с глубокими обратными связями и разрывными управлениями, функционирующими в скользящем режиме. Методология и алгоритмы каскадного синтеза наблюдателей состояния разработаны применительно к многомерным непрерывным линейным и нелинейным системам общего вида, функционирующим в условиях параметрической неопределенности и при действии внешних неконтролируемых возмущений. Особенности предлагаемого каскадного подхода: декомпозиция многомерной задачи синтеза корректирующих воздействий наблюдателя на независимо решаемые элементарные подзадачи меньшей размерности; существенное упрощение алгоритмического обеспечения и экономия вычислительных ресурсов; расширение класса наблюдаемых систем благодаря обеспечению инвариантности к параметрическим неопределенностям и внешним возмущениям. В качестве приложений рассмотрены задачи управления при неполных измерениях электроприводами различных типов и роботами.