

ПРЯМОЙ МЕТОД СИНТЕЗА СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ РАБОЧИМ ОРГАНОМ МАНИПУЛЯТОРА ПРИ НЕПОЛНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

С.А. Краснова, В.А. Уткин, А.В. Уткин, Нгуен Тхань Тиен

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва

Предложены прямые процедуры синтеза автономного управления положением рабочего органа манипулятора. Разработан метод допредельной иерархии управлений, позволяющий обеспечить заданную точность слежения в условиях неопределенности оператора объекта управления и действия внешних неконтролируемых возмущений. Для решения проблемы информационного обеспечения применен наблюдатель состояния на скользящих режимах, позволяющий за теоретически конечное время получить оценки неизмеряемых переменных и имеющихся неопределенностей.

ВВЕДЕНИЕ

Для решения проблемы отслеживания программных траекторий рабочим органом (схватом) манипулятора достаточно изученные методы планирования и управления манипуляторами в пространстве обобщенных координат не находят непосредственного применения. Известные методы управления в пространстве координат схвата почти всегда требуют решения в реальном времени обратных задач кинематики и динамики, которые в редких случаях имеют аналитическое и однозначное решение [1]. В настоящей статье предлагается принципиально другой подход к решению данной проблемы, основанный на декомпозиции выходного отображения механической системы и не требующий решения обратных задач в реальном времени.

1. МОДЕЛЬ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим динамическую модель жесткого манипулятора с n степенями свободы:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= q_2, \\ \dot{q}_2 &= H^{-1}[u - C(q_1, q_2)q_2 - G(q_1) + \eta(t)], \end{aligned} \quad (1)$$

где $q_1 \in Q \subset R^n$ — вектор угловых положений манипулятора, $H(q_1) \in R^{n \times n}$ — положительно-оп-

ределенная симметрическая матрица инерции, $C(q_1, q_2) \in R^{n \times n}$ — матрица центробежных и кориолисовых сил, $G(q_1) \in R^n$ — вектор гравитационных сил, $u \in R^n$ — вектор обобщенных моментов, развиваемых исполнительными устройствами, $\eta(t) \in R^n$ — внешние неконтролируемые ограниченные возмущения.

Многозвенная конструкция манипулятора заканчивается сменным рабочим органом — схватом. Вектор пространственной ориентации схвата описывается нелинейными гладкими функциями угловых положений звеньев $y_1 = h(q_1)$, $y_1 \in Y_1 \subset R^m$, $Q_1 \rightarrow Y_1$, $m \leq n$. Ставится задача отслеживания программного движения $y_{1d}(t) \in R^m$, заданного в терминах рабочего пространства схвата $y_{1d} \in Y_1$; предполагается, что вектор-функция $y_{1d}(t)$ и ее производные ограничены. Задача слежения сводится к задаче стабилизации невязки $e_1(t) = y_1(t) - y_{1d}(t)$, $e_1 \in R^m$ и решается в зависимости от технологических требований либо в асимптотике

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = 0, \quad (2)$$

либо с заданной точностью

$$\|e_1\| \leq \delta_1 = \text{const} \quad (3)$$

на основе представления модели (1) в блочно-канонической форме управляемости относительно выходных переменных y_1 .



2. ВЫХОДНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Особенность рассматриваемой задачи состоит в том, что отображение $Q_1 \rightarrow Y_1$ однозначно, но не взаимнооднозначно, так как конкретной ориентации схвата могут соответствовать различные конфигурации манипулятора. Кроме того, как известно $\text{rank} J$, где $J(q_1)_{m \times n} = \partial h / \partial q_1$, может быть разным в различных точках пространства Q_1 .

Будем полагать, что $\text{rank} J \equiv m \forall q_1 \in \bar{Q}_1 \subset Q_1$, за исключением конечного числа особых точек q_1^* . В случае избыточной размерности $m < n$ объекта управления предполагается, что базисному минору матрицы $J(q_1)$ (т. е. выходным переменным y_1) при $q_1 \in \bar{Q}_1$ можно поставить в соответствие одну и ту же группу базисных координат $q_1^1 \in R^m$ ($q_1 = \text{col}(q_1^1, q_1^2)$, где $q_1^2 \in R^{n-m}$ — свободные координаты), выбранную из предметных соображений. В противном случае следует соответствующим образом разделить программную траекторию на участки, которым будет соответствовать различная структура замкнутой системы управления.

Суть процедуры отображения модели (1) в блочно-канонической форме управляемости относительно выходных переменных заключается в двухкратном дифференцировании выходных переменных в силу системы (1) и сделанных предположений:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= J(q_1)q_2 = y_2, \\ \dot{y}_2 &= J'(q_1, q_2)q_2 + J(q_1)\dot{q}_2 = \\ &= J'(q_1, q_2)q_2 + J(q_1)H^{-1}[u - Cq_2 - G + \eta] = \\ &= A(q_1, q_2) + B(q_1)u + B(q_1)\eta, \end{aligned} \quad (4)$$

где $A = J'(q_1, q_2)q_2 - J(q_1)H^{-1}(q_1)[C(q_1, q_2)q_2 + G(q_1)]$, $B = J(q_1)H^{-1}(q_1)$, $\text{rank} H^{-1}(q_1) = n \Rightarrow \text{rank} B(q_1) = m \forall q_1 \in \bar{Q}_1$; $J_{m \times n} = (J_{ij})$, $J'_{m \times n} = (J'_{ij})$, $J'_{ij} = (\partial J_{ij} / \partial q_1)q_2$.

Поставленная задача (2) или (3) решается в терминах системы (4) на основе блочного подхода [2—4]. Сопутствующая задача, которая здесь не рассматривается, заключается в управлении несвязанными координатами $q_1^2 \in R^{n-m}$ в пространстве обобщенных координат (1) стандартными методами (см. например, статью [4]).

3. БАЗОВЫЕ АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ

3.1. Общий закон управления

В предположении об определенности входных каналов авторами разработаны методы синтеза автономного управления выходными переменными, реализующие алгоритмы различной сложности, что обусловлено возможностью и целесообразностью установки тех или иных измерительных устройств.

Система (4) состоит из двух элементарных блоков, в каждом из которых размерность вектора состояния совпадает с размерностью вектора виртуального или истинного управления, что позволяет разделить задачу синтеза на независимо решаемые подзадачи размерности m . В силу системы (4) запишем дифференциальное уравнение относительно невязки:

$$\dot{e}_1 = y_2 - \dot{y}_{1d}. \quad (5)$$

В системе систем (5) вектор y_2 трактуется как виртуальное управление, выбираемое в виде $y_2 = -K_1 e_1 + \dot{y}_{1d}$, где $K_1 = \text{diag}\{k_{1i}\}$, $k_{1i} > 0$, ($i = \overline{1, m}$) — коэффициенты обратной связи, обеспечивающие заданные темпы сходимости (2). Для обеспечения выбранного управления требуется решить задачу стабилизации невязки

$$e_2 = y_2 + K_1 e_1 - \dot{y}_{1d}. \quad (6)$$

С учетом выражения (6) уравнение (5) принимает вид

$$\dot{e}_1 = -K_1 e_1 + e_2. \quad (7)$$

Обеспечение асимптотической сходимости переменной (6), т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_2(t) = 0, \quad (8)$$

приведет к решению задачи (2); обеспечение заданной точности

$$\|e_2\| \leq \delta_2 = \text{const} \quad (9)$$

приведет к обеспечению заданной точности в системе (7). Задачи (8) и (9) решаются в системе

$$\begin{aligned} \dot{e}_2 &= A(q_1, q_2) + B(q_1)u + B(q_1)\eta + \\ &+ K_1(-K_1 e_1 + e_2) - \ddot{y}_{1d} \end{aligned} \quad (10)$$

с помощью управления u . С учетом, что $q_1 = \text{col}(q_1^1, q_1^2)$, расщепим вектор управления $Bu = B_1(q_1)u_1 +$

+ $B_2(q_1)u_2$, $u_1 \in R^m$, $\det B_1 \neq 0 \forall q_1 \in \bar{Q}_1$, и представим систему (10) в виде

$$\dot{e}_2 = \varphi(\cdot) + B_1(q_1)u_1, \quad (11)$$

где $\varphi(\cdot) = A(q_1, q_2) + B_2(q_1)u_2 + B(q_1)\eta + K_1(-K_1e_1 + e_2) - \dot{y}_{1d}$.

Широко распространенная концепция синтеза задачи стабилизации системы (11) состоит в обеспечении автономного управления, т. е. развязывания по управляющим воздействиям общего движения системы на подсистемы, описывающие динамику отдельных выходных переменных и последующего независимого синтеза задач стабилизации в этих подсистемах. Далее представлены разработанные авторами методы автономного управления в системе (11) в предположении, что элементы матрицы $B_1(q_1)$ известны.

Общий закон управления имеет вид

$$B_1(q_1)u_1 = U_0(e_2) - \varphi(\cdot), \quad (12)$$

где $U_0(e_2) = \text{col}(U_0(e_{21}), \dots, U_0(e_{2m}))$ — стабилизирующая обратная связь, компенсирующая перекрестные связи; $\varphi(\cdot)$ — вектор-функция, роль которой состоит в компенсации имеющихся неопределенностей. Моменты (12) играют в системе управления двойную роль, поскольку одновременно являются задающими воздействиями для отработки исполнительными устройствами (ИУ), что накладывает ряд ограничений на их выбор. Требуется, чтобы вектор-функции, составляющие управление (12), были ограничены и непрерывно дифференцируемы k раз по всем своим аргументам, где k — относительная степень динамической модели ИУ, составленной относительно моментов, приведенных к валу ИУ.

Введем обозначение невязки

$$e_3 = B_1(q_1)u_1 - U_0(e_2) + \varphi(\cdot), \quad e_3 \in R^m. \quad (13)$$

Существенно, что при данном подходе реализуется возможность выбора различных комплектов ИУ, в которых независимо решается задача слежения за заданными значениями управляющих моментов (стабилизация невязки (13)) либо в асимптотике

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_3(t) = 0, \quad (14)$$

либо с заданной точностью

$$\|e_2\| \leq \delta_3 = \text{const}. \quad (15)$$

3.2. Линейная стабилизирующая обратная связь

В системе (11) сформируем комбинированное управление

$$B_1(q_1)u_1 = -K_2e_2 - \varphi(\cdot), \quad (16)$$

где $\varphi(\cdot) = \text{col}(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, $K_2 = \text{diag}\{k_{2i}\}$, $k_{2i} > 0$, $i = \overline{1, m}$. Замкнутая система (11), (16) с учетом выражения (13) примет вид $\dot{e}_2 = -K_2e_2 + e_3$. Обеспечение условия (14) в системе управления ИУ приведет к следующим соотношениям: $e_3 \rightarrow 0 \Rightarrow e_2 \rightarrow 0 \Rightarrow e_1 \rightarrow 0 \Rightarrow y_1 \rightarrow y_{1d}$.

Для реализации управления (16) требуется измерять координаты q_1 и q_2 и оценивать в реальном времени с высокой точностью и быстродействием компенсирующую составляющую $\varphi(\cdot)$, что предполагает параметрическую определенность оператора объекта управления, вычисление величин $\dot{y}_{1d}(t)$ и $\ddot{y}_{1d}(t)$, построение адекватной модели возмущений (в предположении об их гладкости). Покажем, что требования к объему априорной информации об объекте управления и среде его функционирования, а также к объему вычислений, выполняемых в реальном времени, можно существенно сократить, если добавить в контур обратной связи наблюдатель состояния на скользящих режимах [5]. Данный наблюдатель (для его построения достаточно измерений угловых координат q_1) позволяет за теоретически конечное время получить оценки преобразованных переменных, линейных комбинаций составляющих оператора объекта управления (минуя их непосредственное вычисление) и имеющихся неопределенностей при условии их ограниченности, а именно:

$$|\varphi_i| \leq F_i = \text{const} > 0, \quad \bar{F} = \max\{F_i\}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (17)$$

Для системы (7), (11) наблюдатель состояния имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= K_1z_1 + z_2 + v_1, \\ \dot{z}_2 &= B_1(q_1)u_1 + v_2, \end{aligned} \quad (18)$$

где $z_1, z_2 \in R^m$ — вектор состояния, v_1, v_2 — корректирующие воздействия наблюдателя, которые выбираются в виде разрывных функций так, чтобы решить задачу стабилизации системы, записанной относительно невязок $\varepsilon_1 = (h(q_1) - y_{1d}) - z_1 = e_1 - z_1$, $\varepsilon_2 = e_2 - z_2$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in R^m$, которая в силу уравнений (7), (11) и (18) имеет вид

$$\dot{\varepsilon}_1 = -K_1\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - v_1, \quad \dot{\varepsilon}_2 = \varphi(\cdot) - v_2. \quad (19)$$

В первом уравнении системы (18) сформируем разрывные корректирующие воздействия $v_1 = M_1 \text{sign} \varepsilon_1$, где здесь и далее $M_1 = \text{diag}\{m_{1i}\}$, $\text{sign} \varepsilon_1 = \text{col}(\text{sign} \varepsilon_{11}, \dots, \text{sign} \varepsilon_{1m})$, что приведет к возникно-



вению в первом уравнении (19) за конечное время $t_1 > 0$ скользящего режима на многообразии $S_1 = \{e_1 = 0\} \Rightarrow z_1 = e_1$ при выполнении условий $m_{1i} > |\varepsilon_{2i}|$, $i = \overline{1, m}$. Согласно методу эквивалентного управления [6] при $t > t_1$ из уравнения статики имеем оценки $\dot{e}_1 = \varepsilon_2 - v_{1eq} = 0 \Rightarrow v_{1eq} = \varepsilon_2$, значения которых получим с выходов линейных фильтров первого порядка вида

$$\begin{aligned} \mu_1 \dot{\tau}_1 &= -\tau_1 + v_1, \quad \tau_1 \in R^m, \quad \mu_1 > 0, \\ \lim_{\mu_1 \rightarrow \infty} \tau_1 &= v_{1eq}. \end{aligned} \quad (20)$$

Полученные значения (20) используются для формирования разрывных корректирующих воздействий во втором уравнении (18), что при $v_2 = M_2 \text{sign} \varepsilon_2$, $m_{2i} > F_i$, $i = \overline{1, m}$ приведет к возникновению за теоретически конечное время $t_2 > t_1$ скользящего режима на многообразии $S_2 = \{\varepsilon_2 = 0 \cap S_1\} \Rightarrow z_2 = e_2$. Из уравнения статики имеем оценки $\dot{e}_2 = \varphi(\cdot) - v_{2eq} = 0 \Rightarrow v_{2eq} = \varphi(\cdot)$, значения которых получим с выходов линейных фильтров

$$\begin{aligned} \mu_2 \dot{\tau}_2 &= -\tau_2 + v_2, \quad \tau_2 \in R^m, \quad \mu_2 > 0, \\ \lim_{\mu_2 \rightarrow \infty} \tau_2 &= v_{2eq}. \end{aligned} \quad (21)$$

Закон управления (16) при наличии наблюдателя состояния (18) и фильтров (20) и (21) реализуется в виде $B_1(q_1)u_1 = -K_2 z_2 - \tau_2$. Данное выражение является сигнальным (а не аналитическим) заданием для отработки ИУ.

Объем информационного обеспечения можно еще больше сократить, если сформировать управление без компенсирующей составляющей в виде

$$B_1(q_1)u_1 = -k_2 e_2, \quad (22)$$

где для простоты изложения $k_2 = \text{const} > 0$. Для реализации закона управления (22) достаточно измерений q_1 и редуцированного наблюдателя на скользящих режимах вида

$$\dot{z}_1 = -K_1 z_1 + v_1. \quad (23)$$

С учетом уравнения (7) получим уравнение относительно невязки $\dot{e}_1 = -K_1 e_1 + e_2 - v_1$. При $v_1 = M_1 \text{sign} \varepsilon_1$, $m_{1i} > |\varepsilon_{2i}|$, $i = \overline{1, m}$ за конечное время возникнет скользящий режим на многообразии $S_1 = \{\varepsilon_1 = 0\} \Rightarrow z_1 = e_1$. Из уравнения статики имеем оценки $\dot{e}_1 = e_2 - v_{1eq} = 0 \Rightarrow v_{1eq} = e_2$, значения которых получим с выходов фильтров (20). С учетом уравнений (23) и (20) управление (22) примет вид $B_1(q_1)u_1 = -k_2 \tau_1$.

Для реализации управления (22) в отличие от управления (16) не требуется определять компенсирующую составляющую $\varphi(\cdot)$, достаточно убедиться в ограниченности ее компонент (17). Существенно, что в данном случае класс допустимых возмущений $\eta(t)$ может быть расширен за счет негладких функций времени. Роль коэффициента k_2 в замкнутой системе (11), (22) заключается в подавлении имеющихся неопределенностей, что приведет к выполнению условия (9) и, соответственно, решению задачи слежения с заданной точностью (3). С целью более тонкой настройки, для неопределенностей системы (11) введем мажорирующую функцию

$$\begin{aligned} \|\varphi\| &\leq L_0 + L_1 \|e_1\| + L_2 \|e_2\|, \\ L_0, L_1, L_2 &= \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (24)$$

С помощью второго метода Ляпунова покажем, что существуют такие значения $k_1 = k_{1i} = \text{const} > 0$, k_2 , при которых в замкнутой системе (7), (11) и (22) выполняются соотношения (3) и (9). Введем квадратичную форму в виде суммы квадратичных форм:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{2} e_1^T e_1 + \frac{1}{2} e_2^T e_2. \quad (25)$$

Для производной первого слагаемого квадратичной формы (25) справедлива следующая оценка: $\dot{V}_1 = e_1^T \dot{e}_1 = e_1^T (e_2 - k_1 e_1) \leq \|e_1\|(\|e_2\| - k_1 \|e_1\|)$. Неравенство $\dot{V}_1 < 0$ обеспечивается вне окрестности $\|e_1\| \leq \|e_2\|/k_1 \leq \delta_1$ при $k_1 > \|e_2\|/\delta_1$, откуда при фиксированном значении $k_1 = k_1^*$ определяется точность (9), которую требуется обеспечить в системе (11), (22):

$$\|e_2\| \leq k_1^* \delta_1 = \delta_2 = \text{const}. \quad (26)$$

Для второго слагаемого производной квадратичной формы (25) в силу выражений (11), (13), (22), (24) и (26) справедлива оценка: $\dot{V}_2 = e_2^T \dot{e}_2 = e_2^T (\varphi(\cdot) + e_3 - k_2 e_2) \leq \|e_2\|(L_0 + L_1 \|e_2\| \frac{1}{k_1^*} + L_2 \|e_2\| + \|e_3\| - k_2 \|e_2\|) < 0$ вне окрестности $\|e_2\| \leq \delta_2$ при $k_{22} > L_0/(k_1^* \delta_1) + L_1/k_1^* + L_2$, $k_{23} > \|e_3\|/(k_1^* \delta_1)$, $k_2 = k_{22} + k_{23}$. Первое неравенство является нижней оценкой для выбора $k_{22} = k_{22}^*$. Из второго неравенства при фиксированном значении $k_{23} = k_{23}^*$ определяется точность (15), которую требуется обеспечить на этапе синтеза управления в ИУ ($k_{23}^* = 0$, если в ИУ выполняется условие (14)). Поведение переменных замкнутой следящей системы (7), (11)

и (22) описывается логической цепочкой: $\|e_3\| \leq \delta_3$ (или $e_3 \rightarrow 0$) $\Rightarrow \|e_2\| \leq \delta_2 \Rightarrow \|e_1\| \leq \delta_1$.

Заметим, что наличие ограничений на управляющие моменты $u_1 = \text{col}(u_{11}, \dots, u_{1m})$, $|u_{1i}| \leq U_{1i}$, $U_1 = \min\{U_{1i}\}$ может привести к тому, что допустимого коэффициента усиления $k_2^* \leq k_{2\max}(U_1)$ может оказаться недостаточно для попадания в заданную окрестность (3). На практике наличие ограничений приведет к реализации управления (22) в виде линейной функции с насыщением $B_1(q_1)u_1 = -\text{sat}(k_{2\max}e_2)$. Возникает естественное желание учесть имеющиеся ограничения на стадии синтеза. Такой цели отвечают, например, системы с разрывными управлениями.

3.3. Разрывная стабилизирующая обратная связь

В системе (11), (17) сформируем разрывное управление

$$B_1(q_1)u_1 = -M \text{sign}e_2, \quad (27)$$

что при выполнении условий $F_i < m_i \leq m_{i\max}$, $m_{i\max}(U_{1i})$, $i = \overline{1, m}$ приведет к возникновению за конечное время скользящего режима [6] на многообразии $S = \{e_2 = 0\} \Rightarrow e_1 \rightarrow 0 \Rightarrow y_1 \rightarrow y_{1d}$. К аналогичному результату приведет комбинированное управление $B_1(q_1)u_1 = -M \text{sign}e_2 - \varphi(\cdot)$, где $0 < m_i \leq m_{i\max} - F_i$, $i = \overline{1, m}$. Данные алгоритмы управления, хотя и не реализуемы в рассматриваемой задаче в силу физических ограничений, налагаемых на управляющие моменты, важны с теоретической точки зрения как предельный случай. Следующий закон управления является допредельной реализацией разрывного управления в виде нелинейной непрерывно дифференцируемой ограниченной функции.

3.4. Нелинейная стабилизирующая обратная связь

Для системы (11) сформируем закон управления в виде

$$B_1(q_1)u_1 = -M \text{arctg}(k_2 e_2) - \varphi(\cdot), \\ M, k_2 = \text{const} > 0, \quad (28)$$

где

$$\text{arctg}(k_2, e_2) = \text{col}(\text{arctg}(k_2 e_{21}), \dots, \\ \text{arctg}(k_2 e_{2m})), |\text{arctg}(k_2 e_{2i})| < \frac{\pi}{2}, \\ \text{arctg}(k_2 e_{2i}) \xrightarrow{k_2 \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \text{sign}e_{2i}, i = \overline{1, m}. \quad (29)$$

В замкнутой системе (11), (28), (13) $\dot{e}_2 = -M \text{arctg}(k_2 e_2) + e_3$ при выполнении условия (14), $0 < m_i \leq m_{i\max} - F_i$ обеспечивается асимптотическая

сходимость (8), так как $e_{2i} \dot{e}_{2i} < 0$ при $e_{2i} \neq 0$ и $\text{arctg}(k_2 e_{2i}) \sim k_2 e_{2i}$ при $e_{2i} \rightarrow 0$, $i = \overline{1, m}$. Информационное обеспечение закона управления (28): измерение q_1 и наблюдатель состояния (18), (20) и (21).

Покажем, что управление (28) без компенсирующей составляющей вида

$$B_1(q_1)u_1 = -M \text{arctg}(k_2 e_2) \quad (30)$$

позволяет обеспечить заданную точность слежения. Точность, которую требуется обеспечить в замкнутой системе (11), (30)

$$\dot{e}_2 = \varphi(\cdot) + e_3 - M \text{arctg}(k_2 e_2), \quad (31)$$

определяется выражением (26). Зафиксируем значение коэффициента k_2 из следующих соображений:

$$\pi/2 - \text{arctg}(k_2 \delta_2) < \varsigma \Rightarrow k_2 > \text{ctg}\varsigma / (k_1^* \delta_1), \\ k_2 = k_2^*, \quad (32)$$

где ς — малая положительная величина. Для производной второго слагаемого квадратичной формы (25) с учетом выражений (17), (31) и (32) вне окрестности $\|e_2\| \leq \delta_2$ имеем: $\dot{V}_2 = e_2^T \dot{e}_2 = e_2^T (\varphi(\cdot) + e_3 - M \text{arctg}(k_2^* e_2)) \leq \|e_2\| (\bar{F} + \|e_3\| - M(\pi/2 - \varsigma)) < 0$ при $M_1 > 2\bar{F}/(\pi - 2\varsigma)$, $M_2 > 2\|e_3\|/(\pi - 2\varsigma)$, $M = M_1 + M_2 \leq M_{\max}(U_1)$. Данные неравенства являются оценками для выбора коэффициентов усиления в законе управления (30).

Информационное обеспечение закона управления (30): измерение q_1 и редуцированный наблюдатель состояния (23), (20).

4. ПРОЦЕДУРА ДОПРЕДЕЛЬНОЙ ИЕРАРХИИ УПРАВЛЕНИЙ

Базовые алгоритмы вида (12) позволяют диагностировать замкнутую систему и реализовать автономное управление выходными координатами, но требуют вычислений в реальном времени матрицы $B_1(q_1)$ и обратной к ней. Предпримем попытки избежать таких вычислений. Вначале рассмотрим частный случай, когда $B_1(q_1) = (b_{ij})$ является матрицей с преобладающей диагональю в рассматриваемой области, а именно

$$\bar{b}_{ii} > \sum_{j=1, j \neq i}^m \bar{b}_{ij}, \bar{b}_{ii} \leq |b_{ii}|, b_{ii} \neq 0 (\text{sign}b_{ii}(q_1) = \text{const}), \\ |b_{ij}| \leq \bar{b}_{ij}, i, j = \overline{1, m}, \forall q_1 \in \bar{Q}_1. \quad (33)$$

С учетом выражения (33) для системы (11) закон управления имеет вид

$$u_1 = -MS(b_{ii}) \text{arctg}(k_2 e_2), \quad (34)$$



где $S(b_{ii}) = \text{diag}\{\text{sign}b_{ii}\}$, $i = \overline{1, m}$, который отличается от закона управления (30) тем, что для его реализации точного знания коэффициентов матрицы $B_1(q_1)$ не требуется — только диапазон их изменения в рассматриваемой области, а для ненулевых диагональных элементов дополнительно — их знаки, определение которых существенно проще, чем вычисление значений.

Покажем, что в замкнутой системе (11), (34) обеспечивается заданная точность (9). Для получения нижней оценки для выбора коэффициента $M \leq \frac{2}{\pi} U_1$ исследуем второе слагаемое квадратичной формы (25), представленное в покоординатном виде

$$V_2 = \sum_{i=1}^m V_{2i}, \quad V_{2i} = \frac{1}{2} (e_{2i})^2. \quad (35)$$

Для производной i -го ($i = \overline{1, m}$) слагаемого квадратичной формы (35) с учетом выражений (11), (17) (33) и (34), справедлива оценка $\dot{V}_{2i} = e_{2i} \dot{e}_{2i} = e_{2i} [\varphi_i(\cdot) - M \sum_{j=1, j \neq i}^m b_{ij} \text{sign}(b_{jj}) \arctg(k_2 e_{2j}) - Mb_{ii} \text{sign}(b_{ii}) \arctg(k_2 e_{2i})] \leq |e_{2i}| [F_i - M(\bar{b}_{ii}(\frac{\pi}{2} - \varsigma) - \sum_{j=1, j \neq i}^m \bar{b}_{ij} \frac{\pi}{2})]$.

Вне окрестности $|e_{2i}| \leq \delta_{2i}$ справедливы неравенства $\dot{V}_{2i} < 0$ при $2\bar{F}/(\pi\bar{B}) < M$, $\bar{B} = \min\left\{\bar{b}_{ii}\left(1 - \frac{2\varsigma}{\pi}\right) - \sum_{j=1, j \neq i}^m \bar{b}_{ij}\right\}$.

Для общего случая, когда предположение (33) не выполняется, воспользуемся идеологией метода иерархии управлений, разработанного для систем с разрывными управлениями [6]. Для рассматриваемой допредельной реализации (34) разрывных управлений далее предложена пошаговая процедура выбора коэффициентов обратной связи $M = \text{diag}\{m_i\}$, $m_i = \text{const} > 0$, $k_{2i} > 0$, $i = \overline{1, m}$ на основе неравенств, которая позволяет искусственно получить матрицу с преобладающей диагональю (в общем случае, с преобладающими элементами из разных столбцов) перед управлением, для i -й компоненты которого вне окрестности $|e_{2i}| \leq \delta_{2i}$ с учетом выражения (32) справедливы оценки:

$$\bar{u}_{1i} < |u_{1i}| < \bar{\bar{u}}_{1i}, \quad \bar{u}_{1i} = m_i \left(\frac{\pi}{2} - \varsigma_i\right), \\ \bar{\bar{u}}_{1i} = m_i \frac{\pi}{2}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (36)$$

Для простоты изложения установим иерархию компонент вектора e_2 , совпадающую с их порядковыми номерами: $|e_{21}| \leq \delta_{21}, \dots, |e_{2m}| \leq \delta_{2m}$. Это означает, что неравенство $|e_{2i}| \leq \delta_{2i}$ будет обеспечено лишь после того, как выполняются соотношения $|e_{21}| \leq \delta_{21}, \dots, |e_{2, i-1}| \leq \delta_{2, i-1}$.

Шаг 1. В первом уравнении системы (11) выберем управляющую координату $u_{11} = -m_1 \text{sign}b_{11} \times \arctg(k_{21}e_{21})$ по признаку $b_{11}(q_1) \neq 0 \forall q_1 \in \bar{Q}_1$. Для производной первого слагаемого квадратичной формы (35) с учетом оценок (36) вне окрестности

$$|e_{21}| \leq \delta_{21} \text{ имеем: } \dot{V}_{21} = e_{21} \dot{e}_{21} = e_{21} \left(\varphi_1 + \sum_{j=2}^m b_{1j} u_{1j} - b_{11} m_1 \text{sign}b_{11} \arctg(k_{21}e_{21}) \right) \leq |e_{21}| \left(F_1 + \sum_{j=2}^m \bar{b}_{1j} \bar{u}_{1j} - \bar{b}_{11} m_1 \left(\frac{\pi}{2} - \varsigma_1\right) \right) < 0 \text{ при выполнении условия } \left(F_1 + \sum_{j=2}^m \bar{b}_{1j} \bar{u}_{1j} \right) / \left(\bar{b}_{11} \left(\frac{\pi}{2} - \varsigma_1\right) \right) < m_1 \leq \frac{2}{\pi} U_{11}, \text{ где}$$

$\bar{b}_{11} = |b_{11}|$. Для регуляризации задачи введем новое управление \tilde{u}_{11} и рассмотрим допредельную реализацию метода эквивалентного управления [6]. В асимптотике при $k_{21} \rightarrow +\infty$ выполняются соотношения (29), $\dot{e}_{21} \rightarrow 0$ и $\tilde{u}_{11} \rightarrow u_{11eq}$. Из уравнения

$$\text{статики } \dot{e}_{21} = \varphi_1 + \sum_{j=2}^m b_{1j} u_{1j} + b_{11} \tilde{u}_{11} = 0 \Rightarrow \tilde{u}_{11} = \left(-\varphi_1 - \sum_{j=2}^m b_{1j} u_{1j} \right) / b_{11}, \text{ которое выполняется с}$$

точностью до бесконечно малой $\alpha_1(1/k_{21})$, найдем выражение для управления \tilde{u}_{11} и подставим его в остальные уравнения системы (11) вместо u_{11} , получим

$$\dot{e}_{21} = \varphi_1^1 + \sum_{j=2}^m b_{1j}^1 u_{1j}, \quad i = \overline{2, m}, \quad (37)$$

где $\varphi_i^1 = \varphi_i - b_{i1} \varphi_1 / b_{11}$, $b_{ij}^1 = b_{ij} - b_{i1} b_{1j} / b_{11}$.

Шаг 2. Во втором уравнении системы (37) выберем управляющую координату $u_{12} = -m_2 \text{sign}b_{22}^1 \times \arctg(k_{22}e_{22})$ по признаку $b_{22}^1(q_1) \neq 0 \forall q_1 \in \bar{Q}_1$ и указанным образом осуществим регуляризацию задачи и т. д.

Шаг μ . В результате указанных преобразований последние $(m - \mu + 1)$ уравнений системы (37) примут вид

$$\dot{e}_{2i} = \varphi_i^{\mu-1} + \sum_{j=\mu}^m b_{ij}^{\mu-1} u_{1j}, \quad i = \overline{\mu, m}, \quad (38)$$

где $\varphi_i^{\mu-1} = \varphi_i^{\mu-2} - b_{i,\mu-1}^{\mu-2} \varphi_{\mu-1}^{\mu-2} / b_{\mu-1,\mu-1}^{\mu-2}$, $b_{ij}^{\mu-1} = b_{ij}^{\mu-2} - b_{i,\mu-1}^{\mu-2} b_{\mu-1,j}^{\mu-2} / b_{\mu-1,\mu-1}^{\mu-2}$, $|\varphi_i^{\mu-1}| \leq F_i^{\mu-1}$, $|b_{ij}^{\mu-1}| \leq \bar{b}_{ij}^{\mu-1}$. Выберем в μ -м уравнении системы (38) управляющую координату $u_{1\mu} = -m_\mu \text{sign} b_{\mu\mu}^{\mu-1} \times \arctg(k_{2\mu} e_{2\mu})$ по признаку $b_{\mu\mu}^{\mu-1}(q_1) \neq 0 \forall q_1 \in \bar{Q}_1$. Тогда вне окрестности $|e_{2\mu}| \leq \delta_{2\mu}$ справедливы оценки $\dot{V}_{2\mu} = e_{2\mu} \left(\varphi_\mu^{\mu-1} + \sum_{j=\mu+1}^m b_{\mu j}^{\mu-1} u_{1j} - b_{\mu\mu}^{\mu-1} m_\mu \times \text{sign} b_{\mu\mu}^{\mu-1} \arctg(k_{2\mu} e_{2\mu}) \right) \leq |e_{2\mu}| \left(F_\mu^{\mu-1} + \sum_{j=\mu+1}^m \bar{b}_{\mu j}^{\mu-1} \bar{u}_{1j} - \bar{b}_{\mu\mu}^{\mu-1} m_\mu \left(\frac{\pi}{2} - \varsigma_\mu \right) \right) < 0$, где $\bar{b}_{\mu\mu}^{\mu-1} \leq |b_{\mu\mu}^{\mu-1}|$, при выполнении условия

$$\left(F_\mu^{\mu-1} + \sum_{j=\mu+1}^m \bar{b}_{\mu j}^{\mu-1} \bar{u}_{1j} \right) / \left(\bar{b}_{\mu\mu}^{\mu-1} \left(\frac{\pi}{2} - \varsigma_\mu \right) \right) < m_\mu < \frac{2}{\pi} U_{1\mu}. \quad (39)$$

При $k_{2\mu} \rightarrow +\infty$ выполняются соотношения (29), $\dot{e}_{2\mu} \rightarrow 0$ и $\tilde{u}_{1\mu} \rightarrow u_{1\mu eq}$. Из уравнения статики, которое выполняется с точностью до бесконечно малой $\alpha_\mu(1/k_{2\mu})$, найдем выражение для нового управления $\tilde{u}_{1\mu}$ в виде $\dot{e}_{\mu\mu} = \varphi_\mu^{\mu-1} + \sum_{j=\mu+1}^m b_{\mu j}^{\mu-1} u_{1j} + b_{\mu\mu}^{\mu-1} \tilde{u}_{1\mu} = 0 \Rightarrow \tilde{u}_{1\mu} = \left(-\varphi_\mu^{\mu-1} - \sum_{j=\mu+1}^m b_{\mu j}^{\mu-1} u_{1j} \right) / b_{\mu\mu}^{\mu-1}$ и подставим его в остальные уравнения (38) вместо $u_{1\mu}$, и т. д.

В результате указанных построений получим последнее уравнение (38) $\dot{e}_{2m} = \varphi_m^{m-1} + b_{mm}^{m-1} u_{1m}$, где $\varphi_m^{m-1} = \varphi_m^{m-2} - b_{m,m-1}^{m-2} \varphi_{m-1}^{m-2} / b_{m-1,m-1}^{m-2}$, $b_{mm}^{m-1} = b_{mm}^{m-2} - b_{m,m-1}^{m-2} b_{m-1,m}^{m-2} / b_{m-1,m-1}^{m-2} \neq 0 \forall q_1 \in \bar{Q}_1$, $\bar{b}_{mm}^{m-1} \leq |b_{mm}^{m-1}|$, $|\varphi_m^{m-1}| \leq F_m^{m-1}$, $u_{1m} = -m_m \text{sign} b_{mm}^{m-1} \times \arctg(k_{2m} e_{2m})$. Вне окрестности $|e_{2m}| \leq \delta_{2m}$ имеем: $\dot{V}_{mm} = e_{2m} \left(\varphi_m^{m-1} - b_{mm}^{m-1} m_m \text{sign} b_{mm}^{m-1} \arctg(k_{2m} e_{2m}) \right) \leq |e_{2m}| \left(F_m^{m-1} - \bar{b}_{mm}^{m-1} m_m \left(\frac{\pi}{2} - \varsigma_m \right) \right) < 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(F_m^{m-1} / \left(\bar{b}_{mm}^{m-1} \left(\frac{\pi}{2} - \varsigma_m \right) \right) \right) < m_m < \frac{2}{\pi} U_{1m}. \text{ Выбранное}$$

из указанного диапазона значение m_m^* подставляем в оценки предыдущих коэффициентов (39), потом из $(m-1)$ -го неравенства определяем фиксированное значение m_{m-1}^* и т. д.:

$$\left(F_\mu^{\mu-1} + \sum_{j=\mu+1}^m \bar{b}_{\mu j}^{\mu-1} - 1 m_j^* \frac{\pi}{2} \right) / \left(\bar{b}_{\mu\mu}^{\mu-1} \left(\frac{\pi}{2} - \varsigma_\mu \right) \right) < m_\mu^* \leq \frac{2}{\pi} U_{1\mu}, \quad \mu = \overline{m-1, 1}.$$

Разработанную процедуру выбора коэффициентов обратной связи правомерно считать иерархической в асимптотике при $k_{21} \gg k_{22} \gg \dots \gg k_{2m} \rightarrow +\infty$. Существенно, что указанные построения проводятся на этапе исследования задач, что позволяет сократить объем вычислений в реальном времени. Для реализации алгоритма достаточно непосредственных измерений выходных переменных y_1 и переменных наблюдателя (23), (20).

Закон управления, разработанный в данном разделе, представим в общем виде

$$u_1 = -MS(b_{ii}^{i-1}(q_1)) \arctg(k_2 e_2). \quad (40)$$

5. ПРИМЕР

Рассмотрим двухзвенный плоскостной манипулятор, динамическая модель которого описывается неизбыточной системой (1) с двумя степенями свободы: $q_1 = \text{col}(q_{11}, q_{12})$, $y_1 = \text{col}(y_{11}, y_{12})$, $n = m = 2$,

$$\begin{aligned} H_{11} &= m_1 l_{c1}^2 + I_1 + m_2 (l_1^2 + l_{c1}^2 + 2l_1 l_{c2} \cos q_{12}) + I_2, \\ H_{22} &= m_2 l_{c2}^2 + I_2, \quad H_{12} = H_{21} = \\ &= m_2 l_1 l_{c2} \cos q_{12} + m_2 l_{c2}^2 + I_2, \\ C_{11} &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin q_{12} q_{22}, \\ C_{21} &= m_2 l_1 l_{c2} \sin q_{12} q_{21}, \quad C_{22} = 0, \\ C_{12} &= -m_2 l_1 l_{c2} \sin q_{12} q_{22} - m_2 l_1 l_{c2} \sin q_{12} q_{21}, \\ G_1 &= m_1 l_{c1}^2 \cos q_{11} + m_2 g [l_{c2} \cos(q_{11} + q_{12}) + l_1 \cos q_{11}], \\ G_2 &= m_2 l_{c2} g \cos(q_{11} + q_{12}), \\ y_{11} &= h_1(q_1) = l_1 \cos q_{11} + l_2 \cos(q_{11} + q_{12}), \\ y_{12} &= h_2(q_2) = l_1 \sin q_{11} + l_2 \sin(q_{11} + q_{12}), \end{aligned} \quad (41)$$

где $I_1 = 0,4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $I_2 = 0,25 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ — приведенные моменты инерции, $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ — ускорение свободного падения, $m_1 = 4 \text{ кг}$, $m_2 = 3 \text{ кг}$ — массы, $l_1 = 0,5 \text{ м}$, $l_2 = 0,5 \text{ м}$ — длина, $l_{c1} = 0,3 \text{ м}$, $l_{c2} = 0,25 \text{ м}$ — расстояния от начала до центров тя-



жести звеньев. Программная траектория имеет вид окружности (рис. 1)

$$y_{11d} = g_{10} + R \sin t, \quad y_{12d} = g_{20} + R \cos t. \quad (42)$$

В системе (1), (41) конкретному положению схвата в общем случае могут соответствовать две конфигурации (q_{11}, q_{12}) и $(\tilde{q}_{11}, \tilde{q}_{12})$ (рис. 2). Заметим, что наличие информации о знаке q_{12} позволяет установить взаимно однозначное соответствие между координатами схвата и угловыми положениями звеньев $y_1 \leftrightarrow q_1$.

В выходном отображении системы (1), (41) в виде (4) $\det J = l_1 l_2 \sin q_{12} \neq 0 \forall q_{12} \in \bar{Q}_1$ за исключением особых точек $q_{12}^* = \pm k\pi, k = 0, 1, \dots$, которые соответствуют вытянутой или сложенной руке манипулятора.

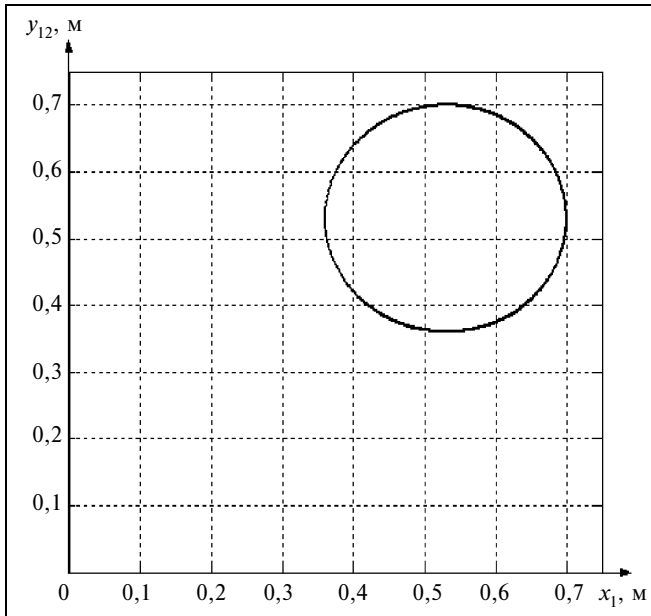


Рис. 1. Заданная траектория

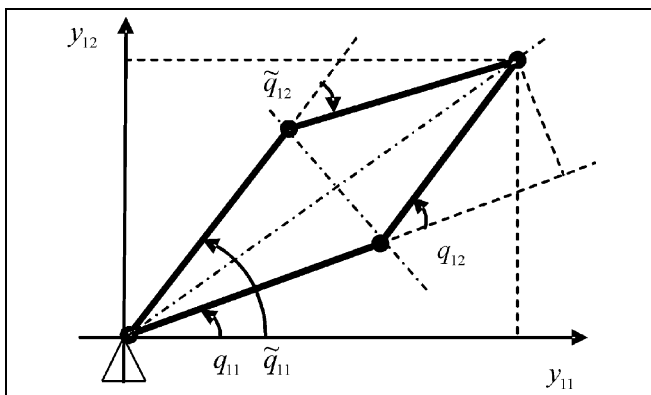


Рис. 2. Разнообразие конфигураций

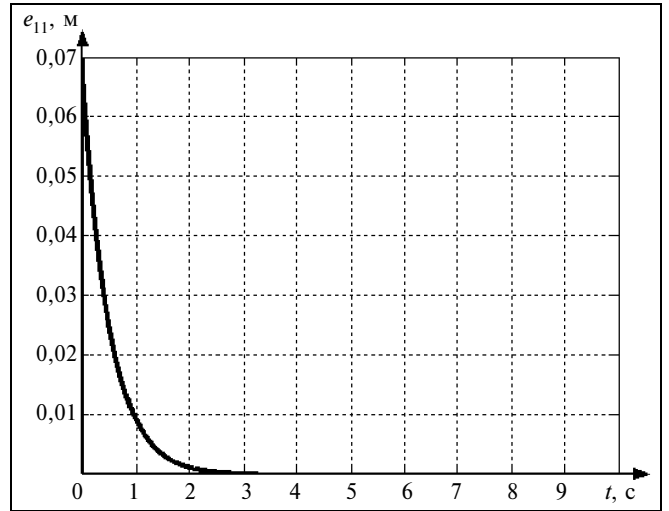


Рис. 3. Ошибка слежения $e_{11} \rightarrow 0$

Представим систему (1), (41) в виде (7), (11):

$$\dot{e}_{1i} = -k_{1i} e_{1i} + e_{2i}, \quad \dot{e}_{2i} = \varphi_i(\cdot) + b_{i1}(\cdot) u_1 + b_{i2}(\cdot) u_2, \quad i = 1, 2, \quad (43)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & -[y_{22} q_{21} + (y_{22} - l_1 \cos q_{11} q_{21}) q_{22}] + \\ & + \frac{1}{\Delta} [y_{12} H_{22} G_1^* - y_{12} H_{12} G_2^* - (y_{12} - l_1 \sin q_{11}) H_{21} G_1^* + \\ & + (y_{12} - l_1 \sin q_{11}) H_{11} G_2^*] + k_{11} (-k_{11} e_{11} + e_{21}) - \ddot{y}_{11d}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & [y_{21} q_{21} + (y_{21} + l_1 \sin q_{11} q_{21}) q_{22}] - \\ & - \frac{1}{\Delta} [y_{11} H_{22} G_1^* + y_{11} H_{12} G_2^* + (y_{11} - l_1 \cos q_{11}) H_{21} G_1^* - \\ & - (y_{11} - l_1 \cos q_{11}) H_{11} G_2^*] + k_{12} (-k_{12} e_{12} + e_{22}) - \ddot{y}_{12d}, \end{aligned}$$

$$G_1^* = (c_{11} q_{21} + c_{12} q_{22}) + G_1(q_1),$$

$$G_2^* = (c_{21} q_{21} + c_{22} q_{22}) + G_2(q_1),$$

$$\Delta = H_{11} H_{22} - H_{21} H_{12},$$

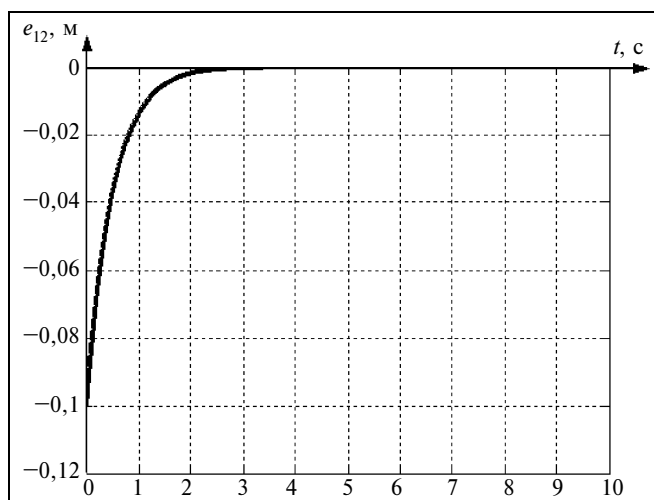
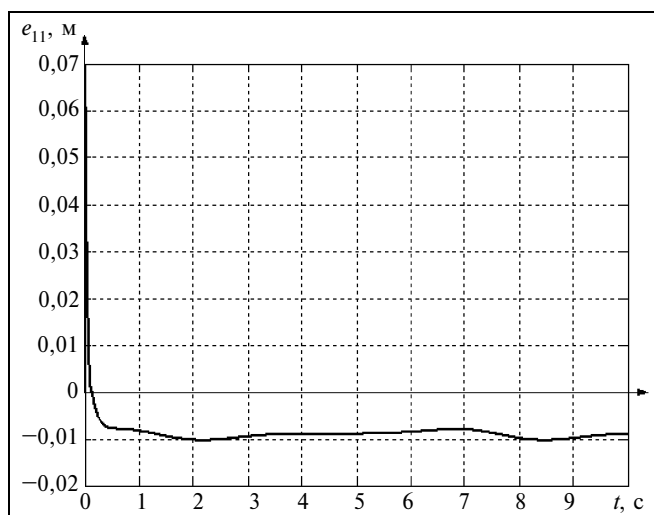
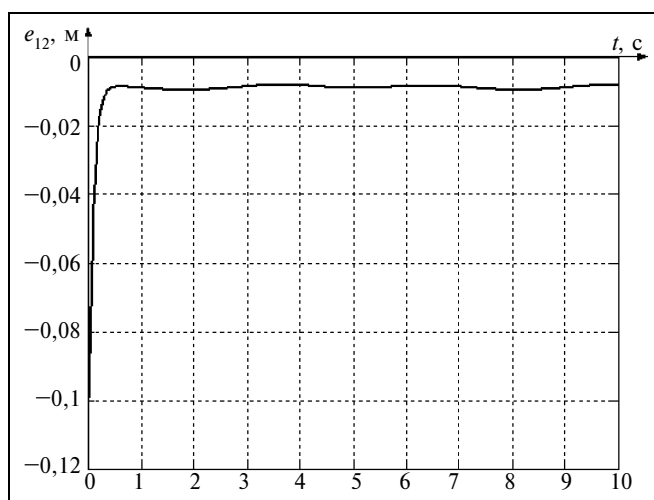
$$b_{11} = \frac{1}{\Delta} [(y_{12} - l_1 \sin q_{11}) H_{21} - y_{12} H_{22}],$$

$$b_{12} = \frac{1}{\Delta} [y_{12} H_{12} - (y_{12} - l_1 \sin q_{11}) H_{11}],$$

$$b_{21} = \frac{1}{\Delta} [y_{11} H_{22} - (y_{11} - l_1 \cos q_{11}) H_{21}],$$

$$b_{22} = \frac{1}{\Delta} [(y_{11} - l_1 \cos q_{11}) H_{11} - y_{11} H_{12}].$$

На рис. 3 и 4 показаны невязки отработки задания (42) в системе (43) $e_{11}(t) = y_{11} - y_{11d}$, $e_{12}(t) = y_{12} - y_{12d}$ в предельном случае, когда в законе управления (40) используется разрывная функция $u_1 = -MS(b_{ii}^{-1}(q_1)) \text{sign}(k_2 e_2)$, что позволяет полностью подавить имеющиеся неопреде-


 Рис. 4. Ошибка слежения $e_{12} \rightarrow 0$

 Рис. 5. Ошибка слежения $|e_{11}| \leq 0,01$

 Рис. 6. Ошибка слежения $|e_{12}| \leq 0,01$

ленности и обеспечить асимптотическую сходимость к заданным траекториям: $e_2 = 0 \Rightarrow e_1 \rightarrow 0$. При допредельной реализации разрывного управления посредством функции арктангенса (40) обеспечивается заданная точность слежения ($\|e_2\| \leq \delta_2 \Rightarrow \|e_1\| \leq \delta_1$), результат отработки задающего воздействия (42) показан на рис. 5 и 6.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложены методы синтеза задач управления положением рабочего органа робота-манипулятора на основе блочного подхода. Предложено формировать обобщенные моменты в виде непрерывных функций, являющихся аппроксимацией разрывных функций, что позволяет (в предельной ситуации) воспользоваться такими преимуществами методов систем с разрывными управлениями, функционирующих в скользящем режиме, как линеаризация, декомпозиция и инвариантность. Особенность работы состоит в применении наблюдателей состояния на скользящих режимах, что позволяет существенно сократить число непосредственно измеряемых переменных вектора состояния объекта управления и получить оценки неконтролируемых параметрических и внешних возмущений.

Отметим, что в данной работе решается в некотором смысле «узкая» задача управления положением рабочего органа манипулятора, тогда как на практике возникает ряд ограничений, формулируемых в конфигурационном пространстве, например, в задачах обхода препятствий и т. п.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черноусько Ф.Л., Ананьенский И.М., Решмин С.А. Методы управления нелинейными механическими системами. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 328 с.
2. Уткин А.В. Метод расширения пространства состояния в задаче автономного управления // Автоматика и телемеханика. — 2007. — № 6. — С. 81–98.
3. Принцип блочного управления / С.В. Дракунов, Д.Б. Исосимов, А.Г. Лукьянов и др. // Автоматика и телемеханика. — 1990. — № 5. — С. 3–13.
4. Краснова С.А. Каскадный синтез системы управления манипулятором с учетом динамики электроприводов // Автоматика и телемеханика. — 2001. — № 11. — С. 51–72.
5. Краснова С.А., Уткин В.А. Каскадный синтез наблюдателей состояния динамических систем. — М.: Наука, 2006. — 272 с.
6. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1987. — 368 с.

☎ (495) 334-93-21, e-mail: krasnova@ipu.ru, vicutkin@ipu.ru

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.Д. Земляковым. □