УДК 531.36:62-50

ОБ УПРАВЛЕНИИ ОБЪЕКТОМ С АПРИОРНО НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ СТРУКТУРОЙ ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ

В. А. Погорелов

Ростовский военный институт Ракетных войск, г. Ростов-на-Дону

Рассмотрен метод, позволяющий осуществлять точный синтез законов управления нелинейным стохастическим объектом с неопределенной структурой вектора состояния, оптимальных в смысле нелинейных вероятностных критериев. Показаны преимущества предложенного метода по сравнению с методом управления, не предполагающим точную идентификацию структуры вектора состояния в процессе движения объекта. Приведен пример практического использования предлагаемого подхода.

ВВЕДЕНИЕ

Существующие методы синтеза стохастического управления предполагают представление вектора состояния объекта управления в форме Ито или Ланжевена [1—3]. Предполагается, что векторные и матричные функции, входящие в правые части стохастических уравнений, известны с требуемой точностью. Однако в практических приложениях часто встречаются случаи, когда, по тем или иным причинам, априори не удается точно определить не только отдельные параметры вектора состояния подвижного объекта (ПО), но и некоторую часть структуры правых частей уравнений [1, 4—9]. Очевидно, что в таких случаях применить известные методы к синтезу управления ПО без дополнительного привлечения методов идентификации или робастных алгоритмов не представляется возможным. Остановимся на некоторых аспектах применения последних в системах управления.

Существующие методы стохастической непараметрической идентификации многосвязных многомерных объектов предполагают наличие огромного объема экспериментального материала, который для уникальных объектов из-за ограниченного жизненного цикла получить, в принципе, невозможно [1, 2]. Но даже для серийно выпускаемых объектов проблема непараметрической идентификации вследствие старения материала, износа конструкции, эксплуатации в экстремальных режимах и прочего остается нерешенной. Например, при синтезе вектора состояния корректируемой гиростабилизированной платформы модель ее дрейфа описывается полиномами второго порядка с известными по результатам наземных калибровок коэффициентами [5, 7]. Такая модель оказывается адекватной при перегрузках, не превышающих 15—20 g. В случае движения объекта с большими перегрузками, например, при аварийном спуске космического аппарата с орбиты, данная модель оказывается неадекватной реальному движению платформы, т. е. модель углового движения объекта управления не соответствует априорным предположениям, что ведет к структурной неопределенности его вектора состояния.

В определенной степени решить проблему управления объектом с частично неопределенной структурой можно, применив робастные методы [8—12]. Они гарантируют надежное управление объектом в условиях действия возмущений с априорно неопределенными вероятностными характеристиками [11]. Однако грубость робастных методов, обусловленная, как правило, упрощением модели объекта, не всегда позволяет синтезировать требуемый закон управления.

В какой-то мере проблему грубости робастного управления решает часто применяемый на практике способ коррекции модели измерений, осуществляемый путем привлечения внешней информации, например, показаний спутниковых навигационных систем [13]. Хотя такой подход и позволяет существенно повысить точность управления движением, его применение может войти в противоречие с требованиями, предъявляемыми к объекту управления в целом, например, автономности его функционирования. Кроме того, анализ способов применения различных систем коррекции показывает, что они эффективны только в определенных условиях эксплуатации объекта управления, что ограничивает их применение [14].

Можно сделать вывод, что разработка нового подхода к синтезу управления нелинейными стохастическими объектами с неизвестной структурой является актуальной научной и практической задачей. Рассмотрим один из возможных подходов к ее решению.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть стохастический объект описывается нелинейным векторным дифференциальным уравнением размерности N в симметризованной форме

$$\dot{X} = f_0(X, t) + f_1(X, t)Q + f_2(X, t)U + f_3(X, t)V_i, \quad (1)$$

где X — N-мерный вектор состояния системы; f_1 ($i = 0, ..., 3$) — известные нелинейные векторная и матричные функции размерностей N, $N \times M$, $N \times S$ и $N \times L$, удовлетворяющие условию Липшица $\forall X, t$; $Q(X, t)$ — M-мерная неизвестная вектор-функция, определяемая физическими свойствами объекта и подлежащая идентификации по показаниям измерителя, $M \leqslant N$; $U(X, t)$ — I-мерный вектор искомого управления, $S \leqslant N$; V_t — G-мерный вектор нормированного белого гауссовского шума с нулевым средним и матрицей интенсивностей $D_V(t)$, $L \leqslant N$.

Структурно неопределенный управляемый вектор X наблюдается с помощью измерителя, описываемого в общем случае нелинейным стохастическим уравнением вида

$$Z = H(X, t) + W_t,$$

где Z — K-мерный вектор выходных сигналов измерителя, $K \leqslant N$; $H(X, t)$ — известная нелинейная вектор-функция наблюдения размерности K, удовлетворяющая условию Липшица $\forall X, t$; W_t — белый гауссовский вектор-шум измерения размерности K с нулевым средним и матрицей интенсивностей $D_w(t)$

Апостериорная плотность вероятности (АПВ) $\rho(X, Q, U, t/Z(\tau), \tau \in [0, t)) = \rho_z$ такого процесса, удовлетворяющего приведенным условиям, описывается интегродифференциальным уравнением с частными производными Стратоновича [1]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_z}{\partial t} &= L\{q, b, \rho_z\} - \mathrm{div}(f_1 Q)\rho_z - \mathrm{div}(f_2 U)\rho_z + [R - R_0]\rho_z = \\ &= S[\rho_z] - \mathrm{div}(f_1 Q)\rho_z - \mathrm{div}(f_2 U)\rho_z, \qquad (2)\end{aligned}$$

где

$$L\{q, b, \rho_z\} = -\mathrm{div}\{q(X, t)\rho_z\} + \frac{1}{2}\mathrm{div}[\overrightarrow{\mathrm{div}}\{b(X, t)\rho_z\}],$$

$$q(X, t) = f_0(X, t) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X}f_3(X, t)D_V[f_3^T(X, t)]^{(v)},$$

$$b(X, t) = f_3(X, t)D_V f_3^T(X, t),$$

$$R = R(X, t) = -\frac{1}{2}[Z - H(X, t)]^T D_W^{-1}[Z - H(X, t)],$$

$$R_0 = \int_{-\infty}^{\infty} R(X, t)\rho_z dX,$$

(v) означает операцию преобразования матрицы в вектор [6]: $A^v = |a_{11}\ a_{21} \ldots a_{m1}\ a_{12}\ a_{22} \ldots a_{m2} \ldots a_{1n}\ a_{2n} \ldots a_{mn}|^T$, $\overrightarrow{\mathrm{div}}$ — символ операции дивергенции строки матрицы.

Задачу совместной идентификации структуры вектора состояния и формирования управления стохастической динамической системой при наличии текущих наблюдений за ее вектором состояния будем рассматривать далее как задачу синтеза вектора управления U и вектор-функции Q в реальном масштабе времени. Иными словами, задачу поиска искомого управления U и вектор-функции Q сформулируем далее как задачу синтеза таких векторов U и Q, которые доставляли бы минимум функционалу J, характеризующему текущее качество функционирования стохастической системы (1) в момент времени t:

$$J = -\int_X \Phi_1[\rho_z]dX + \int_{t_0}^{t}\int_X \Phi_2[U, Q]dt. \quad (3)$$

Учитывая, что исчерпывающей характеристикой случайного процесса является его АПВ, в качестве величины Φ_1 целесообразно выбрать критерий, выраженный через нее. Им может быть информационный критерий Фишера, Шеннона, Кульбака и другие [1], позволяющие получить потенциально более точные оценки вектора состояния X вследствие оптимизации всего процесса X_t, а не его локальной характеристики — дисперсии, как в традиционном среднеквадратическом критерии. Отметим, что при выборе критерия Φ_1 важно обеспечить компромисс между требуемой точностью и объемом вычислительных затрат. Так, например, использование в качестве критерия Φ_1 функционала Фишера

$$\Phi_1 = -\rho_z\left[\frac{\partial \ln\rho_z}{\partial X}\right]\left[\frac{\partial \ln\rho_z}{\partial X}\right]^T$$

обеспечивает большую по сравнению с критерием Шеннона $\Phi_1 = -\rho_z \ln\rho_z$ точность, но требует дополнительных вычислительных затрат.

Отсутствие информации о структуре вектор-функции Q увеличивает энтропию состояния системы. Поэтому процесс идентификации вектор-функции Q должен, прежде всего, осуществляться с целью минимизации неопределенности вектора состояния системы (1), причем требовать минимума энергетических затрат, т. е. минимума квадратичной формы Q^TQ.

В ряде прикладных задач, например, навигации ПО, обработки и передачи информации, распознавания образов и других возникает необходимость максимизации информации о векторе состояния объекта или минимизации его энтропии. Решение этой задачи, наряду с идентификацией структуры вектора состояния, может быть осуществлено путем синтеза управления максимизирующего АПВ ρ_z. При этом управление U необходимо осуществлять, как и идентификацию Q, с минимальными энергетическими затратами, минимум которых можно обеспечить, минимизировав квадратичную форму U^TU.

Можно сделать вывод, что между векторами U и Q возникает смысловая и формальная общность, что позволяет объединить их в блочный вектор $P = |Q^T \vdots U^T|^T$, а в качестве функционала Φ_2 рассматривать квадратичную форму P^TP.

С учетом введенного вектора P критерий (3) принимает вид

$$J = \int_X \Phi_1[\rho_z]dX + \int_{t_0}^{t}\int_X P^T P dt, \qquad (4)$$

а уравнение (2) можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial \rho_z}{\partial t} = L\{q, b, \rho_z\} - \operatorname{div}\{(E \hat{\otimes} P(X, t))\rho_z\} + [R - R_0]\rho_z =$$
$$= S[\rho_z] - \operatorname{div}\{(E \hat{\otimes} P)\rho_z\}, \qquad (5)$$

где $E = |f_1(X, t) \vdots f_2(X, t)|$, $\hat{\otimes}$ — знак блочного умножения матриц [6].

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СОВМЕСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ИДЕНТИФИКАЦИИ

Для решения поставленной задачи приведем систему уравнений (1) к виду

$$\dot{X} = f_0(X, t) + E \hat{\otimes} P + f_3(X, t)V_t$$

и введем обобщенную функцию Ψ, выражаемую через вектор P как $\Psi(X, t) = E \hat{\otimes} P$, или $P = E^{-1} \hat{\otimes} \Psi(X, t)$, где $E^{-1} = |f_1^{-1}(X, t) \vdots f_2^{-1}(X, t)|$.

Для синтеза функции Ψ воспользуемся известным фактом, что при неотрицательно определенной критериальной функции (в силу неизбежности положительной определенности информационных функционалов, а также «энергетической» составляющей критерия (4)) для обеспечения ее минимального значения в каждый момент времени достаточно, чтобы производная ее по времени, взятая с обратным знаком, имела максимум [3, с. 380]. Применение данного положения к критерию (4) приводит к условию:

$$\max_\Psi(-\dot{J}) = \max_\Psi\left\{-\int_X\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho_z}\dot{\rho}_z + \Psi^T(E^{-1})^T E^{-1}\Psi\right)dX\right\} =$$
$$= \max_\Psi\left\{-\int_X\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho_z}\left\{S[\rho_z] - \frac{\partial \Psi}{\partial X}\rho_z - \Psi\frac{\partial \rho_z}{\partial X}\right\} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \Psi^T(E^{-1})^T E^{-1}\Psi\right)dX\right\}.$$

Анализ полученного выражения показывает, что решение поставленной задачи сводится к классической задаче нахождения вектор-функции Ψ, реализующей минимум определенного интеграла

$$\int_X\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho_z}\left\{S[\rho_z] - \frac{\partial \Psi}{\partial X}\rho_z - \Psi\frac{\partial \rho_z}{\partial X}\right\} + \Psi^T(E^{-1})^T E^{-1}\Psi\right)dX.$$

Искомая вектор-функция Ψ должна удовлетворять уравнению Эйлера:

$$-\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho_z}\rho_z + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \rho_z}\frac{\partial \rho_z}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial \Psi}(\Psi^T(E^{-1})^T E^{-1}\Psi) = 0$$

или в компактном виде

$$\left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial X \partial \rho_z}\right]\rho_z + 2\Psi^T(E^{-1})^T E^{-1} = 0.$$

Из полученного уравнения можно определить промежуточный вектор

$$\Psi_{\text{опт}} = -\frac{1}{2}E \hat{\otimes} E^T\left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial X \partial \rho_z}\right]^T \rho_z.$$

Очевидно, что искомый вектор P в этом случае может быть представлен как

$$P_{\text{опт}} = -\frac{1}{2}E_T \hat{\otimes} \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial X \partial \rho_z}\right]^T \rho_z. \qquad (6)$$

Выражение (6) позволяет получить как вектор оптимального управления системой (1)

$$U_{\text{опт}} = -\frac{1}{2}f_2(X, t)\left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial X \partial \rho_z}\right]^T \rho_z, \qquad (7)$$

так и найти априорно неизвестную вектор-функцию, минимизирующую энтропию системы (1)

$$Q = -\frac{1}{2}f_1(X, t)\left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial X \partial \rho_z}\right]^T \rho_z.$$

Функция ρ_z в выражении (5) определяется из решения нелинейного уравнения, полученного после подстановки $P_{\text{опт}}$ в уравнение (5):

$$\frac{\partial \rho_z}{\partial t} = S[\rho_z] + \frac{1}{2}\operatorname{div}\left\{E \hat{\otimes} E^T\left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial X \partial \rho_z}\right]^T \rho_z^2\right\}. \qquad (8)$$

По вычислительным затратам решение уравнения (8) оказывается не намного сложнее, чем решение исходного уравнения (5). Более того, сходство структур уравнений (5) и (8) определяет возможность применения в случае уравнения (8) методов, разработанных для решения уравнения (5).

Анализ выражения (7) показывает, что $U_{\text{опт}}$ зависит от параметров вектора состояния объекта (1), которые, исходя из постановки задачи, не известны. Данное обстоятельство делает принципиально невозможным использование выражения (7) для управления объектом (1) и требует проведения дополнительных преобразований.

Умножим обе части выражения (7) на ρ и проинтегрируем полученный результат по X. В итоге получим

$$\hat{U}_{\text{опт}} = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(X, t)\left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial X \partial \rho_z}\right]^T \rho_z^2\, dX.$$

Хотя найденное управление $\hat{U}_{\text{опт}}$ является субоптимальным, оно оказывается независимым от X, следовательно, его можно использовать, в отличие от выражения (7), для управления движением объекта.

3. ПРИМЕР

Для иллюстрации эффективности предложенного подхода рассмотрим следующий пример.

Объект управления описывается уравнением

$$\dot{x} = -x^3 + xq + 2xu + v_t, \quad x(t_0) = 0, \tag{9}$$

где q — априорно неизвестная функция, зависящая от x, u — искомое управление, v_t — белый центрированный гауссовский шум интенсивности D_v.

Уравнение наблюдателя имеет вид

$$z = \frac{3}{2}x^2 + w_t,$$

где w_t — белый центрированный гауссовский шум интенсивности D_w.

Приведем выражение (9) к следующему виду: $\dot{x} = -x^3 + e \otimes U + v_t$, где $e = |x \;\; 2x|$ а $U = |q \;\; u|^T$.

Необходимо найти такой вектор U, который обеспечивал бы в текущий момент времени максимум информации о состоянии объекта, т. е. обеспечивал бы идентификацию функции q и синтез оптимального управления u. Для простоты дальнейших рассуждений в качестве меры информации рассмотрим функционал Шеннона. Тогда в соответствии с изложенным минимизируемый критерий принимает вид:

$$J = -\int_{-\infty}^{\infty} \rho_z(x, t)\ln\rho_z(x, t)dx + \int_{t_0}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} U^2(x, t)dxdt.$$

В рассматриваемом случае АПР ρ_z описывается уравнением Стратоновича вида

$$\frac{\partial\rho_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3\rho_z) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho_z}{\partial x^2} + \frac{\rho_z}{2D_w}\left\{3z\left(x^2 - \int_{-\infty}^{\infty} x^2\rho_z dx\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{9}{4}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^4\rho_z dx - x^4\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial x}(eU\rho_z) = S(\rho_z) - \frac{\partial}{\partial x}(\Gamma\rho_z), \tag{10}$$

где функция

$$\Gamma = eU \tag{11}$$

введена для упрощения дальнейших математических преобразований.

Формируя условие оптимальности, имеем:

$$\max_{\Gamma}(-J) = \max_{\Gamma}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left[(1 + \ln\rho_z)\frac{\partial\rho_z}{\partial t} - \Gamma^T(e^{-1})^T e^{-1}\Gamma\right]dx\right\} =$$
$$= \max_{\Gamma}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left([1 + \ln\rho_z]S(\rho_z) - (1 + \ln\rho_z)\rho_z\frac{\partial\Gamma}{\partial x} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - (1 + \ln\rho_z)\frac{\partial\rho_z}{\partial x}\Gamma - \Gamma^T(e^{-1})^T e^{-1}\Gamma\right)dx\right\} =$$
$$= \max_{\Gamma}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left(B_0(\rho_z, x) + B_1(\rho_z, x)\frac{\partial\Gamma}{\partial x} + B_2(\rho_z, x)\Gamma - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \Gamma^T(e^{-1})^T e^{-1}\Gamma\right)dx\right\},$$

где $e^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{2x} \end{vmatrix}$, $B_0(\rho_z, x) = [1 + \ln\rho_z]S(\rho_z)$, $B_1(\rho_z, x) = (1 + \ln\rho_z)\rho_z$, $B_2(\rho_z, x) = (1 + \ln\rho_z)\dfrac{\partial\rho_z}{\partial x}$.

Уравнение Эйлера, исходное для построения искомого управления U и определения функции q, имеет вид

$$\frac{\partial B_1(\rho_z, x)}{\partial x} - B_2(\rho_z, x) + \Gamma^T(e^{-1})^T e^{-1}\Gamma = 0. \tag{12}$$

Выражение (12) позволяет найти искомый вектор

$$\Gamma = \frac{1}{2}ee^T\left(B_2 - \frac{\partial B_1}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}ee^T\rho_z, \tag{13}$$

который, в свою очередь, позволяет синтезировать уравнение для вектора U. С учетом вида функции (11) выражение (13) можно записать как

$$U = \frac{1}{2}e^T\rho_z.$$

Отсюда получаем выражения для:

оптимального управления $u = x\rho_z$,

субоптимального управления $\hat{u} = \int_{-\infty}^{\infty} x\rho_z^2 dx$

и искомой функции — $q = \frac{1}{2}x\rho_z$.

После подстановки U в выражение (10) имеем:

$$\frac{\partial\rho_z}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3\rho_z - x\rho_z - \frac{1}{2}x^2\rho_z\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\rho_z}{\partial x^2} +$$
$$+ \frac{\rho_z}{2D_w}\left\{3Z\left(x^2 - \int_{-\infty}^{\infty} x^2\rho_z dx\right) + \frac{9}{4}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^4\rho_z dx - x^4\right)\right\}. \tag{14}$$

Для иллюстрации эффективности применения предложенного подхода было решено уравнение (14) методом прямоугольных сеток на интервале $x \in [-30, 30]$, $t \in [0, 200 \text{ с}]$ с с равным шагом для всего интервала $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}05$ с при $D_w = 1{,}5$; $D_v = 2$. Значения $Z(t_i)$ получены в результате численного моделирования уравнений объекта и наблюдателя на интервале $t \in [0, 200 \text{ с}]$ методом Рунге — Кутта 4-го порядка с шагом $\Delta t = 0{,}05$ с (управление u формировалось в масштабе времени поступления измерительной информации, т. е. для каждого временного шага моделирования t_i).

В результате решения расчетное значение критерия J для найденной оптимальной функции управления u и идентифицируемой на основе разработанного метода функции q оказалось равным 4,5. А в случае эмпирически выбранной функции q (в тестовом примере функция q была выбрана равной $q = \frac{1}{2}x^3\rho_z$) оно оказалось равным 2,5.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнительный анализ предложенного метода с уже существующими способами [7—12] управления объектами с априорно неопределенными структурами векторов состояния показывает, что он более точен, так как позволяет не только управлять подвижным объектом, но и достаточно точно идентифицировать структуру (1) в процессе его движения. Кроме того, он требует меньших вычислительных затрат по сравнению с подходом, рассмотренным в работе [1], и позволяет управлять объектами в отсутствие каких-либо допущений о характере шумов измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хуторцев В. В., Соколов С. В., Шевчук П. С.* Современные принципы управления и фильтрации в стохастических системах. — М.: Радио и связь, 2001.
2. *Тертычный-Даури В. Ю.* Стохастическая механика. — М.: Факториал Пресс, 2001.
3. *Казаков И. Е.* Статистическая теория систем управления в пространстве состояния. — М.: Наука, 1975.
4. *Бурлай И. В.* Оценивание состояния маневрирующих объектов с использованием неклассических целевых функционалов и элементов регуляризации // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2001. — № 1.
5. *Пупков К. А., Неусыпин К. А.* Вопросы теории и реализации систем управления и навигации. — М.: Биоинформ, 1997.
6. *Чернов А. А., Ястребов В. Д.* Метод оценки возмущений в алгоритмах решения навигационных задач // Космич. исслед. — 1984. — Т. 22, № 3.
7. *Ганеев М. Р., Погорелов В. А., Соколов С. В.* Синтез системы навигации, содержащей управляемую гиростабилизированную платформу на основе информационных критериев // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2002. — № 3.
8. *Пелевин А. Е.* Синтез робастного закона управления при неопределенностях параметров модели объекта // Гироскопия и навигация. — 1999. — № 2.
9. *Сомов Е. И.* Робастная стабилизация упругих космических аппаратов при неполном дискретном измерении и запаздывании в управлении // Известия РАН. Теория и системы управления. — 2001. — № 1.
10. *Никифоров В. О.* Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. — СПб.: Наука, 2003.
11. *Небылов А. В.* Гарантирование точности управления. — М.: Наука, 1998.
12. *Arcak M. and Kokotovic P.* Nonlinear observers: A circle criterion design and robustness analysis // Automatica. — 2001. — Vol. 37.
13. *Интегрированные* инерциально-спутниковые системы / Под ред. В.Г. Пешехонова. — СПб.: ГНЦ РФ-ЦНИИ «Электроприбор», 2001.
14. *Дятлов А. П., Дятлов П. А., Кульбикаян Б. Х.* Радиоподавление аппаратуры потребителей спутниковой радионавигационной системы «Навстар» сигналоподобными помехами // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. — 2004. — № 4.

e-mail: locman@ctsnet.ru

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.С. Манделем. ❑