УДК 65.012

СТРУКТУРНО-ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ В ЗАДАЧАХ ДИСКРЕТНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

В. Н. Бурков[(1)], И. В. Буркова[(1)], П. А. Колесников[(1)], А. Р. Кашенков[(2)]

[(1)] *Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва;*
[(2)] *Вологодский государственный педагогический университет*

Дано обобщение метода сетевого программирования на случай, когда целевая функция и функции, описывающие ограничения задачи, имеют одинаковые структуры сетевого представления. Приведены примеры решения конкретных задач дискретной оптимизации.

ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Любая функция дискретных переменных может быть представлена в виде суперпозиции более простых функций (в частности — в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных). Структуру такой суперпозиции можно представить сетью, начальные вершины (входы) которой соответствуют переменным, конечная (выход) — функции, а промежуточные — функциям, входящим в суперпозицию. Поэтому такое представление называется сетевым представлением. В. Н. Бурковым и И. В. Бурковой предложен метод решения задач дискретной оптимизации с аддитивной целевой функцией, предполагающий сетевое представление системы ограничений [1]. Метод получил название метода сетевого программирования, а в случае дихотомического представления — метода дихотомического программирования [2, 3]. В настоящей работе дается обобщение метода на случай, когда целевая функция и функции, описывающие ограничения задачи, имеют одинаковые структуры сетевого представления (структурно-эквивалентные функции).

Заметим, что одна и та же функция может иметь несколько сетевых представлений.

Пример 1. Рассмотрим функцию четырех переменных

$$f(x) = (x_1x_2 + x_1^2)x_3 + x_3x_4 + x_1x_4. \qquad (1)$$

Ее сетевое представление приведено на рис. 1, где

$$y_1 = x_1x_2 + x_1^2,$$
$$y_2 = y_1x_3,$$
$$y_3 = x_1x_4,$$
$$y_4 = x_3x_4,$$
$$y_5 = y_2 + y_3 + y_4.$$

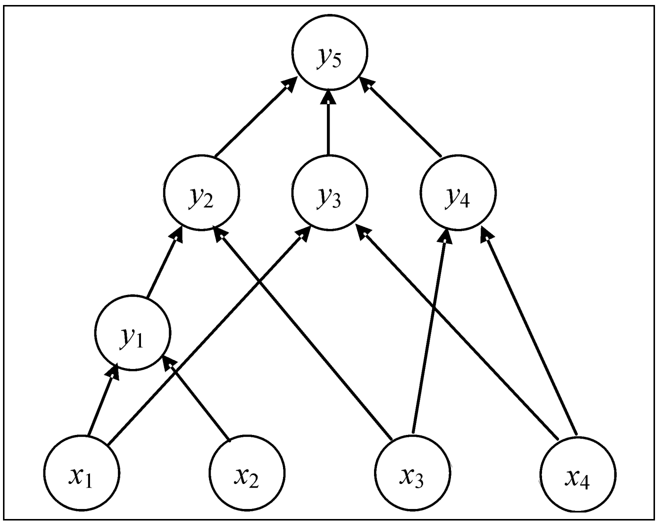

Рис. 1. Сетевое представление функции (1)

На рис. 2 приведено другое сетевое представление функции (1), где

$$y_1 = x_1x_2x_3,$$
$$y_2 = x_1^2x_3,$$
$$y_3 = x_1 + x_3,$$
$$y_4 = x_4y_3,$$
$$y_5 = y_1 + y_2 + y_4.$$

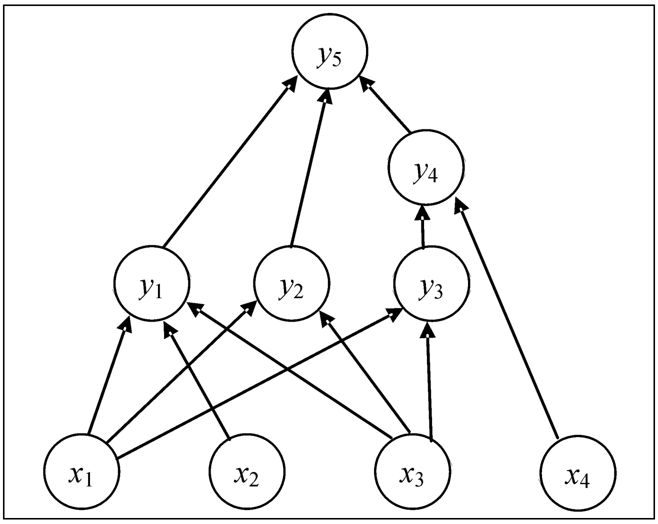

Рис. 2. Вариант сетевого представления функции (1)

Определение. Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ называются структурно-эквивалентными (с-эквивалентными), если существуют сетевые представления этих функций такие, что соответствующие сетевые структуры совпадают.

Пример 2. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = (x_1 + x_2)x_3(x_1 + x_4) + x_3x_4. \qquad (2)$$

Нетрудно показать, что одно из сетевых представлений этой функции имеет вид, представленный на рис. 1. ♦

1. МЕТОД СЕТЕВОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим следующую задачу дискретной оптимизации: определить вектор $x \in X$, обеспечивающий

$$\max_{x \in X} f(x) \qquad (3)$$

при ограничении

$$\varphi(x) \leqslant b. \qquad (4)$$

Далее будем предполагать, что

$$X = \prod_i X_i,$$

где X_i — дискретное множество чисел.

Заметим, что в виде (4) несложно представить и систему неравенств:

$$\varphi_j(x) \leqslant b, \quad j = \overline{1, m}.$$

Обозначив

$$\varphi(x) = \max_j \varphi_j(x),$$

получаем ограничение (4).

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ в задаче (3), (4) являются с-эквивалентными. Построим их общее сетевое представление. Пусть далее целевая функция f — монотонная функция обобщенных переменных y (без ограничения общности можно принять, что f — возрастающая функция y). Аналогично примем, что функция φ также является возрастающей функцией y. В сетевом представлении выделим вершины нулевого уровня, которым соответствуют переменные x_i. Вершинам первого уровня соответствуют задачи оптимизации следующего вида: максимизировать

$$y_i = f_i(x)$$

при ограничении

$$z_i = \varphi_i(x) \leqslant p,$$

где p принимает все допустимые значения.

В сетевом представлении задачи, соответствующие вершинам сетевого представления (за исключением вершин первого уровня) имеют более простой вид, такой, что существуют эффективные алгоритмы их решения. В частности, если сетевое представление является дихотомическим, то каждая задача является задачей оптимизации функции двух переменных и в дискретном случае легко решается на основе матричного представления [2, 3]. Решив задачи первого уровня, переходим к решению задач второго уровня, и т. д. Последней решается задача, соответствующая выходу сети. Обозначим $y_k(b)$ — значение целевой функции в оптимальном решении задачи, соответствующей выходу сети, где k — число вершин сети за исключением n вершин нулевого уровня.

Теорема 1. *Величина $y_k(b)$ является верхней оценкой для исходной задачи* (3), (4).

Доказательство. Достаточно заметить, что любое допустимое решение задачи (3), (4) является допустимым решением для всех задач, решаемых в вершинах сетевого представления. Поэтому оптимальное решение задачи в конечной вершине не хуже, чем оптимальное решение исходной задачи. Это доказывает теорему. ♦

Таким образом, метод сетевого программирования для с-эквивалентных функций позволяет получать верхние оценки для задачи (3), (4).

Пример 3. Рассмотрим задачу (3), (4) с функцией $f(x)$, определяемой выражением (1) и функцией $\varphi(x)$, определяемой выражением (2). Примем $x_i = (1; 3)$ для всех $i = \overline{1, 4}$. Пусть $b = 30$.

1 шаг. Решаем задачу максимизации

$$y_1 = x_1x_2 + x_1^2$$

при ограничении

$$z_1 = x_1 + x_2 \leqslant p_1,$$

где p_1 принимает все допустимые значения. Для решения удобно применить матричное представление задачи (табл. 1). Верхние числа в клетках левой части табл. 1 равны значению y_1, а нижние — z_1 при соответствующих значениях переменных x_1 и x_2. Справа приведены результаты оптимизации.

Таблица 1

3	4 / 4	18 / 16
1	2 / 2	12 / 4
x_2 \ x_1	1	3

$\Longrightarrow$

6	18
4	12
2	2
z_1	y_1

2 шаг. Решаем задачу максимизации

$$y_2 = y_1 x_3$$

при ограничении

$$z_2 = z_1 x_3 \leqslant p_2.$$

Решение приведено в табл. 2.

Таблица 2

18 / 6	18 / 6	54 / 18
12 / 4	12 / 4	36 / 12
2 / 2	2 / 2	6 / 6
y_1 / x_3	1	3

18	54
12	36
6	18
4	12
2	2
z_2	y_2

3 шаг. Решаем задачу максимизации

$$y_3 = x_1 x_4$$

при ограничении

$$z_3 = x_1 + x_4 \leqslant p_4.$$

Решение приведено в табл. 3.

Таблица 3

3	3 / 4	9 / 6
1	1 / 2	3 / 4
x_4 / x_1	1	3

6	9
4	3
2	1
z_3	y_3

4 шаг. Решаем задачу максимизации

$$y_4 = x_3 x_4$$

при ограничении

$$z_4 = x_3 x_4 \leqslant p_4.$$

Решение приведено в табл. 4.

Таблица 4

3	3 / 3	9 / 9
1	1 / 1	3 / 3
x_4 / x_3	1	3

9	9
3	3
1	1
z_4	y_4

5 шаг. Решаем задачу максимизации

$$y_5 = y_2 + y_3$$

при ограничении

$$z_5 = z_2 z_3 \leqslant p_5.$$

Решение приведено в табл. 5.

В правой части табл. 5 оставлены только Парето-оптимальные варианты.

Таблица 5

9 / 6	11 / 12	21 / 24	—	—
3 / 4	5 / 8	15 / 16	21 / 24	—
1 / 2	3 / 4	13 / 8	19 / 12	37 / 24
y_3/z_3 / y_2/z_2	2 / 2	12 / 4	18 / 6	36 / 12

24	37
12	19
8	13
4	3
z_5	y_5

6 шаг. Решаем задачу максимизации

$$y_6 = y_4 + y_5$$

при ограничении

$$z_6 = z_4 + z_5 \leqslant 30.$$

Решение приведено в табл. 6.

Таблица 6

9 / 9	12 / 13	22 / 17	28 / 21	—
3 / 3	6 / 7	16 / 11	22 / 15	40 / 27
1 / 1	4 / 5	14 / 9	20 / 13	38 / 25
y_4/z_4 / y_5/z_5	3 / 4	13 / 8	19 / 12	37 / 24

В табл. 6 находим клетку с максимальным верхним числом $y_6 = 40$. Согласно теореме 1, это число является оценкой сверху для решения исходной задачи. Для определения оптимального решения оценочной задачи применяем метод «обратного хода». Из табл. 6 определяем

$$y_4 = 3, \quad z_4 = 3, \quad y_5 = 37, \quad z_5 = 24.$$

Из левой части табл. 5 определяем

$$y_2 = 36, \quad z_2 = 12, \quad y_3 = 1, \quad z_3 = 2.$$

Из левой части табл. 4 определяем два возможных варианта:

1) $x_3(y_4) = 1, \quad x_4(y_4) = 3;$
2) $x_3(y_4) = 3, \quad x_4(y_4) = 1.$

Из левой части табл. 3 определяем

$$x_1(y_3) = 1, \quad x_4(y_3) = 1.$$

Из левой части табл. 2 определяем

$$x_3(y_2) = 3, \quad y_1 = 12, \quad z_1 = 4.$$

И, наконец, из левой части табл. 1 определяем

$$x_1(y_1) = 3, \quad x_2(y_1) = 1.$$

Заметим, что если бы существовало решение оценочной задачи такое, что каждое x_i принимало бы только одно значение, то это решение было бы допустимым для исходной задачи, а значит — оптимальным. В нашем случае это не так. Действительно, из табл. 3 было определено $x_1(y_3) = 1$, а из табл. 1 было определено $x_1(y_1) = 3$, что противоречиво. Однако, имея способ определения верхней оценки, можно применить метод ветвей и границ. Рассмотрим применение метода на Примере 3.

Разобьем множество всех решений исходной задачи на два подмножества. В первом подмножестве $x_1 = 1$, а во втором $x_1 = 3$.

Оценка первого подмножества. Полагаем $x_1 = 1$ в функциях $f(x)$ и $\varphi(x)$ и применяем описанный ранее алгоритм. Далее приведена результирующая табл. 7 значений z_6 и y_6.

Таблица 7

9 / 9	12 / 13	14 / 17	16 / 21	—
3 / 3	6 / 7	8 / 11	10 / 15	16 / 27
1 / 1	4 / 5	6 / 9	8 / 13	14 / 25
y_4/z_4 / y_5/z_5	3 / 4	5 / 8	7 / 12	13 / 24

Максимальное верхнее число $y_6 = 16$ определяет верхнюю оценку первого подмножества, $h(x_1 = 1) = 16$.

Оценка второго подмножества. В табл. 8 приведены значения z_6 и y_6.

Таблица 8

9 / 9	24 / 25	—
3 / 3	18 / 19	24 / 27
1 / 1	16 / 17	22 / 25
y_4/z_4 / y_5/z_5	15 / 16	21 / 24

Верхняя оценка для второго подмножества $h(x_1 = 3) = 24$. Выбираем второе подмножество.

Методом обратного хода определяем все оптимальные решения оценочной задачи. Таких решений два.

Первое решение: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3(y_2) = 1$, $x_3(y_4) = 3$, $x_4(y_3) = 1$, $x_4(y_4) = 3$ не является допустимым для исходной задачи, поскольку $x_3(y_2) \neq x_3(y_4)$ и $x_4(y_3) \neq x_4(y_4)$.

Второе решение: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3(y_2) = x_3(y_4) = 1$, $x_4(y_3) = x_4(y_4) = 3$ является допустимым для исходной задачи и, следовательно, является оптимальным.

Итак, получено оптимальное решение:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = 3$$

со значением целевой функции, равным 24. ♦

2. ДРЕВОВИДНАЯ СТРУКТУРА СЕТЕВОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

Для ряда задач существуют сетевые представления, в которых сеть является деревом. В этом случае при решении оценочной задачи каждая переменная x_i принимает только одно значение. Поэтому решение оценочной задачи всегда будет допустимым решением исходной задачи, а значит, описанный выше алгоритм определяет оптимальное решение исходной задачи.

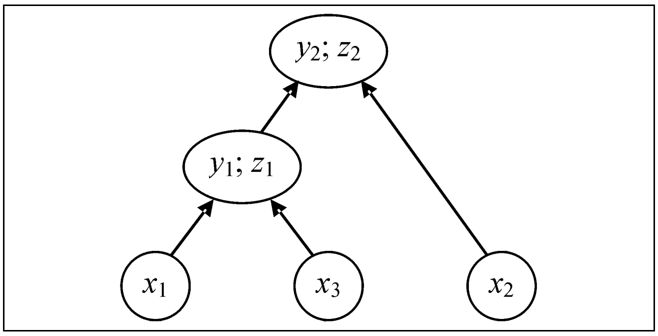

Рис. 3. Сетевое представление функций (5) и (6)

Пример 4. Пусть $x_i = \{1; 3\}$ для всех $i = \overline{1, 3}$,

$$f(x) = x_1x_2 + 2x_2x_3, \tag{5}$$

$$\varphi(x) = x_1x_3 + 2x_2 \leqslant 10. \tag{6}$$

Представим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = x_2(x_1 + 2x_3).$$

В этом случае структура сетевого представления функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеет вид дерева, изображенного на рис. 3, где

$$y_1 = x_1 + 2x_3; \quad z_1 = x_1x_3;$$
$$y_2 = y_1x_2; \quad z_2 = z_1 + 2x_2.$$

Подставляя в функцию (6) минимальное значение $x_2 = 1$, получаем ограничение $z_1 \leqslant 8$. Решение задачи приведено в табл. 9 и 10.

Таблица 9

$(y_1; z_1) =$

3	7 / 3	—
1	3 / 1	5 / 3
x_3 / x_1	1	3

Таблица 10

$(y_2; z_2) =$

3	9 / 7	21 / 9
1	3 / 3	7 / 5
x_3 / y_1/z_1	3 / 1	7 / 3

Максимальное верхнее число в клетках табл. 10 определяет оптимальное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 3$, со значением целевой функции 21. ♦

3. СЕТЕВЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АДДИТИВНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим случай, когда функция

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i), \tag{7}$$

где $x_i \in X_i$.

Теорема 2. *Аддитивная функция с-эквивалентна любой функции того же числа переменных.*

Доказательство. Пусть G_n — сетевое представление некоторой функции n переменных, x_i — начальные вершины сети, $i = \overline{1, n}$. Для каждого значения $x_i \in X_i$ определим поток величины $f_i(x_i)$ из вершины x_i в конечную вершину сетевого представления. В силу условий «потоковости» величина потока в конечной вершине равна $f_i(x_i)$ для любого сетевого представления. Теорема доказана. ♦

Поскольку поток величины $f_i(x_i)$ для каждого x_i можно определять произвольно, существует бесконечное число сетевых представлений функции (7).

Пусть переменная x_i принимает m_i значений x_{ij}, $j = \overline{1, m}$. Обозначим s_{ij} — поток величины $c_{ij} = f_i(x_{ij})$ из вершины x_i в конечную вершину, $S = \{s_{ij}\}$ — совокупность всех потоков (их число равно $M = \sum_i m_i$), $F(S)$ — оценка сверху величины (7), полученная методом сетевого программирования при сетевом представлении, определяемом совокупностью потоков S. Естественно поставить задачу определения такой совокупности потоков S, для которой оценка сверху минимальна. Эту задачу назовем двойственной к исходной. Сформулируем ее.

Двойственная задача. Определить совокупность потоков S, для которой оценка $F(S)$ минимальна.

Обоснованием названия «двойственная задача» служит тот факт, что для ряда задач целочисленного линейного программирования оценочная задача сводится к обычной двойственной задаче.

В качестве примера рассмотрим задачу назначения: максимизировать функцию

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

при ограничениях $x_{ij} = \{0; 1\}$; $i, j = \overline{1, n}$,

$$\sum_j x_{ij} \leqslant 1, \quad i = \overline{1, n}; \tag{8}$$

$$\sum_i x_{ij} \leqslant 1, \quad j = \overline{1, n}. \tag{9}$$

Рассмотрим сетевое представление системы ограничений, приведенное на рис. 4 для случая $n = 2$. Вершина y_i соответствует i-у ограничению (8), а вершина z_j — j-му ограничению (9). Конечная вершина соответствует операции взятия максимума, что позволяет свести все ограничения к одному:

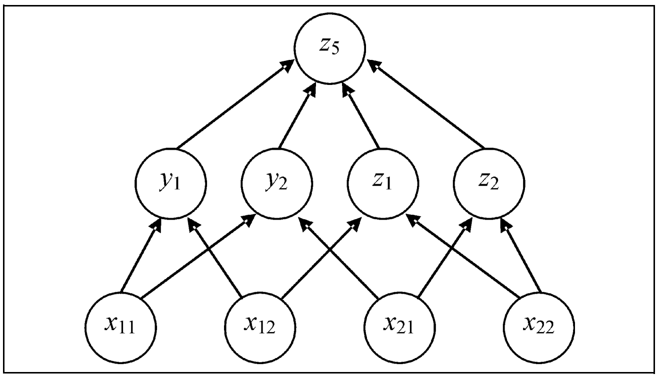

Рис. 4. Сетевое представление системы ограничений (8) и (9)

$$\max\left[\max\sum_j x_{ij};\ \max\sum_i x_{ij}\right] \leqslant 1.$$

Если $x_{ij} = 0$, то $c_{ij}x_{ij} = 0$, и поток из соответствующей вершины равен нулю. Если $x_{ij} = 1$, то поток равен c_{ij}. Представим c_{ij} в виде $c_{ij} = u_{ij} + v_{ij}$, где $u_{ij} \geqslant 0$ и $v_{ij} \geqslant 0$ — потоки по соответствующим дугам из вершины x_{ij}. В вершинах y_i в соответствии с методом сетевого программирования решается следующая задача: максимизировать функцию

$$F_i(u_i) = \sum_j u_{ij}x_{ij}$$

при ограничении

$$\sum_j x_{ij} \leqslant 1.$$

Решение очевидно:

$$F_{\max}(u_i) = \max_j u_{ij}.$$

В вершинах z_j решаются задачи: максимизировать

$$\Phi_j(v_j) = \sum_i v_{ij}x_{ij}$$

при ограничении

$$\sum_i x_{ij} \leqslant 1.$$

Решение также очевидно:

$$\Phi_{\max}(v_j) = \max_i v_{ij}.$$

Двойственная задача: минимизировать

$$\sum_i \max_j u_{ij} + \sum_j \max_i v_{ij}. \tag{10}$$

при ограничениях

$$u_{ij} + v_{ij} = c_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{11}$$

Заметим, что в оптимальном решении можно положить

$$u_{ij} = u_i - \max_j u_{ij}.$$

Обозначим

$$v_j = \max\lfloor 0;\ \max_i (c_{ij} - u_i)\rfloor.$$

В этом случае задача (10), (11) сводится к следующей: минимизировать сумму

$$\sum_i u_i + \sum_j v_j$$

при ограничениях $u_i \geqslant 0$, $v_j \geqslant 0$,

$$u_i + v_j \geqslant c_{ij}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Это обычная двойственная задача для задачи назначения.

4. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ДВОЙСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим следующую задачу целочисленного программирования: максимизировать функцию

$$\sum_{i=1}^{3} f_i(x_i),$$

где каждое x_i принимает два значения — 4 или 6, при ограничении

$$\varphi(x) = x_1^2 + x_1\underline{x_2 x_3} + x_3^2 \leqslant 200. \qquad (12)$$

Значения $f_i(x_i)$ при x_i = 4 и 6, $i = \overline{1, 3}$ приведены в табл. 11.

Таблица 11

x_i	i		
	1	2	3
4 6	12 18	8 15	16 24

Сетевое представление функции $\varphi(x)$ приведено на рис. 5.

Примем, что потоки по дугам (x_1, y_1) и (x_1, y_2) из вершины x_1 равны 6 при $x_1 = 4$ и 9 при $x_1 = 6$, а потоки по дугам (x_3, y_1) и (x_3, y_3) из вершины x_3 равны 8 при $x_3 = 4$ и 12 при $x_3 = 6$ (т. е. делим соответствующее значение целевой функции пополам).

1 шаг. Решаем задачу оптимизации в вершине (y_1, z_1): максимизировать выражение $6x_{11} + 9x_{12} + 8x_{21} + 15x_{22} + 8x_{31} + 12x_{32}$ при ограничениях $x_{ij} = \{0; 1\}$; $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$;

$$(4x_{11} + 6x_{12})\,(4x_{21} + 6x_{22})\,(4x_{31} + 6x_{32}) \leqslant p,$$
$$x_{11} + x_{12} = 1,$$
$$x_{21} + x_{22} = 1,$$
$$x_{31} + x_{32} = 1.$$

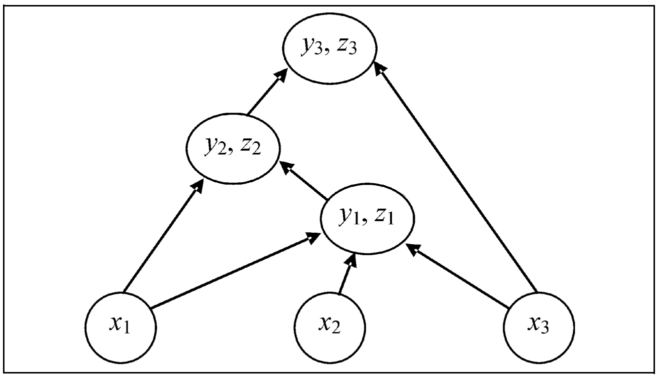

Рис. 5. Сетевое представление функции (12)

Максимальное значение p легко получить, если подставить в функцию (12) минимальные значения $x_1^2 = 16$ и $x_3^2 = 16$. Получаем $p = 168$. Теперь задачу можно решить простым перебором. Получаем табл. 12 оптимальных решений.

Таблица 12

y_1 z_1 x_1, x_2, x_3	22 64 4; 4; 4	29 96 4; 6; 4	33 144 4; 6; 6

2 шаг. Решаем задачу, соответствующую вершине (y_2, z_2). Решение приведено в табл. 13.

Таблица 13

$(y_2, z_2) =$

9 / 36	31 / 100	38 / 132	42 / 180
6 / 16	28 / 80	35 / 112	39 / 160
x_1 / y_1/z_1	22 / 64	29 / 96	33 / 144

3 шаг. Решаем задачу оптимизации, соответствующую вершине (y_3, z_3). Решение приведено в табл. 14.

Таблица 14

$(y_3, z_3) =$

12 / 36	40 / 116	43 / 136	47 / 148	50 / 168	51 / 196	—
8 / 16	36 / 96	39 / 116	43 / 128	46 / 148	47 / 176	50 / 196
x_3 / y_2/z_2	28 / 80	31 / 100	35 / 112	38 / 132	39 / 160	42 / 180

Оптимальному решению соответствует клетка с максимальным верхним числом. Это клетка $(y_3, z_3) = (51; 196)$. Двигаясь от конца к началу, определяем оптимальное решение оценочной задачи. Имеем:

$$1)\ x_3(y_3) = 6; \quad (y_2, z_2) = (39, 160);$$
$$2)\ x_1(y_2) = 4; \quad (y_1, z_1) = (33, 144);$$
$$3)\ x_1(y_1) = 4; \quad x_2(y_1) = 6; \quad x_3(y_1) = 6.$$

Поскольку значения $x_1 = 4$; $x_2 = 6$; $x_3 = 6$ одинаковы во всех случаях, полученное допустимое решение является оптимальным. Однако это не всегда так. Пусть, например, $b = 170$. В этом случае оптимальному решению оценочной задачи соответствует клетка $(y_3, z_3) = (50; 168)$. Двигаясь с конца, определяем оптимальные значения переменных оценочной задачи:

$$1)\ x_3(y_3) = 6; \quad (y_2, z_2) = (38, 132);$$
$$2)\ x_1(y_2) = 6; \quad (y_1, z_1) = (29, 96);$$
$$3)\ x_1(y_1) = 4; \quad x_2 = 6; \quad x_3(y_1) = 4.$$

В данном случае $x_3(y_1) \neq x_3(y_3)$. Для улучшения оценки изменим потоки по дугам. Очевидно, что целесообразно уменьшить потоки по дугам (x_1, y_2) и (x_3, y_3) с тем, чтобы верхняя оценка уменьшилась. Примем

$$S_2(x_1, y_2) = 6; \quad S_2(x_3, y_3) = 9;$$
$$S_2(x_1, y_1) = 12; \quad S_2(x_3, y_1) = 15.$$

Решаем оценочную задачу.

1 шаг. Решаем задачу оптимизации в вершине (y_1, z_1) — табл. 15.

Таблица 15

y_1 z_1 x_1, x_2, x_3	22 64 4; 4; 4	29 96 4; 6; 4	29 96 4; 4; 6

2 шаг. Решаем задачу оптимизации в вершине (y_2, z_2) — табл. 16.

Таблица 16

6 / 36	28 / 100	35 / 132
6 / 16	28 / 80	35 / 112
x_1 / y_1/z_1	22 / 64	29 / 96

3 шаг. Решаем задачу оптимизации в вершине (y_3, z_3) — табл. 17.

Таблица 17

9 / 36	37 / 116	44 / 148
8 / 16	36 / 96	43 / 128
x_3 / y_2/z_2	28 / 80	35 / 112

Значение оценки $F = 44$. Двигаясь с конца, определяем решение оценочной задачи:

$$1)\ x_3(y_3) = 6; \quad (y_2, z_2) = (35, 112);$$
$$2)\ x_1(y_2) = 4; \quad (y_1, z_1) = (29, 96);$$
$$3)\ x_1(y_1) = 4; \quad x_2 = 4; \quad x_3(y_1) = 6.$$

Это решение является допустимым для исходной задачи, а значит — оптимальным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный подход дает универсальный метод получения верхних оценок для широкого круга задач дискретной оптимизации, в том числе — для любых задач с аддитивными целевыми функциями. Перечислим ряд задач, требующих дальнейших исследований.

В первую очередь, это разработка методов определения структурной эквивалентности функций и построения соответствующих сетевых представлений с одинаковыми структурами.

Представляет интерес задача оценки вычислительной сложности методов решения оценочных задач.

Наконец, отметим задачу разработки методов решения двойственных задач для аддитивных целевых функций. Отметим, что понятие двойственной задачи можно обобщить на случай структурно-эквивалентных функций, имеющих несколько сетевых представлений с совпадающими структурами. Двойственной задачей в этом случае является задача выбора наилучшего сетевого представления с минимальной верхней оценкой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурков В. Н., Буркова И. В., Овчинникова Т. И.* Метод сетевого программирования // Проблемы управления. — 2005. — № 3. — С. 23—29.
2. *Бурков В. Н., Буркова И. В.* Метод дихотомического программирования. — Теория активных систем // Тр. междунар. науч.-практ. конф. (17—19 ноября 2003 г. Москва, Россия). — М.: ИПУ РАН, 2003. — Т. 1 — С. 25—26.
3. *Бурков В. Н., Буркова И. В.* Задачи дихотомической оптимизации // Материалы междунар. науч.-техн. конф. «Системные проблемы качества, математического моделирования, информационных и электронных технологий». — М.: Радио и связь, 2003. — С. 23—28.

☎ *(0742) 334-90-51;*

e-mail: irbur27@mail.ru

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.Д. Цвиркуном. ❑