УДК 519.86:519.718

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ МОДЕЛИ САМУЭЛЬСОНА–ХИКСА

В. А. Колемаев

Государственный университет управления, г. Москва

Исследованы области устойчивости и неустойчивости модели Самуэльсона—Хикса. Показано, как можно расширить области устойчивости путем преобразования модели, состоящем в замене запаздывающей акселерации на упреждающую.

В работе [1] так трактуются синергетические свойства экономики: "...синергетическая экономика придает особое значение не линейным, а нелинейным аспектам экономического эволюционного процесса, не устойчивости, а неустойчивостям, не непрерывности, а разрывам, не постоянству, а структурным изменениям — в противоположность традиционному рассмотрению линейности, устойчивости, непрерывности и неизменности." К важнейшим аспектам экономического эволюционного процесса автор относит "...нелинейность, неустойчивость, бифуркации и хаос в динамических экономических системах". Таким образом, синергетические свойства системы опираются на ее *неустойчивость*.

Модель Самуэльсона—Хикса — это динамический аналог одного из вариантов статической модели Кейнса. В рассматриваемой модели предполагается, что валовой внутренний продукт (ВВП) будущего года равен спросу на потребительские и инвестиционные товары, сложившемуся в текущем году, в свою очередь спрос на потребительские товары — линейная функция текущего значения ВВП, а на инвестиционные товары — линейная функция прироста ВВП.

Таким образом, модель Самуэльсона—Хикса имеет следующий вид

$$y(t+1) = \underline{C} + cy(t) + r[y(t) - y(t-1)] + I, \qquad (1)$$

где $y(t)$ — ВВП в год t; $\underline{C}$ — нижний уровень непроизводственного потребления; c — предельная склонность к потреблению; r — коэффициент акселерации или доля прироста ВВП, используемая на инвестиции; I — ежегодные постоянные инвестиции.

В работе [2] показано, что модель (1) имеет стационарное решение (при $0 < r < 1$, $0 < c < 1$)

$$y^E = \frac{\underline{C} + I}{1 - c}, \qquad \lim_{t \to \infty} y(t) = y^E.$$

Это стационарное решение не зависит от r, так что введение акселеративного слагаемого $r(y(t) - y(t-1))$ лишь ускоряет переходный процесс (чем больше r, тем больше $y(t+1)$ при положительном приросте ВВП), но не приводит к увеличению стационарного значения ВВП.

В той же работе [2] показано, что непрерывным аналогом модели (1) служит следующее линейное неоднородное уравнение второго порядка:

$$\frac{1}{1-c}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1-r}{1-c}\frac{dy}{dt} + y = \frac{\underline{C} + I}{1-c}, \qquad y^E = \frac{\underline{C} + I}{1-c}. \qquad (2)$$

Согласно теории линейных дифференциальных уравнений [3] общее решение неоднородного уравнения есть сумма общего решения однородного и частного решения неоднородного.

Общее решение однородного уравнения есть линейная комбинация фундаментальных решений

$$A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \qquad (3)$$

где λ_1 и λ_2 — корни характеристического уравнения

$$\frac{1}{1-c}\lambda^2 + \frac{(1-r)}{1-c}\lambda + 1 = 0.$$

Поскольку частным решением неоднородного уравнения служит константа в правой части уравнения (2), то общее решение имеет вид

$$y(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{\underline{C} + I}{1-c},$$

конкретное решение получаем при заданных начальных условиях.

Выбранное частное решение неоднородного уравнения является одновременно и его стационарным решением

$$y^E = \frac{\underline{C} + I}{1-c},$$

а точка $(y^E, 0)$ на плоскости (y, u) переменной y и её производной $u = y'$ является точкой равновесия (рис. 1).

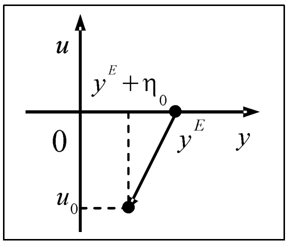

Рис. 1. Перевод системы из установившегося состояния (y^E, 0) в неустойчивое состояние ($y^E + \eta_0$, u_0)

Исследуем поведение решения уравнения (2) в окрестности точки равновесия (y^E, 0). Казалось бы, что при небольшом отклонении от этой точки, вызванном некоторым внешним импульсным воздействием $\delta(t)\begin{pmatrix}\eta_0\\u_0\end{pmatrix}$, система, попавшая в точку ($y^E + \eta_0$, u_0), должна после завершения переходного процесса снова возвратиться в точку равновесия (y^E, 0). Однако, как будет показано далее, это далеко не всегда так.

Далее для определенности будем рассматривать случай $\eta_0 < 0$, $u_0 < 0$, как показано на рис. 1, т. е. значение ВВП уменьшилось, а скорость его роста с нулевой в устойчивом состоянии поменялась на отрицательную.

Представим решение уравнения (2) при начальных условиях $y(0) = y^E + \eta$, $y'(0) = u_0$ в следующем виде: $y = y^E + \eta$. Тогда приращение ВВП относительно стационарного решения y^E будет удовлетворять однородному уравнению

$$\frac{1}{1-c}\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{(1-r)}{1-c}\frac{d\eta}{dt} + \eta = 0, \quad \eta'(0) = u_0. \qquad (4)$$

Далее, кроме поведения ВВП, будет также изучаться эволюция инвестиций и потребления. Согласно модели (1) годовые инвестиции состоят из постоянной части I и переменной части $i = r(y(t) - y(t - 1))$. За время Δt переменная часть составит $\Delta i = r(y(t) - y(t - \Delta t))$. Перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$\frac{di}{dt} = r\frac{dy}{dt} = r\frac{d\eta}{dt}.$$

Поскольку $i(0) = 0$, $\eta(0) = 0$, то $i = r\eta$, тем самым текущее значение инвестиций $I(t) = I + i = I + r\eta(t)$, а текущее значение потребления как разность ВВП и инвестиций равно, соответственно, $C(t) = y^E - I + (1 - r)\eta(t)$.

Решение однородного уравнения (4) при заданных начальных условиях имеет вид (3), где коэффициенты A_1 и A_2 определяются из начальных условий. Характер решения зависит от типа корней λ_1 и λ_2 характеристического уравнения, а тип последних в свою очередь обусловливается значениями параметров r и c. Вначале рассмотрим все возможные значения r при условии, что $1 - 2\sqrt{1-c} > 0$, т. е. $c > 3/4$.

Заметим, что исследование устойчивости уравнения (2) было схематически выполнено в работе [2], в настоящей статье это исследование проводится в деталях, чтобы выявить случай неустойчивого поведения системы.

Первый случай: $0 < r < 1 - 2\sqrt{1-c}$.

В этом случае дискриминант характеристического уравнения положителен, а его корни

$$\lambda_{1,\,2} = -\frac{1-r}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-r)^2}{4} - (1-c)}, \quad \lambda_1 > \lambda_2,$$

действительны и отрицательны, поскольку больший корень λ_1 при $1 - r > 2\sqrt{1-c}$ отрицателен.

Используя начальные условия из выражения (4), находим

$$A_1 = \frac{u_0 - \lambda_2\eta_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \qquad A_2 = \frac{u_0 - \lambda_1\eta_0}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

поэтому

$$\eta(t) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}[(u_0 - \lambda_2\eta_0)e^{\lambda_1 t} - (u_0 - \lambda_1\eta_0)e^{\lambda_2 t}].$$

Поскольку $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, то $\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t) = 0$, откуда $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = y^E$,

$$\lim_{t\to 0} y'(t) = \lim_{t\to\infty}\eta'(t) =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}[(u_0 - \lambda_2\eta_0)\lambda_1 e^{\lambda_1 t} - (u_0 - \lambda_1\eta_0)\lambda_2 e^{\lambda_2 t}] = 0.$$

Таким образом, система по завершении апериодического переходного процесса возвращается в прежнее состояние покоя (y^E, 0), т. е. является устойчивой.

В начале переходного процесса при $\eta_0 < 0$, $u_0 < 0$ ВВП, а следовательно, потребление и инвестиции, продолжают еще некоторое время убывать, затем начинается их монотонный рост, который заканчивается достижением их стационарных значений y^E, $y^E - I$ и I, соответственно.

Второй случай: $r = 1 - 2\sqrt{1-c}$.

В этом случае дискриминант равен нулю, характеристическое уравнение имеет один корень $\lambda_1 = -(1 - r)/2$ кратности два, поэтому фундаментальными решениями уравнения (4) являются $e^{\lambda_1 t}$ и $te^{\lambda_1 t}$, следовательно, общее решение имеет вид $\eta(t) = e^{\lambda_1 t}(A_1 + A_2 t)$.

Используя начальные условия, находим $A_1 = \eta_0$, $A_2 = u_0 - \lambda_1\eta_0$, поэтому $\eta(t) = e^{\lambda_1 t}[\eta_0 + (u_0 - \lambda_1\eta_0)t]$.

Поскольку $\lambda_1 < 0$, то $\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\eta'(t) = 0$, откуда $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = y^E$, $\lim\limits_{t\to\infty} y'(t) = 0$, т. е. система возвращается в прежнее состояние покоя, следовательно, она устойчива.

Валовой внутренний продукт, потребление и инвестиции ведут себя на протяжении переходного процесса аналогично их поведению в случае 1.

Третий случай: $1 - 2\sqrt{1-c} < r < 1$.

В этом случае дискриминант характеристического уравнения отрицателен, поэтому его корни — комплексные взаимно сопряженные: $\lambda_1 = \alpha + i\omega$, $\lambda_2 = \alpha - i\omega$, где

$$\alpha = -\frac{1-r}{2} < 0, \quad \omega = \sqrt{1-c-\frac{(1-r)^2}{4}} > 0.$$

Используя начальные условия из выражения (4), находим

$$A_1 = \frac{u_0-(\alpha-i\omega)\eta_0}{2i\omega}, \quad A_2 = \frac{u_0-(\alpha+i\omega)\eta_0}{2i\omega},$$

поэтому

$$\eta(t) = e^{\alpha t}\left(\eta_0\cos\omega t + \frac{u_0-\alpha\eta_0}{\omega}\sin\omega t\right).$$

Поскольку $\alpha < 0$, то $\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\eta'(t) = 0$, откуда $\lim\limits_{t\to\infty}y(t) = y^E$, $\lim\limits_{t\to\infty}y'(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\eta'(t) = 0$.

Таким образом, система после затухающих гармонических колебаний возвращается в первоначальное состояние покоя, т. е. является устойчивой.

Валовой внутренний продукт, потребление, инвестиции при $\eta_0 < 0$, $u_0 < 0$ вначале продолжают убывать, затем растут и достигают установившихся значений, после чего этот автоколебательный процесс продолжается с экспоненциально затухающей амплитудой вплоть до окончательного достижения этими показателями за бесконечный промежуток времени своих стационарных значений.

Четвертый случай: $r = 1$.

С содержательной точки зрения этот случай означает, что весь прирост ВВП за год целиком идет на инвестиции.

При $r = 1$ корни характеристического уравнения мнимые взаимно сопряженные: $\lambda_1 = i\omega$, $\lambda_2 = -i\omega$, $\omega = \sqrt{1-c}$.

Используя начальные условия, находим

$$A_1 = \frac{u_0+i\omega\eta_0}{2i\omega}, \quad A_2 = -\frac{u_0-i\omega\eta_0}{2i\omega},$$

поэтому

$$\eta(t) = \eta_0\cos\omega t + \frac{u_0}{\omega}\sin\omega t = \rho\sin(\omega t + \varphi), \qquad (5)$$

$$u(t) = \eta'(t) = -\omega\eta_0\sin\omega t + \frac{u_0}{\omega}\cos\omega t = \omega\rho\cos(\omega t + \varphi), \qquad (6)$$

где

$$\sin\varphi = \frac{\eta_0}{\sqrt{\eta_0^2+\left(\frac{u_0}{\omega}\right)^2}}, \quad \rho = \sqrt{\eta_0^2+\left(\frac{u_0}{\omega}\right)^2}.$$

Таким образом, при $r = 1$ система будет совершать незатухающие гармонические колебания, т. е. система неустойчива, поскольку не возвращается в первоначальное устойчивое состояние.

На плоскости (η, u) фазовых переменных траектория системы, заданная уравнениями (5) и (6), будет выглядеть как эллипс в канонической форме (см. рис. 2):

$$\frac{\eta^2}{a^2} + \frac{u^2}{b^2} = 1, \text{ где } a = \rho,\ b = \omega\rho.$$

Валовой внутренний продукт будет колебаться в пределах $y^E \pm \rho$, потребление будет оставаться постоянным и равным стационарному значению $y^E - I$, а инвестиции будут находиться в незатухающих автоколебаниях согласно уравнению $I(t) = I + \eta(t)$.

Пятый случай: $1 < r < 1 + 2\sqrt{1-c}$.

Это запредельный случай, поскольку на дополнительные инвестиции (сверх постоянного значения I) пойдет больше, чем прирост ВВП, и это превышение может осуществиться лишь за счет соответствующего сокращения потребления.

В этом случае дискриминант характеристического уравнения отрицателен, поэтому его корни комплексные взаимно сопряженные:

$$\lambda_1 = \alpha + i\omega, \quad \lambda_2 = \alpha - i\omega,$$

$$\alpha = \frac{1-r}{2} > 0, \quad \omega = \sqrt{1-c-\frac{(1-r)^2}{4}} > 0,$$

поэтому

$$\eta(t) = \rho e^{\alpha t}\sin(\omega t + \varphi), \quad \rho = \sqrt{\eta_0^2+\left(\frac{u_0-\alpha\eta_0}{\omega}\right)^2},$$

$$\sin\varphi = \frac{\eta_0}{\rho},$$

и система будет совершать гармонические автоколебания с экспоненциально возрастающей амплитудой, т. е. система неустойчивая.

Потребление и инвестиции также будут совершать гармонические автоколебания с экспоненциально возрастающей амплитудой относительно своих стационарных значений:

$$C(t) = y^E - I - (r-1)e^{\alpha t}\rho\sin(\omega t + \varphi),$$

$$I(t) = I + re^{\alpha t}\rho\sin(\omega t + \varphi).$$

На рис. 2 для всех рассмотренных случаев показаны траектории системы на плоскости фазовых переменных (η, u), $u = \eta'$.

Таким образом, экономика, описываемая моделью Самуэльсона—Хикса при $c > 3/4$, устойчива при $0 < r < 1$ и неустойчива при $r \geqslant 1$. При $c \leqslant 3/4$ получатся те же результаты, но первого и второго случаев не будет.

В заключение рассмотрим прием расширения области устойчивости модели Самуэльсона—Хикса (это имеет место, как было показано выше, при $r < 1$) путем ее преобразования заменой запаздывающего эффекта акселерации на упреждающий.

Для этого сначала исключим акселератор из модели Самуэльсона—Хикса, приравняв $r = 0$, тогда получим

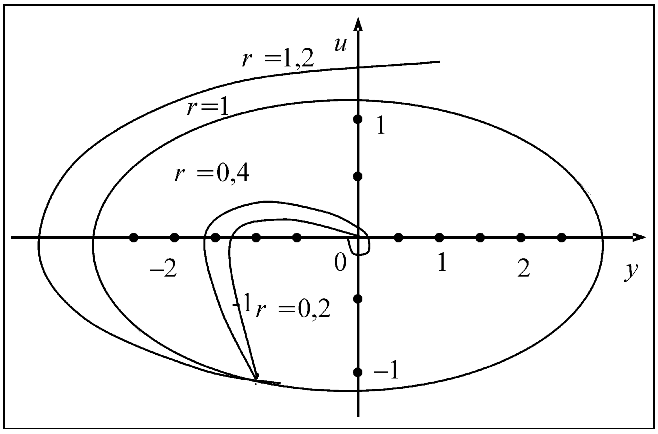

Рис. 2. Фазовые траектории системы при разных значениях коэффициента акселерации r (c = 0,84, η_0 = −1, u_0 = −1)

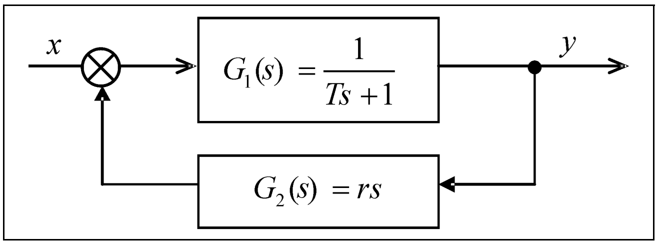

Рис. 3. Инерционное звено с акселератором в цепи положительной обратной связи

динамическую модель Кейнса $y(t + 1) = \underline{C} + y(t) + I$, непрерывный аналог которой имеет вид

$$\frac{1}{1-c}\frac{dy}{dt} + y = \frac{\underline{C}+I}{1-c},$$

т. е. является инерционным звеном с постоянной времени $T = 1/(1 - c)$.

Теперь введем акселератор в контур положительной обратной связи этого инерционного звена, как показано на рис. 3.

Передаточная функция системы с положительной обратной связью имеет вид:

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)} = \frac{1}{(T-r)s+1},$$

т. е. в результате снова получим инерционное звено с постоянной времени, уменьшенной на коэффициент акселерации r, и переходный процесс будет происходить быстрее. Дифференциальное уравнение такой системы имеет вид

$$(T - r)\frac{dy}{dt} + y = \frac{\underline{C}+I}{1-c},$$

его дискретным аналогом является следующее конечно-разностное уравнение первого порядка:

$$y(t + 1) = \frac{c-r(1-c)}{1-r(1-c)}y(t) + \frac{\underline{C}+I}{1-r(1-c)},$$

которое легко преобразуется к виду $y = (t + 1) = \underline{C} + cy(t) + r(1 - c)[y(t + 1) - y(t)] + I$, т. е. имеет место эффект акселерации с упреждением (разность $y(t + 1) - y(t)$), а не с опозданием, как в модели Самуэльсона—Хикса (разность $y(t) - y(t - 1)$).

Таким образом, при переходе от модели Самуэльсона—Хикса к контуру положительной обратной связи динамической модели Кейнса (инерционное звено) с акселератором получаем устойчивую систему, по крайней мере, при $T - r \geqslant 0$ или при $r \leqslant \frac{1}{1-c} > 1$, т. е. диапазон изменения коэффициента акселерации r для новой модели, в котором она устойчива, заметно шире, чем для модели Самуэльсона—Хикса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Занг В. Б.* Синергетическая экономика. — М.: Мир, 1999.
2. *Колемаев В. А.* Математическая экономика. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.
3. *Петровский И. Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Физматгиз, 1987.

☎ *(495) 371-11-65*

❑

16—18 ноября 2005 г. в Институте проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН состоялась международная научно-практическая конференция ***"Теория активных систем — 2005"****.*

Соорганизаторами конференции выступили:

- Воронежский государственный архитектурно-строительный университет;
- Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН;
- Липецкий государственный технический университет;
- Московский авиационный институт;
- Старооскольский технологический институт;
- Тверской государственный университет;
- Тульский государственный университет.

На конференции были представлены около ста докладов по следующим направлениям теории и практики управления социально-экономическими системами:

— базовые модели и механизмы теории активных систем;
— экспертиза, прогнозирование и принятие решений;
— прикладные задачи теории активных систем;
— управление финансами.

Со сборником трудов конференции можно ознакомиться на сайте теории управления организационными системами **www.mtas.ru.**