

БИОЛОГИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ: ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ

Л. М. Бакусов⁽¹⁾, Б. Г. Ильясов⁽¹⁾, М. Д. Рамазанов⁽²⁾, Ш. М. Сафин⁽³⁾

⁽¹⁾ Уфимский государственный авиационный технический университет;

⁽²⁾ Институт математики с ВЦ Уфимского научного центра РАН;

⁽³⁾ Башкирский государственный медицинский университет, г. Уфа

Рассмотрены общие принципы реализации вычислений в центральной нервной системе человека с учетом естественных операциональных ограничений по быстротедействию, объемам памяти, способам представления наблюдаемых величин. Предложены новые модели биопроцессоров, построенные на основе предложенной методики перехода от непрерывных дифференциальных уравнений к их возвратно-рекурсивному представлению. Установлена аналогия структур полученных моделей биопроцессоров и отделов мозжечковой системы человека.

ВВЕДЕНИЕ

Конечная цель исследований в области моделирования поведения и интеллекта состоит в понимании механизмов возникновения таких феноменов живых систем, как целенаправленность, обучаемость, способность к “опережающему отражению”, репродукции. Мощный цикл работ в области исследований искусственной жизни и адаптивного поведения организмов [1, 2], проводимых в России и за рубежом, породил большое число эффективных моделей, ставших инструментом создания соответствующих классов систем управления.

Вместе с тем предложенные модели, с одной стороны, вынужденным образом упрощают реальные объекты [3], исходя из требований обзорности, линейности и т. п., а с другой — недостаточно используют массивы фактографической информации, возникающей в нейропсихологических исследованиях, поскольку подобная информация за редкими исключениями представлена в чисто описательной форме. Указанный междисциплинарный разрыв, по мнению авторов данной работы, обусловлен тем, что синтетический путь сближения концепций теории управления и нейрофизиологии ещё не пройден. Нейрофизиологи не могут безоговорочно принять концепции и модели переработки информации, предлагаемые современной теорией управления, поскольку не усматривают ясных аналогий с наблюдаемой фактографией, а специалисты по управлению не могут опираться на достаточно размытые и не вполне строгие описания и доказательства нейрофизиологов. В данной работе предпринята попытка в какой-то степени восполнить указанный разрыв, рассмотрев вопрос:

позволяют ли хорошо установленные нейрофизиологические механизмы преобразования электрических сигналов в нервной системе человека и животных реализовать полноценные, с точки зрения теории алгоритмов и математики, процессы вычислений?

Представляется, что общий теоретический подход к ответу на вопрос об основах биологических вычислений должен опираться на некоторые принципы или основания, которые можно сформулировать, обобщая данные нейрофизиологии. Можно попытаться, следуя бионическим принципам, выявить некоторые естественные механизмы счёта у человека, а затем построить их модели. Одну из предварительных идей, позволяющую раскрыть указанные механизмы, можно найти в работе [4], где утверждается, что в основе всего математического мышления лежит итерация натурального счёта. Однако этот вопрос требует более полного раскрытия, которое можно осуществить, определив некоторые операциональные основания биологических вычислений, аналогично тому, как подобные основания даны для алгоритмических вычислений в виде машины Тьюринга. Для выявления этих оснований достаточно обратиться к данным нейрофизиологии [5—11].

Авторы многочисленных работ в данной области единодушно отмечают следующие особенности организации и функционирования мозга как информационной системы.

- Мозг имеет иерархическую организацию, содержащую снизу вверх следующие уровни: нейронный (клеточный), синаптический, модульный, макроанатомический и функционально-системный.
- Информация на всех уровнях передается с помощью электрических импульсных сигналов, распростра-

няющихся вдоль электрически неравновесных клеточных мембран. Процесс возбуждения может распространяться в отличие от процесса торможения, который распространяться не может.

- Нервные клетки различных типов образуют однородные ансамбли, часто имеющие общую функцию. Такие ансамбли образуют ядра и слои, а также тракты или соединительные пучки волокон. В мозге человека насчитывают около 260 ядер и 80 трактов.
- Отражение внешнего мира осуществляется с помощью топического представительства. Так, изображение сетчатки глаза проецируется на зрительную кору затылочных долей мозга. Рецептивные поля тела проецируются на таламус и кору мозга, а также мозжечка.
- Работа нервной системы характеризуется высокой степенью параллелизма информационных преобразований, который обеспечивается как топическим представительством, так и функционально-модульным разделением процессов.
- Основная особенность модульного уровня организации [11, 12] заключается в отсутствии внутри модуля контуров рециркуляции (реверберации) импульсов. Хотя вопрос о возможности других механизмов ритмической активности модулей остаётся открытым.

Кроме того, биосистемам присущи некоторые свойства, определяющие практические (операциональные) ограничения на процессы счёта:

- биосистемы не располагают встроенными часами (таймерами), позволяющими отсчитывать время с достаточной точностью и синхронизировать вычислительные процессы;
- быстрое действие отделов центральной нервной системы (ЦНС), занятых обработкой информации, значительно ниже современных ЭВМ;
- ограниченность объёмов памяти приводит к необходимости фрагментировать наблюдаемые непрерывные процессы на дискретные событийные цепочки по типу “стимул—реакция”, “действие—результат”, “причина—следствие”;
- способность к опережающему отражению на основе предыстории и, следовательно, наличие регистров оперативной памяти конвейерного (или систолического) типа;
- количественно оцениваемые стимулы (метрические свойства окружающих явлений и процессов) могут быть представлены и сохранены в памяти, будучи отображенными на уровне (степени) возбуждения некоторых участков или зон нервной ткани;
- наличие рефрактерности, или невозможности повторного возбуждения нейронного ансамбля в течение некоторого времени τ_p , приводит к тому, что возбуждение либо распространяется в одном направлении, либо направленно рециркулирует вдоль многозвенного замкнутого контура;
- биоорганизмы используют неподвижные относительно наблюдателя (субъективные) системы координат, поэтому все отсчёты начинаются с некоторого “нулевого”, наиболее раннего отсчёта, хранящегося в памяти системы. Таким образом, время кодируется номером отсчёта, всегда целым.

Анализ показывает, что теорию биовычислений необходимо строить с учётом операциональных ограничений и особенностей работы нервной системы позвоночных.

1. МОДЕЛИ БИОВЫЧИСЛЕНИЙ

В соответствии с перечисленными особенностями ЦНС, наиболее правдоподобной моделью процессов обработки информации в биосистемах представляется итеративная или рекурсивная.

Известно [13] два типа рекурсии: примитивная и возвратная, из которых мы воспользуемся формализованной моделью последней в виде возвратной последовательности:

$$x_{n+1+i} = a_n x_{n+i} + a_{n-1} x_{n-1+i} + \dots + a_0 x_{0+i}, \quad (1)$$

где i — номер очередного шага вычисления (рекурсии).

Выражение (1) в матричной форме имеет вид:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \\ x_{n-1} \\ \dots \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n & a_{n-1} & \dots & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ x_{n-2} \\ \dots \\ x_0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Представление (2) можно понимать как описание вычислительного процесса в виде сигнального графа с запаздыванием (время запаздывания равно длительности умножения в правой части выражения (2)), изображённого на рис. 1.

Как видно из рисунка, каждая дуга графа характеризуется коэффициентом передачи и одним и тем же запаздыванием τ_3 , равным времени реализации передачи сигнала вдоль дуги (на рис. 1 обозначение τ_3 опущено). Это время определяет длительность шага вычисления матричного умножения в формуле (2). Если вершины понимать как ячейки конвейерной памяти [14], в которых могут храниться значения величин x_1, \dots, x_n , то граф можно рассматривать как схему рекурсивного процессора, генерирующего возвратную последовательность (1). Такое рассмотрение графа соответствует основным предположениям, сформулированным выше, а также основным допущениям компартментной теории нервной системы [15–17], согласно которой каждый участок (компаратмент) нервной ткани может рассматриваться как ансамбль, состояние которого характеризуется уровнем активности входящих в него нейронов. Этот уровень активности может характеризоваться как долей возбуждённых нейронов p_i , так и частотой f_i их импульсации $x_i = F(p_i, f_i)$. Таким способом в ЦНС могут кодироваться значения x_0, \dots, x_n , фигурирующие в выражениях (1) и (2).

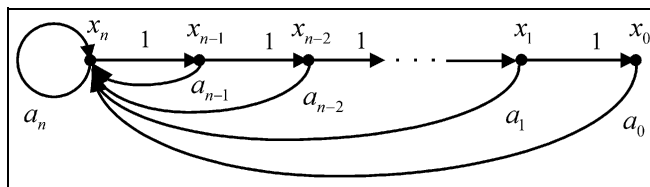


Рис. 1. Сигнальный граф процесса вычисления



Косвенным подтверждением адекватности рекурсивной модели служит тот факт, что в ЦНС позвоночных обнаруживается большое число контуров рециркуляции возбуждения, называемых иногда реверберационными контурами [3, 17], существование которых в нейрофизиологии не имеет удовлетворительного объяснения. Однако, как показывает рис. 1, таких реверберационных контуров в схеме рекурсивного процессора имеется $(n + 1)$, и они обеспечивают генерацию возвратной последовательности. Таким образом, можно предположить, что наличие контуров с запаздыванием обеспечивает в мозге механизмы рекурсивных вычислений.

Остаётся только показать, насколько такие механизмы универсальны и, следовательно, пригодны на роль основных, обеспечивающих биологические вычисления.

2. РЕКУРСИВНЫЕ ПРОГНОЗИРУЮЩИЕ БИПРОЦЕССОРЫ

В основу построения данных процессоров можно положить следующие математические рассуждения.

Попытаемся сконструировать возвратную последовательность с заданными свойствами. Например, потребуем, чтобы последовательность (1) генерировала значения некоторого полинома n -й степени, начальные отсчёты которого x_0, \dots, x_n известны.

Для решения этой задачи возьмём за основу полином Лагранжа, заданный в целых точках:

$$L_n = P_n(x, \{k_i\}\{x_i\}), \quad (3)$$

где k_i — узлы интерполяции $\{k_i\} = \{0, 1, 2, n\}$, а $\{x_i\} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ — значения в этих узлах некоторой интерполируемой функции.

Представить полином вида (3) в возвратно-рекурсивной форме можно, используя соотношения разностного оператора Δ и оператора сдвига E .

Известно, что $\Delta^{n+1}L_n \equiv 0$. Если учесть, что $\Delta = E - 1$, то $(E - 1)^{n+1}L_n \equiv 0$, и таким образом $[E^{n+1} - C_n^1 E^n + C_n^2 E^{n-1} + \dots + (-1)^{n+1}]x_0 \equiv 0$, откуда непосредственно получаем биномиальную возвратно-рекурсивную последовательность, генерирующую полиномиальную зависимость P_n по любой заданной системе начальных условий $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$:

$$x_{n+1+i} = C_n^1 x_{n+i} + C_n^2 x_{n-1+i} + \dots + (-1)^{n+1} x_{0+i}, \quad (4)$$

где i — номер очередного шага вычислений.

Анализируя выражение (4), легко понять, что начальную часть $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ потенциально бесконечного ряда (4) можно рассматривать как некоторую “обучающую” последовательность, которая сначала будет “понята” биномиальным рекурсивным процессором (БРП), работающим по схеме (4), как набор начальных отсчётов полинома $P_n(\{x_i\})$, а затем сгенерирована далее.

Для того чтобы это “обучение” состоялось, необходимо в ячейки памяти до начала вычислений занести последовательно набор $\{x_i\}$, а затем начать выполнение счёта по выражению (4).

Приведенный в Приложении пример 1 показывает, что БРП способен по наблюдаемой начальной части по-

следовательности (в зависимости от числа членов в выражении (4)) давать прогноз её значений таким образом, как если бы она являлась частью полиномиальной зависимости.

Легко показать, что рекурсивный процессор вида

$$x_{n+1+i} = -x_{n+i} + x_{1+i} + x_{0+i} \quad (5)$$

“обучается” воспроизводить по предъявленной (записанной в память) части последовательности зависимость, являющуюся комбинацией функций из полного и ортогонального ряда Фурье (т. е. константы и $n/2$ гармоник при $n = 2k + 1$).

В работе [15] также показано, что процессоры вида (5) аналогичны по структуре мозжечковой системе.

Таким образом, можно считать, что рекурсивные процессоры, аналогичные по структуре некоторым частям мозга (двигательной мозжечковой системе) способны осуществлять прогноз закономерностей, наблюдаемых в последовательностях воспринимаемых сигналов, независимо от частоты их квантования.

3. РЕКУРСИВНЫЕ АНАЛИЗИРУЮЩИЕ БИПРОЦЕССОРЫ

Рассматривая интерполяционные многочлены в качестве инструмента для синтеза возвратно-рекурсивных последовательностей, можно заметить, что они генерируют различные числовые закономерности, независимо от того, в каком масштабе взяты отсчёты $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ воспроизводимой полиномиальной функции. В этом смысле можно считать представление (4) масштабно инвариантным (это легко проверить непосредственно, например, по выражению (6) см. пример 1 в Приложении).

Возьмём за основу синтеза анализирующего биопроцессора, например, полином Лагранжа L_2 :

$$y(x) = \frac{x(x-1)}{(2-0)(2-1)} y_{2+i} + \frac{x(x-2)}{(1-0)(1-2)} y_{1+i} + \frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)} y_{0+i} \quad (6)$$

Раскрывая скобки в выражении (6), получим

$$y(x) = \frac{x^2-x}{2} y_{2+i} - (x^2-2x)y_{1+i} + \frac{x^2-3x+2}{2} y_{0+i}. \quad (7)$$

Если теперь собрать все члены (7) с одинаковыми степенями при x , можно получить:

$$y(x) = \left(\frac{1}{2}y_{2+i} - y_{1+i} + \frac{1}{2}y_{0+i}\right)x^2 - \left(\frac{1}{2}y_{2+i} - 2y_{1+i} + \frac{3}{2}y_{0+i}\right)x + (y_{0+i})x^0. \quad (8)$$

Выражения в скобках формулы (8) представляют собой коэффициенты при базисных функциях x^0, x^1, x^2 , выраженные через отсчёты $y_{2+i}, y_{1+i}, y_{0+i}$, наблюдаемые системой на очередном шаге с номером i .

Таким образом, процессор, построенный по выражению, аналогичному (8), может распознавать наблюдаемую зависимость вида $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ по некоторым отсчётам (число которых зависит от порядка выбранного многочлена) в общей аналитической форме,

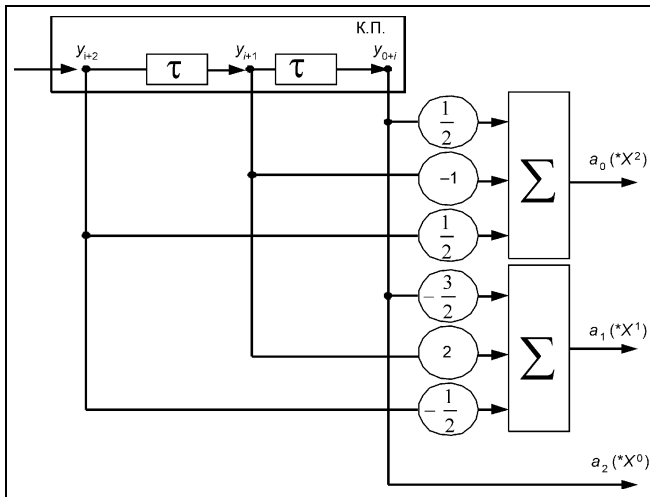


Рис. 2. Анализирующий процессор

так как базисные функции выбраны заранее и не зависят от шага наблюдения. Схема анализирующего процессора второго порядка представлена на рис. 2.

Его особенность заключается в наличии звеньев чистого запаздывания, связанных с перезаписью значений отсчётов в конвейерной памяти КП, число которых равно порядку выбранного полинома.

Работа процессора рассмотрена в Приложении (пример 2).

4. ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИЕ РЕКУРСИВНЫЕ ПРОЦЕССОРЫ И РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Используя рекурсивную форму представления интерполяционных многочленов вида (4), легко построить процессоры, осуществляющие численное дифференцирование. Как указывается в работе [18], дифференцируя полином Лагранжа по независимой переменной, можно получать различные формулы численного дифференцирования.

Продифференцируем выражение (7) по x и получим

$$y'(x) = \frac{2x-1}{2}y_{2+i} - (2x-2)y_{1+i} + \frac{2x-3}{2}y_{0+i} \quad (9)$$

Чтобы представить $y(x)$ в рекурсивной (экстраполяционной) форме, необходимо определить точку $x = n$, где $n > 2$ — целое число, лежащее вне отрезка интерполяции. Назовём эту точку “точкой регенерации”. Выбрав $x = 3$, получим $y'(x) = \frac{5}{2}y_{2+i} - 4y_{1+i} + \frac{3}{2}y_{0+i}$.

Подставляя в формулу (9) отсчёты квадратичной зависимости, например, $y_{2+i} = 4$, $y_{1+i} = 1$, $y_{0+i} = 0$ в точках $x_2 = 2$, $x_1 = 1$, $x_0 = 0$, получаем $y'(x) = \frac{5}{2} \cdot 4 - 4 \cdot 1 + \frac{3}{2} \cdot 0 = 6$. Это значение точно соответствует теоретически известному значению производной функции $y = x^2$ в точке $x = 3$ ($2x = 2 \cdot 3 = 6$).

Задавая точку регенерации произвольно, можно получить по наблюдаемым значениям $y = ax^2 + bx + c$ в трёх точках значения производной в любой точке, как в будущем, так и в прошлом.

Действительно, пусть задана функция $y = 2x^2 + \frac{1}{2}x - 1$ с шагом $\Delta x = 0,1$, начиная с точки $x = 1$, т. е. $x_{0+i} = 1$; $x_{1+i} = 1,1$; $x_{2+i} = 1,2$ и соответственно $y_{0+i} = 1,5$, $y_{1+i} = 1,925$, $y_{2+i} = 2,48$. Заметим однако, что, как указывалось выше, биосистемы воспринимают все зависимости так, как если бы независимая переменная (время) являлась целым аргументом $x = 0, 1, \dots, n$.

Поэтому, если, как в примере 1 (см. Приложение), x также целое, то масштабы внешнего процесса и наблюдаемой зависимости совпадают.

В рассматриваемом случае такого совпадения нет, и поэтому для проверки способности рекурсивной схемы (процессора) (9) правильно дифференцировать необходимо сначала определить, какую зависимость “видит” биосистема, используя формулу (8).

Подставляя имеющиеся отсчёты в формулу (8), получим:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2}y_{2+i} - y_{1+i} + \frac{1}{2}y_{0+i} = 0,065, \\ a_1 &= -\frac{1}{2}y_{2+i} + 2y_{1+i} - \frac{3}{2}y_{0+i} = 0,36, \\ a_3 &= y_{0+i} = 1,5. \end{aligned}$$

Таким образом, в своей системе координат биосубъект наблюдает зависимость $y = 0,065n^2 + 0,36n + 1,5$.

Теоретическое выражение для производной наблюдаемой зависимости имеет вид:

$$y'_n = 0,13n + 0,36. \quad (10)$$

Теперь выберем сначала точку регенерации, расположенную произвольно в будущем, например, $n = 5$ (имеется в виду пятый отсчёт, соответствующий реальному (внешнему) времени $x = 1,5$). Подставив значение $x = 5$ в выражение (9), получим $y'_n = \frac{9}{2}y_{2+i} - 8y_{1+i} + \frac{7}{2}y_{0+i}$. Подставляя сюда заданные отсчёты, получаем $y'(5) = \frac{9}{2} \cdot 2,48 - 8 \cdot 1,925 + \frac{7}{2} \cdot 1,5 = 1,01$.

Подставляя $n = 5$ в зависимость (10), убеждаемся, что $y'_{n \text{ теор}} = 0,13 \cdot 5 + 0,36 = 1,01$.

Возьмём точку регенерации, лежащую в прошлом, например, $n = -2$.

Примем в выражении (9) $x = -2$, в результате получим $y'_n = -\frac{5}{2}y_{2+i} + 6y_{1+i} - \frac{7}{2}y_{0+i}$.

Вычисляя y'_n при тех же значениях отсчётов $\{y_{k+i}\}$, что и ранее, получаем $y'_n = -\frac{5}{2} \cdot 2,48 + 6 \cdot 1,925 - \frac{7}{2} \cdot 1,5 = 0,1$.

То же значение производной даёт зависимость (10) $y'_{n \text{ теор}} = 0,13 \cdot (-2) + 0,36 = 0,1$.



Заметим, что если точку регенерации совместить с концом отрезка интерполирования, т. е. принять $x = 2$, то формула (9) даёт

$$y'_x = \frac{3}{2}y_{2+i} - 2y_{1+i} + \frac{1}{2}y_{0+i}. \quad (11)$$

Формулы (7) и (11) позволяют одновременно определить в последней точке отрезка интерполирования как значения некоторой квадратичной функции, так и её производной. Поскольку выражение (11) представляет значение производной в возвратно-рекурсивной форме, её можно назвать *рекурсивной производной*. Дифференцируя соответствующий полином несколько раз, можно получать рекурсивные производные более высоких порядков. Эта возможность зависит от того, каков был порядок исходного полинома, взятого за основу. Рекурсивное дифференцирование можно использовать для построения процессоров, решающих дифференциальные уравнения, как это показано далее.

5. РЕШАЮЩИЕ БИОПРОЦЕССОРЫ

Решающие биопроцессоры строятся по следующей методике. Пусть задано некоторое дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x, t). \quad (12)$$

Предположим, что решение уравнения (12) $x(t)$ известно в некоторых равноотстоящих узловых точках t_0, t_1, \dots, t_n . Поскольку вид решения не зависит от того, в каком масштабе взяты узлы t_0, \dots, t_n , будем считать что \dot{x} в уравнении (12) также масштабно инвариантно относительно времени. Данное свойство скейлинга обусловлено тем очевидным фактом, что любую, заданную стандартным образом функцию, можно вычислить по одному и тому же алгоритму для любого шага по аргументу. Полагая, что известны $x_0 = x(t_0), x_1 = x(t_1), \dots, x_n = x(t_n)$, представим решение $x_n(t)$ интерполяционным полиномом, считая шаг Δt равным единице:

$$x(t) = P(t, \{t_i\}\{x_i\}), \quad t_i = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

Для краткости наборы узлов $\{t_i\}$ и соответствующих отсчётов функции $\{x_i\}$ будем обозначать векторами \mathbf{t} и \mathbf{x} .

Заметим, что отсчёты функции $x_i(t_i)$ в выражении (13) играют роль начальных условий, исходя из которых можно получить все значения x_n как на отрезке $0 \leq t \leq n$, так и вне его, например, в точке x_{n+1} ($t = n + 1$). Действительно, если $t = 0, 1, 2, \dots$, то формулу (13) можно при фиксированном $t_i = n + 1$ считать возвратно-рекурсивной формой задания $x(t)$. Поэтому, если известны какие-либо равноотстоящие точки решения — x_0, \dots, x_n , то по выражению (13) можно вычислить последовательность x_{n+1}, \dots, x_{n+k} и т. д.

Дифференцируя выражение (13) формально по t , получим

$$\dot{x}(t) = \dot{P}(t, \mathbf{t}, \mathbf{x}), \quad t_i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (14)$$

т. е. интерполяционный полином, представляющий рекурсивную производную $\dot{x}(t)$. Это очевидно, так как независимо от формы представления функции её дифференцирование даёт производную в тех же точках.

Подставляя выражение (14) в уравнение (12), получаем интерполированное дифференциальное уравнение

$$\dot{P}_n(t, \mathbf{t}, \mathbf{x})|_{t=t_p} = f(P_n(t, \mathbf{t}, \mathbf{x})|_{t=t_p}), \quad (15)$$

где t_p — точка “регенерации”.

Задавая в уравнении (15) $t_p = n$, получаем рекурсивное представление решения дифференциального уравнения, которое соответствует исходному уравнению (12) в некоторых точках $t = 0, t = 1, \dots, t = n$ и представлено рекурсивно через x_n, x_{n-1}, \dots, x_0 .

Точку регенерации необходимо выбирать так, чтобы была известна точность интерполирования, которая задаётся обычно для точек, принадлежащих отрезку интерполирования $[0, n]$. Необходимо также использовать все имеющиеся начальные отсчёты. Этим двум требованиям удовлетворяет только точка $t_p = n$.

Каноническую возвратную рекурсию, соответствующую уравнению (15) и, следовательно, уравнению (12), легко получить, решая уравнение (15) явно относительно наиболее позднего текущего отсчёта x_n :

$$x_n = \varphi_1(\mathbf{t}, \mathbf{x})x_{n-1} + \varphi_2(\mathbf{t}, \mathbf{x})x_{n-2} + \dots + \varphi_n(\mathbf{t}, \mathbf{x})x_0. \quad (16)$$

Возвратно-рекурсивная последовательность (16) из начальных точек решения x_0, \dots, x_{n-1} позволяет получить все остальные точки решения уравнения (15) или некоторые точки решения исходного уравнения (12) в некоторых узлах $t = n + 1, t = n + 2, \dots, t = n + M$, точно соответствующих условию равенства функций левой и правой частей исходного дифференциального уравнения (12). Таким образом, выражение (16) интерполирует исходное дифференциальное уравнение.

Полученное возвратно-рекурсивное представление (16) интерполированного решения уравнения (12) соответствует линейному разностному уравнению с постоянными коэффициентами, имеющему решение в виде квазимногочлена

$$x_k = \sum_{i=1}^m \lambda_i^k P_{\gamma_{i-1}}(k), \quad (17)$$

где λ_i — соответствующий корень характеристического уравнения, γ_i — кратность этого корня, а $P_{\gamma_{i-1}}(k)$ — полином от k степени γ_{i-1} . Если считать, что для целых t решение уравнения (12) по составу функций, входящих в него, является частным случаем многочлена (17), то ясно, что интерполированное дифференциальное уравнение имеет решение, представляющее собой комбинацию степенных и гармонических (при комплексных λ_i) функций.

Иллюстрация методики построения решающих процессоров для случая линейного дифференциального уравнения маятника дана в Приложении (пример 3).

Схема рекурсивного процессора, осуществляющего решение дифференциального уравнения второго поряд-

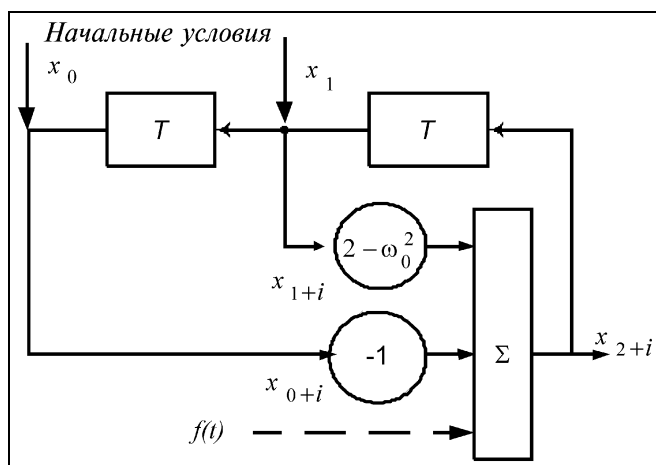


Рис. 3. Схема решающего процессора для уравнения линейного маятника

ка, показана на рис. 3, из которого видно, что он представляет собой сумматор, охваченный двумя контурами запаздывающей обратной связи.

Нейронная реализация таких схем может быть построена в виде компартов [17], состоящих из парал-

ельно работающих нейронов с общей функцией. Значения коэффициентов преобразования при входах суммирующих нейронов могут быть получены путем разветвления аксонной части нейронов, а знаки — за счёт возбуждающих (+) и тормозящих (-) синаптических контактов.

Указанные в схеме размеры задержек могут быть получены путем последовательного соединения нейронов, каждый из которых осуществляет элементарное запаздывание, а также путём изменения толщины нервных волокон. Рассматривая с этих позиций схему эфферентных каналов коры мозжечка [10], приведённую на рис. 4, можно увидеть, что выражения (19) и (20) — см. пример 3 в Приложении — могут быть “собраны” из элементов этой схемы. При этом получится схема, хотя и отличающаяся от схемы на рис. 3, но функционально эквивалентная ей. Отметим, что на схеме подписи соответствуют компартаментам мозжечковой системы, участвующим в реализации прогностических функций, знаки “+” соответствуют возбуждающей, а знаки “-” — тормозящей связи.

Изучение литературы по физиологии управляющих систем организма показало, что те из них, для которых характерны колебательные режимы, аналогичны по структуре схеме, представленной на рис. 3.

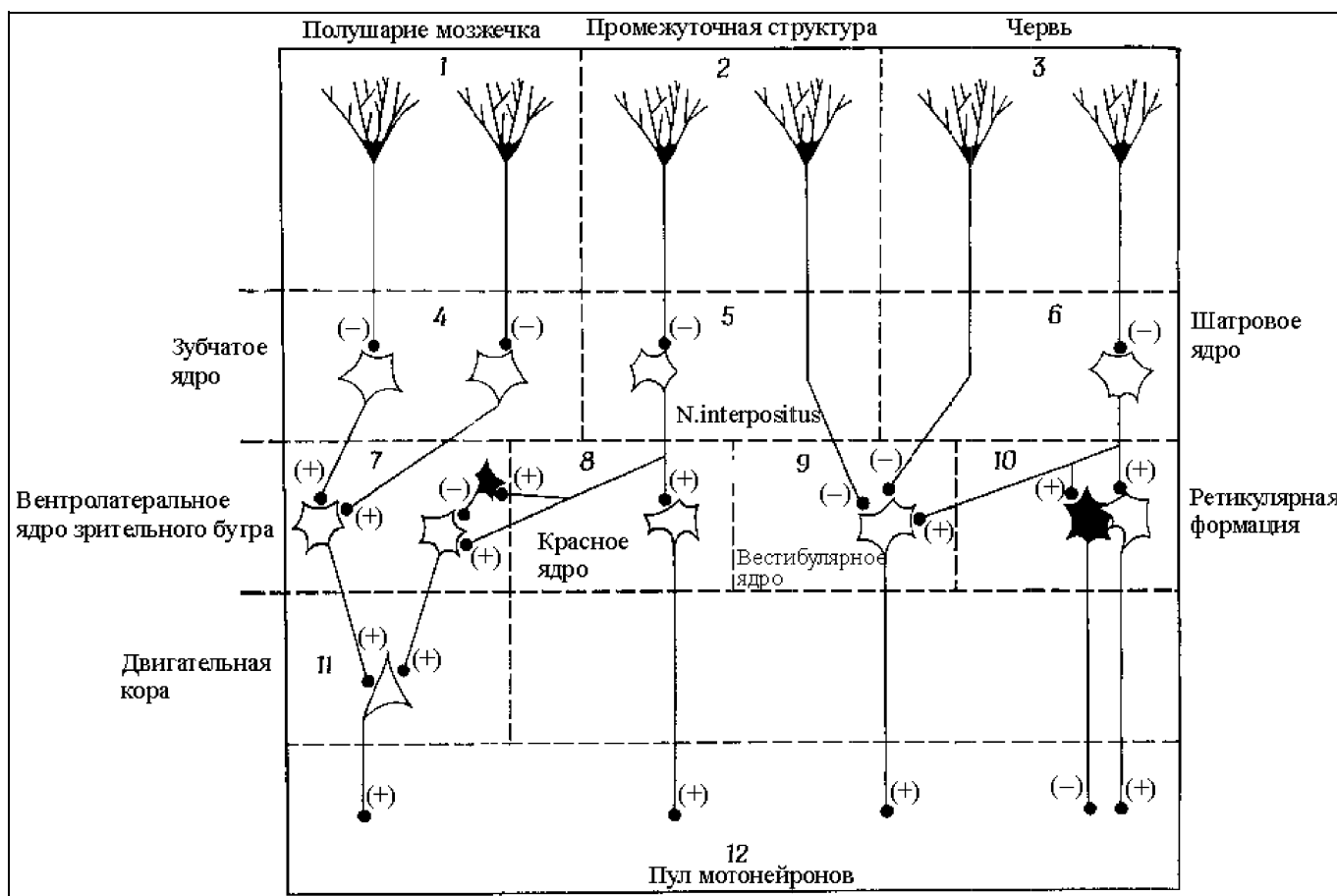


Рис. 4. Структура коры мозжечка

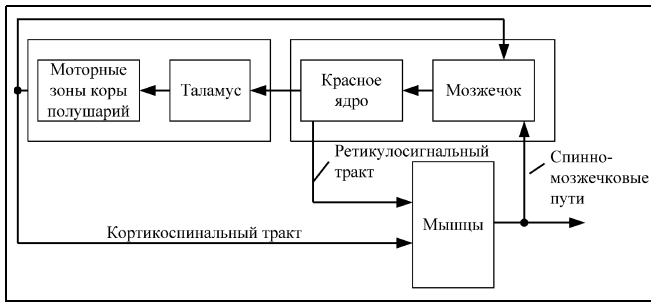


Рис. 5. Укрупнённая схема мозжечковой системы

Так, в работах [15, 19] приведены схемы мозжечковой системы, которые можно укрупнённо представить, как это изображено на рис. 5.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Установленная аналогия структур рекурсивных вычислений и двигательной системы представляется неслучайной и, по всей видимости, свидетельствует о том, что мозг или его процессорные части используют рекурсивные вычисления в качестве единственного способа преодоления проблемы реального времени в условиях ограниченной по объёму и дискретной памяти системы. Таким образом, используя естественные особенности и ограничения, свойственные нервной системе человека, в качестве операциональных оснований теории биовычислений можно построить новый тип процессоров. Принципы работы последних соответствуют диалектическому соединению аналоговых и цифровых способов вычисления. Действительно, схемы, подобные рассмотренным, как и аналоговые, не имеют ограничений по быстродействию, так как чем больше значения запаздываний в цепях обратных связей, тем более удалены в будущее рассчитываемые новые точки зависимостей (прогнозируемых или разыскиваемых как решения дифференциальных уравнений). Платой за это является отсутствие информации о промежуточных точках. Однако рекурсивные вычисления, по-видимому, единственный способ для биосистем решать проблемы выживания в реальном времени, когда нет ни возможности “работать” с аналоговыми сигналами (для этого нет необходимых ресурсов памяти), ни возможности бесконечно дробить отрезки времени, устремляя Δt к нулю, как это делается в численной математике (для этого не хватает быстродействия).

В связи с бурным развитием исследований по имитационному моделированию живых систем на базе бионического подхода, известного в настоящее время как “биомиметика”, предложенные схемы вычислений могут оказаться полезным средством в практической реализации специализированных вычислительных систем.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пример 1. Пусть задана схема БРП в виде:

$$P_{n+1+i} = 3P_{n+i} - 3P_{n-1+i} + P_{n-2+i} \quad (18)$$

Очевидно, она “понимает” и “обучается” воспроизводить любую зависимость $P(x) = ax^2 + bx + c$ при про-

извольных a, b и c по любым трём равноотстоящим отсчётам.

Действительно, пусть $a = 1, b = \frac{1}{2}, c = 2$ и известны значения полинома $P(x)$ в трёх точках $x_0 = 1, x_1 = 2$ и $x_2 = 3, P_0 = 3,4, P_1 = 7$ и $P_2 = 12,5$.

Подставив эти значения в формулу (18), получим $P_3 = 3 \cdot 12,5 - 3 \cdot 7 + 3,5 = 20$. Непосредственно рассчитывая значения $P(x)$ при $x_3 = 4$, получаем:

$$P_3 = 1 \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot 4 + 2 = 16 + 2 + 2 = 20,$$

что показывает справедливость утверждений о свойствах зависимостей (4) и (18).

Легко непосредственно проверить, что выражение (18) воспроизводит зависимость $P(x)$ как в прямом, так и в обратном направлениях ($x_0 = 4, x_1 = 3, x_2 = 2$): $P_3 = 3 \cdot 7 - 3 \cdot 12,5 + 20 = 41 - 37,5 = 3,5$.

Поскольку выражение (18) воспроизводит зависимость $P(x)$ для любых a, b и c , очевидно, что будут воспроизводиться как линейная зависимость, так и постоянная.

Пусть $P_0 = C, P_1 = 2C, P_3 = 3C$, тогда $P_4 = 3 \cdot 3C - 3 \cdot 2C + C = 4C$.

Возьмём $P_0 = C, P_1 = C, P_3 = C$, тогда $P_4 = 3C - 3C + C = C$. ♦

Пример 2. Пусть начальные отсчёты, загружаемые в конвейерную память анализирующего процессора, представляют собой значения параболы $y = x^2$, где $\{x_i\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, что соответствует значениям $\{y_i\} = \{0, 1, 4, 9, 16, \dots\}$.

Подставляя значения y_i в выражение (8) и принимая $y_{i+2} = 4, y_{i+1} = 1, y_{i+0} = 0$, получаем

$$a_0 = \left(\frac{1}{2} \cdot 4 - 1 + \frac{1}{2} \cdot 0\right) = 1,$$

$$a_1 = \left(-\frac{1}{2} \cdot 4 + 2 \cdot 1 - \frac{3}{2} \cdot 0\right) = 0, \quad a_2 = y_{0+i} = 0.$$

Из этого следует, что система наблюдает в своей системе отсчёта значения функции $y(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2 = x^2$ (рис. 6, а). Если взять начальные отсчёты $y_{0+i} = 4, y_{1+i} = 9, y_{2+i} = 16$, то система определит наблюдаемую

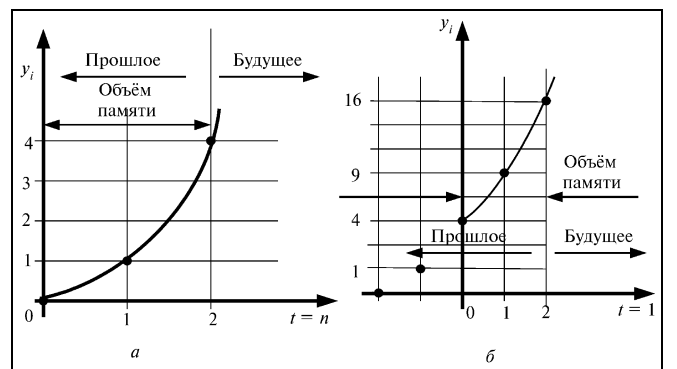


Рис. 6. Наблюдаемые зависимости во внешней (а) и связанной с наблюдателем (б) системах отсчёта

зависимость следующим образом: $a_0 = \left(\frac{1}{2} \cdot 16 - 9 + \frac{1}{2} \cdot 4\right) = 1$; $a_1 = \left(-\frac{1}{2} \cdot 16 + 2 \cdot 9 - \frac{3}{2} \cdot 4\right) = 4$; $a_2 = 4$.

Таким образом, $y = x_2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$, что соответствует “сдвигу” системы вперёд по времени на два шага и, соответственно (если считать систему координат наблюдателя неподвижной), сдвигу на ту же величину графика параболы назад по времени (рис. 6, б) относительно наблюдателя. ♦

Пример 3. Пусть дано уравнение линейного маятника $\ddot{\varphi} = -\omega_0^2 \varphi$. Используя рекурсивную производную, вычисленную на базе полинома Лагранжа второго порядка, записанного для целых узлов, получим:

$$x_n - 2x_{n-1} + x_{n-2} + \omega_0^2 x_{n-1} = 0 \quad (19)$$

или в канонической форме возвратной последовательности

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} - \omega_0^2 x_{n-1}. \quad (20)$$

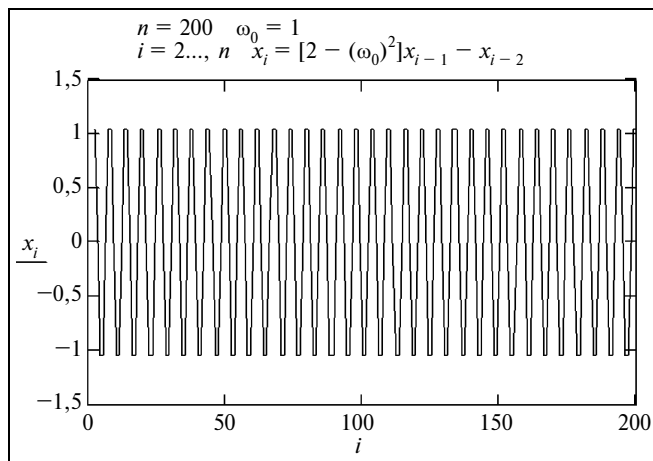


Рис. 7. График решения уравнения линейного маятника при $\omega_0 = 1$

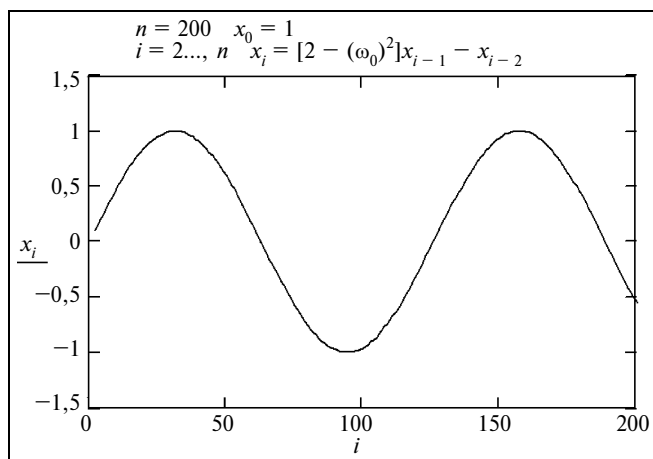


Рис. 8. График решения уравнения линейного маятника при $\omega_0 = 0,05$

Подставляя начальные отсчёты $x_0 = 0$, $x_1 = \arccos\left(\frac{2 - \omega_0^2}{2}\right)$, получим благодаря такой нормировке движение маятника с амплитудой, равной единице при любом значении ω_0 . На рис. 7 и 8 приведены численные решения уравнения маятника для $\omega_0 = 1$ и $\omega_0 = 0,05$, соответственно. ♦

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурцев М. С., Гусарев Р. В., Редько В. Г. Нейросетевая модель эволюционного возникновения целенаправленного адаптивного поведения // Сб. трудов конф. “Нейроинформатика 2001”. — М., 2001. — С. 153–160.
2. Редько В. Г. Проблема происхождения интеллекта и эволюционная биокibernетика // Журн. высшей нервн. деятельн. — 1998. — Т. 48, вып. 2. — С. 358–369.
3. Галушкин А. И. Нейронные сети. Кн. I. — М.: ИПРЖР, 2000. — 415 с.
4. Вейль Г. Математическое мышление. — М.: Наука, 1986. — 400 с.
5. Арbib М. Метафорический мозг. — М.: Мир, 1976. — 295 с.
6. Гейто Дж. Молекулярная психобиология. — М.: Мир, 1969. — 275 с.
7. Дуус П. Топический диагноз в неврологии. Анатомия. Физиология. Клиника. — М.: ИПЦ “Вазар—Ферро”, 1997. — 400 с.
8. Куффлер С., Николс Дж. От нейрона к мозгу. — М.: Мир, 1979. — 439 с.
9. Прибрам К. Языки мозга. — М.: Прогресс, 1975. — 464 с.
10. Триумфов А. В. Топическая диагностика заболеваний нервной системы: — М.: МЕДпресс-информ, 2001. — 364 с.
11. Шаде Дж., Форд Д. Основы неврологии. — М.: Мир, 1976. — 350 с.
12. Глезер В. Д. Зрение и мышление. — Л.: Наука, 1985. — 246 с.
13. Гудстейн Н. П. Рекурсивный математический анализ. — М.: Наука, 1970. — 472 с.
14. Прангишвили И. В., Виленкин С. Я., Медведев И. Л. Параллельные вычислительные системы с общим управлением. — М.: Энергоатомиздат, 1983. — 312 с.
15. Бакусов Л. М., Сафин Ш. М., Насыров Р. В. Компартментные модели нейронных механизмов усвоения закономерностей на основе теории самообучающихся рекурсивных фильтров // Вестник новых медицинских технологий. — 2002. — № 3. — С. 72–75.
16. Бакусов Л. М. Нейропроцессорные функции рекурсивных фильтров и их нейрофизиологические аналоги // Нейрокомпьютеры: Разработка, применение. — 2004. — № 9. — С. 45–46.
17. Еськов В. М. Введение в компартментную теорию респираторных нейронных сетей. — М.: Наука, 1994. — 167 с.
18. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. — М.: Наука, 1989. — 432 с.
19. Коробков А. В., Чеснокова С. А. Атлас по нормальной физиологии. — М.: Высшая школа, 1987. — 351 с.

☎ (3472) 73-78-35

E-mail: bakusov@yandex.ru

