УДК 681.511

ДУАЛЬНОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

А. Н. Жирабок

Дальневосточный государственный технический университет, г. Владивосток

Устанавлена дуальность свойств наблюдаемости и управляемости нелинейных непрерывных и дискретных динамических систем.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что для линейных динамических систем наблюдаемость и управляемость являются дуальными понятиями [1], причем эта дуальность выражается средствами аппарата теории матриц. Известен также факт дуальности наблюдаемости и управляемости в нелинейном непрерывном случае для специального класса систем [2], проявляющийся в дуальности векторных полей и дифференциальных форм. Для нелинейных дискретных динамических систем такая дуальность установлена в работе [3] средствами специального математического аппарата — алгебры функций [4] и носит теоретико-категорный характер. В работе [5] были рассмотрены так называемые разложимые системы в некоторой категории и показана дуальность наблюдаемости и управляемости в этом случае.

Естественным представляется тот факт, что дуальность выражается средствами того математического аппарата, с помощью которого анализируются наблюдаемость и управляемость.

Настоящая работа является естественным продолжением работы [3] на класс нелинейных непрерывных и дискретных динамических систем, описываемых уравнениями

$$\dot{x}(t) = f(x(t),\, u(t)),\; y(t) = h(x(t)) \qquad (1)$$

и

$$x(t+1) = f(x(t),\, u(t)),\; y(t) = h(x(t)), \qquad (2)$$

соответственно, где $x \in X \subseteq R^n$, $u \in U \subseteq R^m$, $y \in Y \subseteq R^1$ — векторы состояния, управления и выхода, f и h — в общем случае нелинейные векторные функции. Будем обозначать системы (1) и (2) пятеркой $S = (X, U, Y, f, h)$. Задача настоящей работы заключается в установлении вида дуальности наблюдаемости и управляемости для рассматриваемого класса систем.

Согласно работам [2, 3] систему S будем называть ненаблюдаемой, если существуют состояния $x(t_0)$ и $x'(t_0)$ такие, что для произвольного управления $u(\tau)$ на интервале $[t_0, \infty)$ выполняется равенство $H(x(t_0), u(\tau)) = H(x'(t_0), u(\tau))$, где $H(x(t_0), u(\tau))$ — выходная реакция системы S в начальном состоянии $x(t_0)$ на управление $u(\tau)$, $\tau > t_0$. Состояния $x(t_0)$ и $x'(t_0)$ будем называть эквивалентными. Систему S будем называть неуправляемой, если для некоторого состояния x_0 существует такое состояние x', что ни для какого конечного интервала t_1—t_0 не существует управления $u(\tau)$, переводящего систему из состояния $x_0 = x(t_0)$ в состояние $x' = x(t_1)$.

Для анализа общих свойств наблюдаемости и управляемости будем использовать конструкцию гомоморфизма систем [6, 7].

1. ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О ГОМОМОРФИЗМАХ СИСТЕМ

Пусть φ: $X \to X'$ — произвольная (для системы (1) — дифференцируемая) функция. Будем называть ее гомоморфизмом системы S в некоторую систему $S' = (X', U', Y', f', h')$ с $U' = U$, $Y' = Y$ и за-

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 03-01-00791) и Министерства образования и науки РФ.

писывать φ: $S \to S'$, если в дискретном случае коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd} X \times U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi\pi_X \times \pi_U"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ X' \times U \arrow[r, "f'"] & X' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "e_Y"] \\ X \arrow[r, "h'"] & Y, \end{tikzcd} \tag{3}$$

т. е. $\varphi(f(x, u)) = f'(\varphi(x), u)$ для всех $x \in X$, $u \in U$, где π_X и π_U — проекции (т. е. $\pi_X(x, u) = x$ и $\pi_U(x, u) = u$), e_Y — тождественная функция. Конструкция $\varphi\pi_X \times \pi_U$ означает, что проекции π_X и π_U выделяют из пары (x, u) соответствующие компоненты, первая из которых преобразуется функцией φ, и затем вновь формируется пара $(\varphi(x), u)$. Формальное определение знака "×" будет дано в § 2. В непрерывном случае функция φ у правой стрелки первой из диаграмм (3) заменяется на матрицу Якоби $d\varphi/dx$ и требование коммутативности дает равенство $(d\varphi/dx)(f(x, u)) = f'(\varphi(x), u)$.

Нетрудно видеть, что если гомоморфизм φ неинъективен, то система S ненаблюдаема; в § 3 будет показано обратное. Следовательно, система S ненаблюдаема в том и только том случае, когда существует неинъективный гомоморфизм φ: $S \to S'$. Напомним, что функция φ называется инъективной, если из $\varphi(x) = \varphi(x^*)$ следует $x = x^*$.

Систему $S^* = (X^*, U^*, Y^*, f^*, h^*)$ с $U^* = U$ и $Y^* = Y$ назовем минимальным образом системы S, если существует сюръективный гомоморфизм φ^*: $S \to S^*$ и для произвольного гомоморфизма φ: $S \to S'$ найдется такой гомоморфизм φ': $S' \to S^*$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & S \arrow[dl, "\varphi^*"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ S^* & & S' \arrow[ll, "\varphi'"] . \end{tikzcd} \tag{4}$$

Напомним, что функция φ^*: $X \to X^*$ называется сюръективной, если для произвольного $x^* \in X^*$ существует прообраз $x \in X$ такой, что $\varphi^*(x) = x^*$; иными словами, если $\varphi^*(X) = X^*$.

Теорема 1. *Минимальный образ единственен с точностью до изоморфизма и наблюдаем.*

Доказательство теоремы полностью повторяет доказательство аналогичной теоремы в работе [3] для дискретного случая и поэтому не приводится.

Из сказанного следует важная роль функции φ^*. Ясно, что если функция φ^* неинъективна, то система S ненаблюдаема. Обратно, пусть φ^* инъективна; так как согласно диаграмме (4) для произвольного гомоморфизма φ: $S \to S'$ справедливо $\varphi'\varphi = \varphi^*$, то функция φ также инъективна [8]. В силу произвольности функции φ отсюда следует, что система S наблюдаема; иными словами, у нее нет эквивалентных состояний.

Перейдем к анализу управляемости; традиционный подход к этой задаче базируется на анализе поведенческих особенностей системы на различных входных воздействиях. Даже при использовании такого абстрактного математического аппарата, как теория категорий, для анализа управляемости разложимых систем вводится конструкция счетной степени объекта (множества) U, моделирующая произвольные входные воздействия [5]. В настоящей работе предлагается другой подход, непосредственно связанный с идеями дуальности.

Из определения следует, что в неуправляемой системе некоторые состояния недостижимы из начального состояния. Это можно связать с существованием некоторого несюръективного гомоморфизма ψ: $S' \to S$. Перейдем к формальным конструкциям.

Систему $S_* = (X_*, U_*, Y_*, f_*, h_*)$ с $U_* = U$, $Y_* = Y$ назовем максимальным прообразом системы S, если существует инъективный гомоморфизм ψ_*: $S_* \to S$ и для произвольного гомоморфизма ψ: $S' \to S$ найдется такой гомоморфизм ψ': $S_* \to S'$, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} & S & \\ S_* \arrow[ur, "\psi_*"] \arrow[rr, "\psi'"] & & S' \arrow[ul, "\psi"'] . \end{tikzcd} \tag{5}$$

Теорема 2. *Максимальный прообраз единственен с точностью до изоморфизма и управляем.*

Теорема доказывается по аналогии с теоремой 1.

Нетрудно видеть, что если некоторый гомоморфизм ψ: $S' \to S$ несюръективен, то система S неуправляема; в § 3 будет показано обратное. Из сказанного следует, что если функция ψ_* несюръективна, то система S неуправляема. Обратно, пусть ψ_* сюръективна; так как согласно диаграмме (5) для произвольного гомоморфизма ψ: $S' \to S$ справедливо $\psi\psi' = \psi_*$, то функция ψ также сюръективна [8]. В силу произвольности функции ψ отсюда следует, что система S управляема.

Наша дальнейшая задача состоит в выявлении некоторых свойств функций φ^* и ψ_* и получении ряда конструкций, демонстрирующих искомую дуальность. Для этого предлагается применить специальный математический аппарат, положенный в основу работ [3, 4]. Коротко изложим его основные положения, сделав акцент на дуальности; необходимые детали и доказательства можно найти в работах [3, 4].

2. АЛГЕБРА ФУНКЦИЙ

Рассматриваемый математический аппарат содержит четыре основные конструкции. Пусть $G(G^*)$ — множество функций с областью определения (значений) X.

- Отношения частичного предпорядка $\leqslant$ и $\ll$: для произвольных функций $a, b \in G$ и $a^*, b^* \in G^*$ будем записывать как $a \leqslant b$ и $a^* \gg b^*$, если существуют функции g и g^* такие, что коммутативны диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\
S \arrow[rr, "g"] & & W
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & X & \\
S^* \arrow[ur, "a^*"] & & W^* \arrow[ul, "b^*"'] \arrow[ll, "g^*"']
\end{tikzcd}, \tag{6}
$$

где S, W, S^* и W^* — некоторые множества. Нетрудно видеть, что если π_a и π_b — разбиения, индуцируемые функциями a и b на множестве X, то $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $\pi_a \leqslant \pi_b$. Дуально, если $a^*(S^*)$ и $b^*(W^*)$ — образы множеств S^* и W^* в X, то $a^* \gg b^*$ тогда и только тогда, когда $a^*(S^*) \supseteq b^*(W^*)$.

Если $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$ ($a^* \ll b^*$ и $b^* \ll a^*$), будем записывать $a \approx b$ ($a^* \approx b^*$) и говорить, что эти функции эквивалентны. Нетрудно видеть, что эквивалентным функциям соответствуют одинаковые разбиения или образы.

- Операции $\times$ и $\square$: прямым произведением $a \times b$ функций a и b и прямой суммой $a^* \square b^*$ функций a^* и b^* назовем функции g и g^* такие, что коммутативны диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "a"'] \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "b"] & \\
S & S \times W \arrow[l, "\pi_S"] \arrow[r, "\pi_W"'] & W
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & X & \\
S^* \arrow[ur, "a^*"] \arrow[r, "\tau_{S^*}"'] & S^* \square W^* \arrow[u, "g^*"] & W^* \arrow[ul, "b^*"'] \arrow[l, "\tau_{W^*}"]
\end{tikzcd}, \tag{7}
$$

где $\times$ — прямое произведение множеств S и W, $\square$ — прямая сумма множеств S^* и W^*, π_S и π_W — проекции, τ_{S^*} и τ_{W^*} — вложения [8]. Из определений прямого произведения и прямой суммы множеств следует, что функции g и g^* единственны. Введенным конструкциям можно дать эквивалентные определения:

$$a \times b = \max(g | g \leqslant a,\ g \leqslant b),$$
$$a^* \square b^* = \min(g^* | g^* \gg a^*,\ g^* \gg b^*).$$

- Бинарные отношения Δ и Δ^*: $(a, b) \in \Delta$ и $(a^*, b^*) \in \Delta^*$, если коммутативны следующие диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
X \times U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a\pi_X \times \pi_U"'] & X \arrow[d, "b"] \\
S \times U \arrow[r, "d"] & W
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \times U \arrow[r, "f"] & X \\
S^* \times U \arrow[r, "d^*"] \arrow[u, "a^*\pi_{S^*} \times \pi_U"] & W^* \arrow[u, "b^*"']
\end{tikzcd}, \tag{8}
$$

где d и d^* — некоторые функции. В непрерывном случае функции b и b^* заменяются на матрицы Якоби db/dx и db^*/dw^*, соответственно.

- Операторы M и m: $M(b)$ — это максимальная функция, образующая с функцией b пару:

$$(M(b),\ b) \in \Delta,\ (a,\ b)\Delta \Rightarrow a \leqslant M(b);$$

$m(a^*)$ — это минимальная функция, с которой функция a^* образует пару:

$$(a^*,\ m(a^*)) \in \Delta^*,\ (a^*,\ b^*) \in \Delta^* \Rightarrow m(a^*) \ll b^*.$$

Правила вычисления операций и операторов и их свойства содержатся в работах [3, 4].

Как следует из сравнения приведенных парных диаграмм, они показывают дуальность определяемых ими отношений предпорядка, операций и операторов, при этом дуальность состоит в инвертировании всех стрелок на диаграммах (кроме тех, которые определяют исходную систему).

3. АНАЛИЗ НАБЛЮДАЕМОСТИ И УПРАВЛЯЕМОСТИ

Сравнивая диаграммы (3), (6), (8) и учитывая определение оператора M, с очевидностью заключаем, что функция φ является гомоморфизмом систем $S \to S'$ в том и только том случае, когда справедливы неравенства

$$\varphi \leqslant h, \quad \varphi \leqslant M(\varphi). \tag{9}$$

Пусть система S ненаблюдаема; определим неинъективную функцию φ следующим образом: $\varphi(x) = \varphi(x')$ тогда и только тогда, когда состояния x и x' эквивалентны, т. е. $H(x, u) = H(x', u)$. Нетрудно видеть тогда, что для эквивалентных состояний из равенства $\varphi(x) = \varphi(x')$ следует $h(x) = h(x')$; кроме того, из $\varphi(x) = \varphi(x')$ и коммутативности диаграммы (3) следует $\varphi(f(x, u)) = \varphi(f(x', u))$ для системы (2) и $(d\varphi/dx)(f(x, u)) = (d\varphi/dx)(f(x', u))$ для системы (1). Сравнивая это с определениями отношения $\leqslant$ и оператора M, заключаем, что справедливы неравенства (9). Таким образом, система S ненаблюдаема в том и только том случае, когда существует неинъективный гомоморфизм φ: $S \to S'$.

Положим $h^0 = h$,

$$h^{k+1} = h^k \times M(h^k),\ k = 0, 1, 2, ...; \tag{10}$$

если $h^{r+1} \approx h^r$ при некотором r, то функция $\varphi^0 = h^r$ является наибольшей, удовлетворяющей неравенствам (9) [4], и, следовательно, является гомоморфизмом $S \to S^0$ для некоторой системы $S^0 = (X^0, U, Y, f^0, h^0)$. Из экстремального свойства функции φ^0 (так же, как и для функции φ^*) нетрудно заключить, что она может быть взята в качестве критерия наблюдаемости: система S наблюдаема в том и только том случае, когда функция φ^0 инъективна.

Факторизуем функцию φ^0, т. е. представим ее в виде $\varphi^0 = \mu\varepsilon$, где μ — инъективная, а ε — сюръективная функции; факторизация единственна с точностью до изоморфизма [7]. Оказывается, что функция ε, как и φ^0, обладает экстремальным свойством в классе сюръективных функций.

Теорема 3. *Если некоторая сюръективная функция φ является гомоморфизмом $S \to S'$, то $\varphi \leqslant \varepsilon$.*

Доказательство. Так как φ^0 — наибольший среди всех гомоморфизмов системы S, то $\varphi \leqslant \varphi^0$. Изобразим это на коммутативной диаграмме (сплошные стрелки):

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[dr, "\varepsilon"] \arrow[dd, bend right=80, "\varphi^0"'] & \\ X' \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & \varepsilon(X) \arrow[dl, "\mu"] \\ & X^0 & \end{tikzcd} \qquad (11)$$

Отсюда с учетом сюръективности φ и инъективности μ на основании леммы Зейгера о пополнении [7] получаем, что существует единственная функция $X' \to \varepsilon(X)$ (штриховая стрелка), дополняющая диаграмму до коммутативной, что и позволяет установить требуемое неравенство.

Поскольку гомоморфизм φ^* (см. диаграмму (4)) сюръективен, то на основании теоремы 3 имеем $\varphi^* \leqslant \varepsilon$. В работе [3] показано, что в дискретном случае функция ε также является гомоморфизмом, а тогда из определения функции φ^* следует неравенство $\varepsilon \leqslant \varphi^*$, что в итоге дает $\varepsilon \approx \varphi^*$. Если системы (1) и (2) линейны, то, сравнивая полученные результаты с результатами работы [1], можно сделать вывод о том, что множество $\varepsilon(X)$ соответствует фактор-пространству $X/X^\#$, а функция ε — каноническому отображению $X \to X/X^\#$, где $X^\#$ — нуль-пространство матрицы наблюдаемости линейной системы.

Перейдем к анализу управляемости; здесь мы будем опираться только на первую из диаграмм (3), поскольку функция h в этом анализе не участвует, и описывать систему тройкой $S = (X, U, f)$.

Для получения дуальных конструкций при анализе управляемости по аналогии с работой [5] введем функцию ρ: $R \to \{x_0 = x(t_0)\}$, где R — произвольное множество. Ограничимся задачей анализа управляемости класса систем, у которых начальное состояние x_0 достижимо из некоторого другого состояния. От гомоморфизма ψ: $S' \to S$ дополнительно потребуем, чтобы для некоторой функции ρ' была коммутативной диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \\ R \arrow[ur, "\rho"] \arrow[dr, "\rho'"'] & \\ & X' \arrow[uu, "\psi"'] \end{tikzcd} \qquad (12)$$

что означает согласование начальных состояний систем S' и S. Напомним, что из диаграмм (3) рассматривается только первая из них.

Сравнивая диаграммы (3), (6), (8) и (12) и учитывая определение оператора m, с очевидностью заключаем, что функция ψ является гомоморфизмом $S' \to S$ в том и только том случае, если справедливы неравенства

$$\rho \ll \psi, \quad m(\psi) \ll \psi. \qquad (13)$$

Пусть S неуправляема и $K(x_0)$ — область достижимости этой системы с начальным состоянием x_0. Обозначим $X' = K(x_0)$, f' — сужение функции f на множество X' и рассмотрим систему $S' = (X', U' = U, f')$. Введем функцию ψ с условием $K(x_0) \subseteq \psi(X')$. Нетрудно видеть, что справедливы соотношения $f(\psi(x'), u) = \psi(f'(x', u))$ для системы (2) и $f(\psi(x'), u) = (d\psi/dx')(f'(x', u))$ для системы (1). Сравнивая это с определением отношений $\ll$ и Δ^* и оператора m, заключаем, что справедливы неравенства (13). Таким образом, система S неуправляема тогда и только тогда, когда существует несюръективный гомоморфизм ψ: $S' \to S$.

Положим $\rho^0 = \rho$,

$$\rho^{k+1} = \rho^k \,\square\, m(\rho^k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (14)$$

Теорема 4. *Если $\rho^{r+1} \approx \rho^r$ при некотором r, то функция $\psi_0 = \rho^r$ является наименьшей, удовлетворяющей неравенствам (13), и, следовательно, она является гомоморфизмом $S_0 \to S$ для некоторой системы $S_0 = (X_0, U, Y, f_0, h_0)$ с $h_0 = h\psi_0$.*

Доказательство. Пусть $\rho^{r+1} \approx \rho^r$; тогда на основании условий (14) для функции $\psi_0 = \rho^r \approx \rho^{r+1}$ справедливо соотношение $\psi_0 \approx \psi_0 \,\square\, m(\psi_0)$. Так как для операции $\square$ выполняется неравенство $\psi_0 \,\square\, m(\psi_0) \gg m(\psi_0)$, то на основании предыдущего получаем $\psi_0 \gg m(\psi_0)$. Справедливость соотношения $\rho \ll \psi_0$ следует непосредственно из цепочки неравенств $\rho = \rho^0 \ll \rho^1 \ll \ldots \ll \rho^r = \psi_0$. Пусть для некоторой функции ψ выполняются условия (14). Из первого из них с учетом свойства монотонности оператора m следует неравенство $m(\rho) \ll m(\psi)$, что вместе с условием $m(\psi) \ll \psi$ дает неравенство $m(\rho) \ll \psi$. Рассматривая его вместе с условием $\rho \ll \psi$, на основании свойства отношения $\ll$ получаем неравенство $\rho \,\square\, m(\rho) \ll \psi$ или $\rho^1 \ll \psi$. Продолжая аналогично, получим $\rho^2 \ll \psi$, ..., $\rho^r \ll \psi$, откуда $\psi_0 = \rho^r \ll \psi$.

Из экстремального свойства функции ψ_0 (так же, как и для функции ψ_*) нетрудно заключить, что она может быть использована при анализе управляемости: система S управляема в том и только том случае, когда ψ_0 сюръективна.

Факторизуем функцию ψ_0, т. е. представим ее в виде $\psi_0 = \mu_*\varepsilon_*$, где μ_* — инъективная, а ε_* — сюръективная функции. Как и ψ_0, функция μ_* обладает экстремальным свойством в классе инъективных функций.

Теорема 5. *Если некоторая инъективная функция ψ является гомоморфизмом $S' \to S$, то $\psi \gg \mu_*$.*

Доказательство. Так как ψ_0 — наименьший среди всех гомоморфизмов вида $S_0 \to S$, то $\psi \gg \psi_0$. Изобразим это на коммутативной диаграмме (сплошные стрелки):

$$\begin{tikzcd}
& X_0 \arrow[dl] \arrow[dr, "\varepsilon_*"] \arrow[dd, bend right=90, "\psi_0"'] & \\
X' \arrow[dr, "\psi"'] & & \varepsilon_*(X_0) \arrow[ll, dashed] \arrow[dl, "\mu_*"] \\
& X &
\end{tikzcd} \tag{15}$$

Так как функция ψ инъективна, а ε_* сюръективна, то на основании леммы Зейгера о пополнении [7] получаем, что существует единственная функция $\varepsilon_*(X_0) \to X'$ (штриховая стрелка), дополняющая диаграмму до коммутативной, что и позволяет установить требуемое неравенство.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, для анализа свойств наблюдаемости и управляемости нелинейных непрерывных и дискретных динамических систем на основе специального математического аппарата (алгебры функций) получен ряд соотношений. Нетрудно видеть, что основные конструкции алгебры функций вводились дуальными парами (диаграммы (6)—(8) и определения операторов M и m). Дуальность здесь понимается в теоретико-категорном смысле как совпадение соответствующих коммутативных диаграмм с точностью до инвертирования стрелок (кроме тех из них, которые описывают рассматриваемые системы). В её основе лежит дуальность, установленная для разложимых систем [5, 9]. Дуальными же получаются и соотношения, описывающие задачи наблюдаемости и управляемости: (9) и (13), (10) и (14) (сравните также правую диаграмму (3) и (12), диаграммы (4) и (5), (11) и (15)); заметим, что свойства инъективности и сюръективности функций также являются дуальными понятиями [8].

Отметим, что по сравнению с дискретным случаем [3] число дуальных пар уменьшилось, в частности, перестали быть дуальными почти все свойства операций и операторов алгебры функций. Нетрудно видеть, что это — естественный результат расширения класса рассматриваемых систем до непрерывных и дискретных. Главный вывод, тем не менее, сохранился: дуальность свойств наблюдаемости и управляемости в нелинейном случае — это теоретико-категорная дуальность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления. — М.: Наука, 1980. — 376 с.
2. *Hermann R., Krener A.J.* Nonlinear controllability and observability // IEEE Trans. Automat. Control. — 1977. — Vol. AC-22. — № 5. — P. 728—740.
3. *Жирабок А. Н.* Дуальность свойств наблюдаемости и управляемости нелинейных динамических систем // Известия РАН. Теория и системы управления. — 1998. — № 1. — С. 5—8.
4. *Жирабок А. Н., Шумский А. Е.* Функциональное диагностирование непрерывных динамических систем, описываемых уравнениями с полиномиальной правой частью // Автоматика и телемеханика. — 1987. — № 8. — С. 154—164.
5. *Arbib M., Manes E.* Foundation of system theory: decomposable systems // Automatica. — 1974. — Vol. 10. — P. 285—302.
6. *Hartmanis J., Stearns R.* Algebraic structure theory of sequential machines. — N.-Y.: Prentice-Hall Inc., 1966. — 211 p.
7. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971. — 400 с.
8. *Голдблат Р.* Топосы. Категорный анализ логики. — М.: Мир, 1983. — 488 с.
9. *Данилов В. В., Жирабок А. Н.* Управляемость и наблюдаемость разложимых систем // Кибернетика и вычислительная техника. — 1987. — Вып. 73. — С. 19—26.

☎ *(4232) 45-08-64*

E-mail zhirabok@mail.ru

❑