УДК 519.7

СОБСТВЕННЫЕ ДВИЖЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЦИФРОВЫХ ОБЪЕКТОВ[1]

В. М. Чадеев

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова, г. Москва

Рассмотрены цифровые динамические системы с дискретным временем, в которых значения входа и выхода ограничены фиксированной разрядной сеткой.

ВВЕДЕНИЕ

Быстрое развитие вычислительных машин открывает совершенно новые возможности для управления. В частности, при идентификации нелинейных объектов появилась возможность не перебирать структуры, а просто наращивать данные в банке данных. Больше того, при ограниченном диапазоне изменения входных и выходных переменных число возможных структур становится ограниченным. Возникает вопрос, какими свойствами обладают объекты из этого ограниченного (разрядными сетками входа и выхода) набора структур? В статье рассматриваются некоторые свойства нелинейных динамических объектов с дискретным временем.

1. СТРУКТУРА ИССЛЕДУЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

Рассмотрим объект вида

$$y_{n+1} = f(y_n, u_n), \qquad (1)$$

где y_n — выход объекта в n-м такте, u_n — вход объекта. На рис. 1 показана его схема, в соответствии с которой выход является нелинейным преобразованием $f(\cdot)$ входа и запаздывающего на один такт выхода. Некоторые аспекты идентификации объектов вида (1) были рассмотрены в работе [1]. Будем рассматривать только детерминированные объекты. Это означает, что переменные в скобках формулы (1) однозначно определяют значение выхода и никаких других, в том числе и случайных, переменных нет.

Частным случаем нелинейного объекта (1) является линейный объект первого порядка (инерционное звено)

$$y_{n+1} = ay_n + bu_n, \qquad (2)$$

где a и b — константы.

Без потери общности везде ниже будем предполагать все переменные двоичными. В этом случае в разрядах будут только значения 0 и 1, которые будут использоваться и как логические переменные.

Будем предполагать, что объект (1) цифровой, и его вход занимает s, а выход — q двоичных разрядов. Для объекта первого порядка (1) это означает, что на его входе действуют $s + q$ логических переменных. Соответственно, каждый разряд выхода определяется собственной логической функцией этих логических переменных. При таком предположении число возможных нелинейных преобразований ограничено.

Действительно, значение произвольного, например, i-го разряда выхода определяется следующей таблицей нелинейных преобразований (табл. 1).

Элементами этой таблицы являются только нули и единицы. Она содержит все (!) возможные значения входов. В правом столбце необходимо проставить значение первого разряда выхода для соответствующего входного вектора. Входной вектор — это строчка, состоящая из входа u_n и старого выхода y_n. Для каждого разряда выхода необходимо составить такую таблицу, q таких таблиц (по одной для каждого разряда выхода) полностью определяют произвольный нелинейный объект первого порядка (т. е. с глубиной памяти в один такт). Правый столбец в табл. 1 можно рассматривать как одно (2^{s+q})-разрядное число. Значение первого разряда этого числа обозначим через $Q1$, второго — $Q2$ и так далее, последнего — $Q2^{s+q}$. Набор из

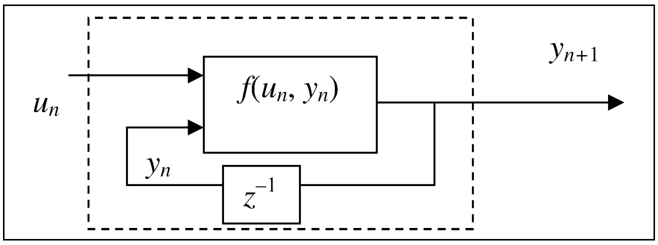

Рис. 1. Структура нелинейного динамического объекта

[1] Работа доложена на III Международной конференции “Идентификация систем и задачи управления” SICPRO’04, Москва, 2004.

Таблица 1

Таблица нелинейных преобразований для одного первого разряда выхода

n	u_n				y_n				y_{n+1}
	$u1$	$u2$	...	us	$y1$	$y2$	...	yq	$y1$
1	0	0	0	0	—	—	—	—	$y1(1)$
2	1	0	0	0	—	—	—	—	$y1(2)$
...	...	...	...	...	—	—	—	—	—
2^{x+q}	1	1	1	1	—	—	—	—	$y1(2^{x+q})$

2^{s+q} этих двоичных чисел полностью определяет произвольный нелинейный объект с единичной глубиной памяти.

Отсюда легко определить общее число N нелинейных объектов первого порядка с s-мерным входом и q-мерным выходом. В соответствии с теоремой Шеннона [2, 3]

$$N = 2^{q(2^{s+q})} \tag{3}$$

вариантов.

Для реальных цифр это громадное число. Например, если и на вход и на выход отводится по байту ($s + q = 16$), то $N \approx 10^{157\,000}$. Это число со 157 тысячами нулей (семьдесят страниц текста). При этом описание структуры любого конкретного объекта занимает не более $q2^{s+q}$ бит памяти. Для нашего примера это будет не более 64 Кбайт.

Очевидное свойство цифровых объектов вида (1) заключается в том, что возможные структуры сложных объектов (с большими s и q) включают в себя *все* возможные структуры более простых объектов (с меньшими s и q); т. е. простые структуры являются частью возможных структур более сложных объектов.

Для того чтобы попытаться установить закономерности в распределении структур нелинейных объектов, рассмотрим примеры моделирования поведения простых объектов.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ ОБЪЕКТОВ

2.1. Простейший объект

Пусть $s = 1$ и $q = 1$. В этом случае вход и выход принимают два значения 0 и 1. В соответствии с формулой (3) общее число вариантов будет равно 16.

Структуру объекта можно задавать с помощью таблицы соответствий, которая для конкретного объекта представлена в табл. 2. В первых двух столбцах содержатся все возможные варианты входных векторов, а в правом столбце — набор нулей и единиц, полностью определяющий структуру объекта.

Как показало моделирование, собственная реакция (при постоянном входе u = const) любой из 16-ти структур может быть только трех видов:

1) Y = 1, 1, 1;
2) Y = 0, 0, 0;
3) Y = 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0.

Все данные о реакции конкретных структур сведены в табл. 3, где в клетках приведены десять первых тактов реакции соответствующей структуры.

Как видно из табл. 3, нулевую собственную реакцию дают 50% всех возможных структур, единичную — 25 и 25% структур являются генераторами периодической последовательности с периодом в два такта. Других реакций нет. Отметим, что вид реакции зависит и от того, какой постоянный сигнал действует на входе в объект.

2.2. Простой объект

Рассмотрим простой объект, когда $s = 1$, $q = 2$. В этом случае вход принимает два значения 0 и 1, а выход четыре — 0, 1, 2, 3. В соответствии с формулой (3) общее число вариантов будет примерно 64 000. Даже для такого простого объекта оно необозримо велико.

Ограничимся поэтому исследованием только собственных движений объекта при нулевых начальных условий и нулевом входе. Число вариантов сократится до 256, а таблицы соответствий для

Таблица 2

Таблица соответствия

u_n	y_n	y_{n+1}
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Таблица 3

Реакции одноразрядного объекта

Структура объекта	Значение входа U	
	$U = 0$	$U = 1$
0000	0000000000	0000000000
0001	0000000000	0000000000
0010	0000000000	0101010101
0011	0000000000	0111111111
0100	0000000000	0000000000
0101	0000000000	0000000000
0110	0000000000	0101010101
0111	0000000000	0111111111
1000	0101010101	0000000000
1001	0101010101	0000000000
1010	0101010101	0101010101
1011	0101010101	0111111111
1100	0111111111	0000000000
1101	0111111111	0000000000
1110	0111111111	0101010101
1111	0111111111	0111111111

Таблица 4а

Таблица соответствий для первого разряда выхода

u_n	y_n		y_{n+1}
$u1$	$y1$	$y2$	$y1$
0	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	1	1	1

Таблица 4б

Таблица соответствий для второго разряда выхода

u_n	y_n		y_{n+1}
$u1$	$y1$	$y2$	$y1$
0	0	0	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	1	1	1

первого и второго разрядов выхода примут вид, показанный в табл. 4а, 4б.

Двоичные вектора в правых столбцах табл. 4а и 4б полностью определяют объект, его реакцию, его поведение и собственные движения. Нам удобно будет представлять числа в этих столбцах в восьмеричном виде. Конкретно в табл. 4а $Q1 = 03$, а в табл. 4б $Q2 = 13$. Эти числа изменяются в диапазоне от 00 до 17. Хотя существует 256 видов структур, разных видов собственных движений гораздо меньше. Выделим три группы реакций.

- Выход объекта остается равным нулю. Эту реакцию дают 64 структуры с номерами от 00-00 до 07-07 (см. далее табл. 5). Кстати, в эту группу входят и все линейные объекты, поскольку в соответствии с уравнением (2) при нулевом входе и нулевых начальных условиях выход будет тождественно равен нулю при любых параметрах a и b.
- Выход в асимптотике принимает постоянное значение 1, 2 или 3.
- Объект генерирует периодические последовательности с периодом w, равным 2, 3 или 4 тактам, и с амплитудой a, равной 1, 2 или 3.

Все реакции сведены в табл. 5, где 0 означает нулевую реакцию, C — постоянную реакцию, а V — периодическую последовательность.

Как видно из табл. 5, нулевые реакции составляют 25% всех структур, генераторы 40%, константы — 35%.

3. ПЕРИОД ГЕНЕРИРУЕМОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Примерно половина из 256-ти структур простейшего нелинейного объекта составляют генераторы, которые при нулевом входе и нулевых начальных условиях генерируют периодические последовательности с периодом от 2 до 4 тактов. Очевидно, что более сложные объекты (с большей глубиной памяти и большей разрядностью выхода) включают в себя и простейший объект. Таким образом, генераторы составляют неотъемлемую часть возможных нелинейных структур. При случайном выборе структуры из пространства возможных структур вероятность получить генератор равна 0,5 для простейшего нелинейного объекта. Неизвестно, как изменяется эта вероятность для более сложных объектов.

Сформулируем две теоремы.

Теорема 1. *Среди нелинейных объектов первого порядка с q двоичными разрядами выхода существуют генераторы последовательности с периодом 2^q.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим таблицу соответствий объекта с q-разрядным выходом (табл. 6).

Таблица 5

Таблица реакций

—	00	01	02	03	04	05	06	07	10	11	12	13	14	15	16	17
00	0	0	0	0	0	0	0	0	*V*	*V*	*V*	*V*	*C*	*C*	*C*	*C*
01	0	0	0	0	0	0	0	0	*V*	*V*	*V*	*V*	*C*	*C*	*C*	*C*
02	0	0	0	0	0	0	0	0	*V*	*V*	*V*	*V*	*C*	*C*	*C*	*C*
03	0	0	0	0	0	0	0	0	*V*	*V*	*V*	*V*	*C*	*C*	*C*	*C*
04	0	0	0	0	0	0	0	0	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
05	0	0	0	0	0	0	0	0	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*C*	*V*	*C*
06	0	0	0	0	0	0	0	0	*C*	C	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
07	0	0	0	0	0	0	0	0	*C*	*C*	*V*	*V*	*V*	*V*	*C*	*C*
10	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*C*	*C*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*C*
11	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*C*	*C*	*V*	*C*	*V*	*C*	*V*	*C*	*C*	*C*
12	*C*	*C*	*V*	*V*	*C*	*C*	*V*	*C*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*C*
13	*C*	*C*	*V*	*C*	*C*	*C*	*V*	*C*	*C*	*C*	*V*	*C*	*C*	*C*	*V*	*C*
14	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
15	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*C*	*V*	*C*	*V*	*C*	*V*	*C*	*V*	*C*
16	*C*	*C*	*V*	*V*	*C*	*C*	*V*	*V*	*V*	*C*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*	*V*
17	*C*	*C*	*V*	*C*	*C*	*C*	*V*	*C*	*C*	*C*	*V*	*C*	*C*	*C*	*V*	*C*

В ней содержится 2^q строк. В q столбцах её левой части записаны последовательно возрастающие значения входа объекта $y(n)$ от 0 до $2^q - 1$. Всего 2^q значений. В правой части записаны значения выхода $y(n + 1)$, соответствующего входу $y(n)$. Так как значения $y(n)$ в разных строках таблицы разные, то такая таблица будет непротиворечива; т. е. одинаковым значениям $y(n)$ слева (“причинам”) не будут соответствовать разные значения $y(n + 1)$ справа (“следствия”). Этой таблице соответствует объект, генерирующий пилообразный сигнал с периодом 2^q. Это и доказывает утверждение теоремы.

Кстати, старший разряд выхода y_{q-1} тоже будет иметь период 2^q.

Рассмотрим простейший объект q-го порядка с одноразрядным двоичным выходом. Такой объект описывается уравнением

$$y_{n+1} = f(y_n, y_{n-1}, ..., y_{n-q+2}, y_{n-q+1}).$$

Докажем утверждение относительно длины последовательности, которую могут генерировать такие объекты q-го порядка.

Теорема 2. Среди нелинейных объектов q-го порядка существуют генераторы двоичной последовательности с периодом 2^{q-1}.

Доказательство. Рассмотрим таблицу соответствий для объекта с q одноразрядными входами и одним одноразрядным выходом (табл. 7). Строку из q одноразрядных входов в её левой части можно рассматривать, как q-разрядный регистр сдвига, в котором информация в каждом такте продвигается справа налево.

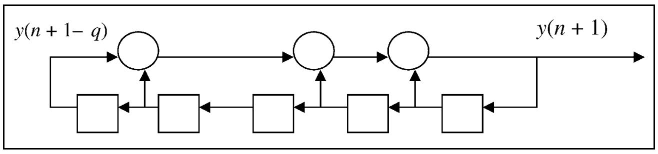

Рис. 2. Генератор двоичной последовательности

В теории кодирования применяются регистры сдвига для создания генераторов двоичных последовательностей [4]. На рис. 2 показана схема такого генератора, квадратами показаны регистры сдвига на один такт, а кружками — сумматоры по модулю 2. Доказано, что для любого числа регистров q существуют генераторы, выдающие псевдослучайную двоичную последовательность максимальной длины с периодом $2^q - 1$.

Если составить таблицу соответствий, учитывая алгоритм работы генератора, то полученный нелинейный объект будет генерировать последовательность максимальной длины. Таким образом, для любого числа сдвигов q существует таблица соответствий, эквивалентная нелинейному объекту, генерирующему последовательность длины $2^q - 1$. Что и требовалось доказать.

Таблица 6

Таблица соответствий для q-разрядного выхода

N	$y(n)$					$y(n+1)$				
	y_{q-1}	y_{q-2}	...	$y1$	$y0$	y_{q-1}	y_{q-2}	...	$y1$	$y0$
1	0	0	...	0	0	0	0	...	0	1
2	0	0	...	0	1	0	0	...	1	0
3	0	0	...	1	0	0	0	...	1	1
4	0	0	...	1	1	0	0	...	0	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
$2^q - 2$	1	1	...	0	1	1	1	...	1	0
$2^q - 1$	1	1	...	1	0	1	1	...	1	1
2^q	1	1	...	1	1	0	0	...	0	0

Таблица 7

Таблица соответствий для объекта q-го порядка

N	$y(n+1-q)$	$y(n+1-q)$	...	$y(n-1)$	$y(n)$	$y(n+1)$
1	0	0	...	0	0	1
2	0	0	...	0	1	0
3	0	0	...	1	0	1
4	0	0	...	1	1	0
...	...	...	...	...	...	...
$2^q - 2$	1	1	...	0	1	0
$2^q - 1$	1	1	...	1	0	1
2^q	1	1	...	1	1	0

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проблема выбора структуры нелинейного динамического объекта — наиболее сложная в теории идентификации. Ее решению, по-видимому, будет посвящено ближайшее десятилетие науки об управлении. Бурное развитие вычислительной техники, хотя и не упростило решения переборных задач (с которыми связан выбор структуры), но все же позволило решать многие практические задачи, которые были неразрешимы еще совсем недавно. Однако “нет ничего практичнее хорошей теории”, а ее пока нет. Надеемся, что эта работа будет небольшим кирпичиком в строящемся здании теории идентификации нелинейных динамических цифровых объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лотоцкий В. А., Чадеев В. М.* Полвека идентификации систем // Труды SICPRO’2000. — М.: Институт проблем управления, 2000.
2. *Shannon C. E.* The synthesis two-terminal switching circuits // Bell. System Techn. J. — 1949. Vol. 28.
3. *Shannon C. E.* A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits. Trans. of the AIEE. — 1938. Vol. 57. P. 713—773.
4. *Питерсон У.* Коды, исправляющие ошибки. — М.: Мир, 1964.

☎ *(095) 334-87-59*

E-mail: chavama@ipu.rssi.ru