

О ЕДИНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ

А.Г. БУТКОВСКИЙ

В крайне сжатой форме излагаются некоторые основные положения программы создания «Единой геометрической теории управления».

Цель настоящей работы – в предельно сжатой тезисной форме обрисовать некоторые результаты и дальнейшие перспективы работ по реализации программы создания «Единой геометрической теории управления» (ЕГТУ) – «Теории структур управления» (ТСУ) [1].

Эта программа возникла как естественное развитие и обобщение работ по управлению системами с распределенными параметрами, начатыми в Институте проблем управления в конце 1950-х гг., и по фазовому портрету дифференциальных включений [3, 4]. Естественность этого процесса, автор надеется, будет ясна из дальнейшего. Первоначальную формулировку программы можно найти в работе [2].

С другой стороны, программа создания ЕГТУ-ТСУ возникла как стремление осмыслить достижения современной математики и теоретической физики путем их сопоставления с современным состоянием и перспективами развития кибернетики и перенесением в нее этих достижений.

1. Под кибернетикой понимают науку об управлении, системах и информации. В частности, в ЕГТУ-ТСУ показывается, что триада *управление – информация – система* в определенном смысле может быть сведена к монаде *управление*.

Из математики в ЕГТУ-ТСУ берется учение о структурах, развитое в трудах школы Н.Бурбаки. Оно соединяется с учением о симметрии, причем симметрия рассматривается как наиболее общий метод исследования структур. Подчеркнем, что в ЕГТУ симметрия выдвигается именно как всеобщий метод исследования любых структур, а не как один из методов. Таким образом, сама математика в ЕГТУ определяется не только как наука о структурах, но и как наука о структурах и их симметриях. Но в природе нет симметрий, точнее, точных симметрий. В лучшем случае мы находим приближенные симметрии с той или иной степенью точности.

Отметим, что понятия *управление* и *информация* связаны с понятием *система*, а сами понятия *сис-*

тема и *система с управлением* получают точную логическую основу. При этом имеет место следующая цепочка отождествлений:

предикат – отношение – структура – пространство – система – модель.

Далее, из теоретической физики в ЕГТУ берутся идеи и методы локальной калибровочной инвариантности и спонтанного нарушения симметрии, а также соответствующий этим методам математический аппарат современной геометрии, в частности, теории расслоений. Понятие «система с управлением» теперь описывается с помощью понятия *расслоение*. При этом роль пространства состояний системы с управлением играет база расслоения, управляющие параметры – это элементы слоев расслоения, связанные с точками (элементами) базы, управление – это связность в расслоении, т. е. правило перехода от слоя к слою, синтезирующая функция (обратная связь) системы с управлением – это сечение расслоения.

В таком отождествлении кибернетических и математических понятий получает «управленческий смысл» фундаментальная аксиома Э. Цермело или аксиома выбора [5]. Оказывается, что функцию выбора в этой аксиоме можно отождествить с синтезирующей функцией или обратной связью в системе с управлением. В этих терминах аксиома Э. Цермело формулируется следующим образом: «в любом расслоении существует его сечение» или, аналогично, «для любой системы с управлением существует ее синтез».

2. Не следует думать, что ЕГТУ-ТСУ носит только теоретический характер и имеет только отдаленное или косвенное отношение к актуальным практическим проблемам. Скорее наоборот! Потребность в создании ЕГТУ-ТСУ родилась из стремления решать именно очень актуальные проблемы новейших технологий, например:

- создание распределенных регуляторов для стабилизации объектов плазменного типа;



- создание методов и средств генерации и управления когерентными полями, например, лазерного излучения и управления системами на квантовом уровне;
- создание методов целенаправленного синтеза композитных материалов;
- создание активных и интеллектуальных распределенных сред типа нейронных сетей и др.

К сожалению, для решения всех этих проблем в настоящее время почти полностью отсутствуют какие-либо действенные общие подходы, методы и принципы, за исключением лишь отдельных, довольно разрозненных и весьма частных результатов, и каждый такой результат рассматривается как значительное изобретение.

Указанные проблемы являются очень трудными научно-техническими проблемами, но они имеют первоочередное значение для общества. Отсюда ясно, что задача построения соответствующих теорий очень важна, но, к сожалению, далеко нетривиальна. Например, качественная теория дифференциального включения (системы с управлением) второго порядка существенно сложнее теории дифференциального уравнения того же второго порядка, не говоря уже о более высоких порядках. Но сейчас определились хотя бы точные термины, в которых эти труднейшие задачи могут описываться.

3. Другое практическое значение ЕГТУ-ТСУ связано с проблемой создания баз научных знаний для обучения школьников, студентов, аспирантов, преподавателей и для повышения уровня квалификации специалистов.

Уже сейчас намечается программа создания «структурированных энциклопедий» (СЭ) по теории управления и математике.

Идея СЭ основывается на возможности четкого выделения математических структур как элементарных блоков знания и указания четких связей-взаимодействий между ними, за счет чего можно строить более сложные структуры и вообще развивать их сколь угодно далеко.

Практическая реализация СЭ будет осуществляться путем создания соответствующего автоматизированного компьютерного обеспечения, например, в виде гипертекстовых сред.

В СЭ содержатся три концентратора для трех уровней пользователей: 1) школьников, студентов, любителей; 2) аспирантов, преподавателей, специалистов; 3) профессионалов-разработчиков и исследователей высшего уровня.

4. Содержательный смысл ЕГТУ-ТСУ состоит в том, что она направлена на решение проблемы управления структурами и симметриями. Дело в том, что в природе структуры и симметрии меняются спонтанно, в обществе структуры также чаще все-

го меняются спонтанно (например, путчи и революции) с плохо предсказуемым исходом и реже — путем четкого планирования реформ и способов их реализации. Однако до сих пор теория управления в подавляющем большинстве своих задач занималась лишь управлением состояниями, причем в фиксированных, уже заданных, неизменных системах, т. е. в системах с фиксированными структурами и соответствующими фиксированными симметриями.

Так как структура во многих случаях может быть описана отображениями (функциями), то в ЕГТУ-ТСУ речь идет об управлении отображениями.

Отсюда понятна та естественность, о которой говорилось в п. 1. Ведь теория управления системами с распределенными параметрами как раз и занимается проблемами управления всевозможными распределениями тех или иных физических и других величин (температур, концентраций веществ, механических напряжений и т. д. и т. п.), которые математически описываются соответствующими функциями (отображениями).

5. Для разработки ЕГТУ-ТСУ отсюда, прежде всего, возникла задача заново пересмотреть и математически точно определить самые фундаментальные концепции современной теории управления: «Что такое управление?», «Что такое система?», «Что такое обратная связь?», «Что такое оптимальное управление?» и др. В ЕГТУ-ТСУ задачи ставятся так, что смысл ответов на эти вопросы должен состоять в том, чтобы указать, какие в точности математические структуры и симметрии ответственны или соответствуют терминам теории управления (ТУ). Задача оказалась непростая. Пришлось вникать в ряд «нетрадиционных» для ТУ разделов современной математики — от логики и теории множеств до современных инвариантных форм теории дифференциальных уравнений, теории интегрируемости, топологии и теории алгебраических систем (например, решеток в смысле Биркгофа и алгебраических систем в смысле Мальцева).

Конечно, в современной ТУ существуют определения всех упомянутых понятий, но они все «неинвариантны», т. е. зависят от конкретных способов их описания, целевого назначения и т. д. Другими словами, в ТУ эти фундаментальные понятия даются, по сути дела, лишь на примерах в рамках конкретного описания, например, с помощью обыкновенных дифференциальных, разностных или интегральных уравнений. Предыдущий опыт и примеры не экстраполируются на более сложные случаи, которые даже заранее трудно предусмотреть.

6. Чтобы понять, какого сорта конкретные исследования надо проводить, перечислим очень коротко некоторые результаты, уже полученные в рамках реализации программы создания ЕГТУ-ТСУ.

6.1. Открытие и разработка понятия «фазовый портрет дифференциального включения» как обобщения широко известного понятия «фазовый портрет обыкновенного дифференциального уравнения».

6.2. Представление уравнений с частными производными как включения для дифференциальных форм, что является практически неизученным объектом в математике.

Такое представление показало, что и сплошные среды могут быть рассмотрены как системы с управлением, хотя, на первый взгляд, в них не видно никаких управлений или управляющих параметров.

6.3. Для широкого класса уравнений математической физики и их подкласса — уравнений с частными производными — показано, что их изучение может быть сведено к изучению соответствующих систем управления, описываемых обыкновенными дифференциальными включениями в пространстве состояний малой размерности, всего 2–4, что соответствует размерности физического пространства — времени, где определена сплошная среда или поле.

В силу малой размерности для исследования таких систем можно применить наглядные графические методы теории фазового портрета дифференциальных включений, упомянутые выше.

6.4. Установлено, что для каждой системы из широкого класса систем с управлением, в частности, систем, описываемых дифференциальными включениями, имеются три её собственные структуры:

- собственная структура управляемости-достижимости (структура Калмана);
- собственная структура финитного управления (структура Монжа или структура фазового портрета дифференциального включения);
- собственная структура оптимального управления как вторичная метрическая структура.

Можно считать, что каждая последующая из этих структур вложена в предыдущую.

Выяснение свойств оптимального управления привело к установлению нового принципа распространения света:

«Свет в природе распределяется так, что, начав испускаться источником, в каждый последующий момент времени он (свет) занимает область пространства (область освещенности) *наибольшего* возможного объема (меры) по сравнению с объемом (мерой) того множества точек пространства, куда он бы мог попасть виртуально, т. е. без нарушения ограничений на скорость его распростране-

ния в любой точке пространства и в любом направлении.

Более того, скорость приращения объема (меры) области освещенности также максимальна в каждый момент времени по сравнению со всеми другими допускаемыми скоростями».

Здесь, вообще говоря, речь идет о возбуждениях очень широкого класса в природе в неоднородной и анизотропной среде, свойства которой подобны свойствам пространства состояний управляемых дифференциальных систем. Речь здесь идет о дальнейшем развитии принципа Гюйгенса.

Этот принцип замечателен тем, что в отличие от известного принципа Ферма, в нем не используются лучевые представления о свете, что может очень сильно повысить точность измерений в различных экспериментах со светом или другими возбуждениями в сплошных средах, ибо объемы могут измеряться точнее линейных размеров.

6.5. В терминах определенных алгебраических структур сформулирована аксиоматика понятия *управление*. Сформулирована абстрактная задача оптимального управления, охватывающая широкий класс известных задач. Для нее введено естественно возникающее понятие *вторичной метрики*, в терминах которой сформулирован и доказан ряд теорем, дающих необходимые и достаточные условия оптимальности.

6.6. В применении к системам управления, наделенным дифференциальной структурой, в инвариантном виде (с помощью дифференциальных форм) сформулированы теоремы о многомерном принципе максимума, дающие необходимое и отдельно достаточное условия оптимальности общей дифференциальной системы. Теорема о достаточных условиях доказана. Доказательство теоремы о необходимых условиях не окончено, и оно представляется очень трудным, по-видимому, из-за отсутствия принципиально необходимых для этого понятий, которые еще предстоит найти.

В работе над этими теоремами обнаружена связь с фундаментальным физическим тензором энергии поля (импульса, момента и т. д.), а именно: в оптимальном управлении след этого тензора достигает максимума на значении, равном нулю.

6.7. Поставлена и разрабатывается задача об интегрируемости дифференциально-форменного включения и о нахождении его областей интегрируемости. Это также новая и очень трудная задача.

6.8. Установлено, что геометрически понятие *система с управлением* можно отождествить с понятием *расслоение*, где множество локальных состояний — это база расслоения; множества значений управления (зависящие от локальных состояний) — это слои расслоения (возможно, не идентичные); управление — это связность в этом



расслоении; синтез (обратная связь) — сечение расслоения.

6.9. В рамках общеполитического и методологического осмысления ЕГТУ-ТСУ сформулированы два общих принципа.

- Первый принцип назван *принципом (законом) стопроцентной эффективности математики*, суть которого очень коротко состоит из двух утверждений — прямого и обратного:

«Для любой реальности (явления, процесса и т. д.) и любой наперед заданной (но не абсолютной) точности существует математическая структура, которая описывает эту реальность с этой точностью, и, *обратно*, для любой математической структуры и любой точности существует реальность, которая описывается этой структурой с этой точностью».

Иными словами, здесь утверждается, что существует своего рода «гомоморфизм», сколь угодно близкий к «изоморфизму» между реальностями и математикой, ее структурами.

Важно отметить, что этот принцип, по сути, выражает расхожее понятие «прикладная математика», которая не есть какая-то «другая» математика, отличная от «чистой», такой математики просто не существует, ибо математика — это единая наука. К сожалению, здесь еще происходят недоразумения и путаницы. Термин «прикладная математика» надо понимать как обозначение способов и видов применения математики к описанию реальности.

- Второй принцип назван нами *управленческой парадигмой мира*.

Коротко он состоит в следующем: «Все существующие в мире структуры поддерживаются (сохраняются), пока и поскольку их поддерживают (сохраняют) соответствующие им регуляторы обратной связи, при этом наблюдаемые флуктуации (присущие всем величинам) есть не что иное, как *ошибки* этого регулирования (в смысле теории регулирования)».

Таким образом, здесь еще дается толкование происхождения такого всеобщего и загадочного явления как *флуктуации*, которым подвержены все без исключения наблюдаемые величины.

Отсюда, в частности, следует, что «порядок надо не наводить», как часто мы слышим, а «порядок надо поддерживать» путем постоянного (перманентного) регулирования (управления).

Управленческая парадигма мира говорит нам о том, что любая искусственная структура может быть воссоздана. Для этого нужно создать лишь подходящую систему её поддержания, например, соответствующую активную сплошную среду. В этом смысле можно менять «законы природы». Правда, делать это надо весьма осторожно и осмотрительно, не забывая обеспечить еще ряд других, так называемых, «инфраструктур», которые должны со-

провождать работу «основной» структуры. Например, создав основную транспортную структуру (самолет, поезд, автомобиль), мы еще с необходимостью должны позаботиться о создании ряда сопровождающих её инфраструктур, обеспечивающих безопасность, комфортность и др.

В частности, в работе [1] показаны два замечательных применения принципа управленческой парадигмы мира. Один старый принцип связан с построением решающих усилителей, основанных на глубокой обратной связи (!), применяемый, в частности, в моделирующих установках. Другой принцип — это относительно новый принцип [1], предназначенный для оригинального вычисления решений новых краевых задач для уравнений математической физики.

7. В связи с обсуждением ЕГТУ-ТСУ почти невозможно не упомянуть важнейшие категории, имеющие общечеловеческий и гуманитарный смысл: философия, логика, математика, кибернетика, постиндустриальная эпоха, культура, цивилизация, воспитание, образование.

Философия — это наука о смысле всего сущего.

Логика — это наука о формах смысла и способах, языках его выражения.

Математика — это наука, доставляющая нам наиболее общий и точный научный язык для выражения форм смысла. Это определение математики, как сложной реальности, не исключает многие другие ее определения, в том числе и то ее определение, которым мы руководствовались при работе над ЕГТУ-ТСУ. По этому определению математика — это наука о структурах и симметриях, причем симметрия является наиболее общим и наиболее мощным способом изучения структур; более того, симметрия какой-либо структуры, в свою очередь, имеет свою собственную структуру, которая также может изучаться с помощью симметрии и т. д. Эту ситуацию можно отразить схемой:

$$\begin{aligned} & \text{структура } A \rightarrow \text{симметрия } B \text{ структуры } A \rightarrow \\ & \rightarrow \text{структура } A_1 \text{ симметрии } B \text{ структуры } A \rightarrow \\ & \rightarrow \text{симметрия } B_1 \text{ структуры } A_1 \text{ симметрии } B \\ & \text{структуры } A \rightarrow \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Кибернетика, в том смысле, как мы ее рассматривали выше, — это наука об управлении, информации и системах.

В философии ЕГТУ-ТСУ принимается, что всё сущее, называемое реальностью, невообразимо и неисчерпаемо сложно и является выражением Божественного начала и не является познаваемым «до конца». «Бог — везде» — гласит старая латинская поговорка. Другая латинская поговорка гласит, что «Бог сохраняет все». Управленческая парадигма мира говорит нам о том, что это сохранение осу-

ществляется путем автоматического регулирования как действия обратной связи.

8. Постиндустриализация, глобализация, цивилизация, культура, образование, воспитание.

Постиндустриализация и глобализация стали важными, часто решающими факторами жизни от государств до отдельного человека. Они характеризуются появлением чрезвычайно мощных усилителей различных воздействий. Например, небольшая группа людей может терроризировать весь мир. Из теории управления известно, что большие коэффициенты усиления способствуют неустойчивости системы. Возникает трудная задача – стабилизировать большую и сложную систему.

У людей образуется много свободного времени и возможностей, которые могут использоваться не на благо и не с добрыми намерениями. Поэтому возникают очень важные проблемы культуры и воспитания детей. Здесь надо очень хорошо понимать смысл этих понятий и дополнительных к ним понятий: цивилизации и образования. Очень кратко можно сказать следующее.

Цивилизация – это сумма знаний, технологий производств, включая ремёсла, искусства, науку.

Культура – цели и способы применения и использования достижений цивилизации. Важно подчеркнуть, что цивилизация и культура – это разные вещи, но в идеале они должны быть согласованы, ибо, например, высокий уровень цивилизации при низком уровне культуры – опасен.

Условно можно указать следующие пропорции:

$$\frac{\text{культура}}{\text{цивилизация}} = \frac{\text{воспитание}}{\text{образование}},$$

$$\frac{\text{культура}}{\text{воспитание}} = \frac{\text{цивилизация}}{\text{образование}}.$$

Самое главное производство в человеческом обществе – это воспроизводство самого человека. Его воспитание соотносится с культурой, а образование – с цивилизацией.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабичев А.В., Бутковский А.Г., Похиолайнен С.* К единой геометрической теории управления. – М.: Наука, 2001.
2. *Butkovskiy A.G.* Towards the Unified Geometric Theory of Differential Systems with Control. // XI Herbstschule «Variation-srechnung, optimale Prozesse und Anwendungen. Plenary Session». (13–18 Sept. 1993, Stralsund Germany «Variation-srechnung, Optimale Prozesse und Anwendungen»). Preprint-Reihe Mathematik Greifswald, Germany. 1994. № 1. P. 5–8.
3. *Бутковский А.Г.* Фазовые портреты управляемых динамических систем. – М.: Наука, 1985. – 137 с.
4. *Butkovskiy A.G.* Phase Portraits of Control Dynamical Systems (Differential Inclusions). Dordrecht (Boston) London: Kluwer Academic Publishers. 1991. – 170 p.
5. *Бутковский А.Г.* Что такое управление с точки зрения аксиомы выбора Цермело // Автоматика и телемеханика. 2000. № 7. С. 182 – 185.

☎ (095) 334-76-90

E-mail:butkovsk@ipu.rssi.ru



ABSTRACTS

Pranghishvili I.V.

SYSTEM APPROACH, SYSTEM THOUGHT AND ENTROPIZATION OF FUNDAMENTAL KNOWLEDGE

The paper considers various aspects of systemology, discusses the features of system thought and analyzes the principles of entropization of scientific knowledge. Basic statements are illustrated with examples. – P. 3.

Butkovsky A.G.

ON THE UNIFIED GEOMETRICAL THEORY OF CONTROL

The paper presents in a very condensed form some basic ideas of the program for creating the Unified Geometrical Theory of Control. – P. 8.