УДК 519.2

КВАНТИЛЬНОЕ ХЕДЖИРОВАНИЕ ОПЦИОНОВ ЕВРОПЕЙСКОГО ТИПА НА НЕПОЛНЫХ РЫНКАХ БЕЗ ТРЕНИЯ. Ч. 1. Суперхеджирование

О.В. Зверев, В.М. Хаметов

Рассмотрено решение задачи расчета европейского опциона с квантильным критерием на неполном рынке с дискретным временем. Обоснована методика расчета европейского опциона с квантильным критерием относительно любой меры из класса эквивалентных. Приведен иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: европейский опцион, квантильное хеджирование, суперхеджирующий портфель, неполный рынок, опциональное разложение.

ВВЕДЕНИЕ

Теории хеджирования опционов европейского типа на полных и неполных рынках без трения посвящено большое количество работ, например, [1—3] и др. Она обосновывает возможность достоверного исполнения (репликации) платежного обязательства. Одна из основных проблем этой теории заключается в том, что на неполном рынке эмитенту неизвестно распределение вероятностей последовательностей цен рисковых активов. По этой причине была разработана теория суперхеджирования (см., например, работы [1—3]), которая утверждает, что репликация платежного обязательства относительно любой вероятностной меры из класса эквивалентных мартингальных мер возможна, если использовать суперхеджирующие портфели. Предложен и обоснован минимаксный подход к решению задачи суперхеджирования и минимаксного хеджирования европейского опциона на неполном рынке без трения, приведены примеры, которые допускают явное решение этой задачи [4, 5]. Известно [1—5], что стоимость опциона на неполном рынке при использовании суперхеджирования или минимаксного хеджирования «высокая» поскольку совпадает с верхней границей спрэда опциона [2]. Отметим, если платежное обязательство исполняется с вероятностью, меньшей единицы, то следует ожидать, что стоимость такого опциона уменьшится, поскольку владелец опциона берет «часть» рисков «на себя». Такая процедура хеджирования получила название квантильного хеджирования. Настоящая статья посвящена теории квантильного хеджирования на неполных рынках без трения и развивает идеи работ [4, 5].

Перейдем к обзору работ других авторов. В работах [6, 7] рассматривалась задача расчета европейского опциона на одномерном безарбитражном полном рынке без трения. Предложена процедура расчета опциона с квантильным критерием на полном биномиальном рынке [6], которая основана на использовании S-представления [2] платежного обязательства и некоторого ограниченного мартингала. Для платежного обязательства такого, что цена опциона строго положительна, построено решение задачи квантильного хеджирования на полном рынке без трения [7].

В работах [3, 8—10] рассматривалась задача квантильного хеджирования в статической постановке. Показано, что она сводится к решению пары двойственных экстремальных задач. Для их формулировки нам потребуются обозначения: π — самофинансирующий портфель, SF — множество самофинансирующих портфелей, $X_N^{(\pi)}$ — капитал портфеля π в момент времени N, $X_0^{(\pi)}$ —

стоимость опциона, f — платежное обязательство, $\{\omega \in \Omega\colon X_N^{(\pi)} \ge f\}$ — множество успешного хеджирования. Приведем формулировки этих экстремальных задач: *прямая задача* — максимизация вероятности успешного хеджирования при условии, что стоимость опциона не превосходит некоторой величины $x_0 > 0$:

$$P(X_N^{(\pi)} \ge f) \to \max_{\pi \in SF,\, X_0^{(\pi)} \le x_0}; \qquad (1)$$

двойственная задача — минимизация стоимости опциона при условии, что вероятность успешного хеджирования не меньше величины $1 - \varepsilon$, где любое $\varepsilon \in (0, 1)$

$$X_0^{(\pi)} \to \min_{\pi \in SF,\, P(X_N^{(\pi)} \ge f) \ge 1 - \varepsilon}. \qquad (2)$$

Установлены условия существования решений указанных прямой и двойственной задач. Отметим, что доказательство существования их решения сводится к применению леммы Неймана — Пирсона [2].

В работах [11, 12], в предположении что рынок одномерный, неполный с горизонтом равным двум, а доходность рискового актива равномерно распределена, доказано, что задача квантильного хеджирования может быть сведена к задаче максимизации вероятности успешного хеджирования платежного обязательства при некоторых дополнительных ограничениях геометрического характера.

В работах [13, 14] описана процедура последовательного хеджирования для американского опциона-колл с конечным горизонтом для рынка Блэка — Шоулса. Известно [2], что в этом случае американский опцион эквивалентен опциону европейского типа с таким же горизонтом. Предложенная в работе [13] процедура хеджирования «похожа» на квантильное хеджирование.

Для одномерного полного рынка с горизонтом, равным единице, установлено, что задача квантильного хеджирования в некоторых случаях может быть сведена к задаче частично целочисленного программирования [15].

В настоящей работе, носящей теоретический характер, решается задача построения квантильного суперхеджирующего портфеля. Доказывается, что она может быть сведена к решению двух задач — задачи построения суперхеджирующего портфеля европейского опциона на многомерном неполном рынке без трения с заданным (исходным) платежным обязательством и задачи построения на том же рынке суперхеджирующего портфеля европейского опциона с платежным обязательством, равным индикатору множества дополнительного к множеству успешного хеджирования. Доказывается, что решение задачи квантильного суперхеджирования совпадает с решением задачи минимаксного хеджирования европейского опциона с платежным обязательством, равным разности между (исходным) платежным обязательством и стоимости опциона для исходного платежного обязательства, умноженного на индикатор множества, дополнительного к множеству успешного хеджирования.

1. ОПИСАНИЕ И ОБОСНОВАНИЕ МИНИМАКСНОГО ПОДХОДА. УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ МИНИМАКСНОГО СУПЕРХЕДЖИРУЮЩЕГО ПОРТФЕЛЯ ЕВРОПЕЙСКОГО ОПЦИОНА НА МНОГОМЕРНОМ НЕПОЛНОМ РЫНКЕ БЕЗ ТРЕНИЯ

1.1. Введем необходимые обозначения. Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, F, (F_t)_{t \in N_0}, P\}$, где $N_0 = \{0, 1, 2, ..., N\}$, а $N < \infty$ — горизонт, задана d-мерная ($d < \infty$) согласованная, случайная последовательность, обозначаемая $(S_t, F_t)_{t \in N_0}$, которая описывает эволюцию стоимости d рисковых активов. Вероятностную меру P называют базовой [2]. Известно [2], что любая согласованная последовательность $(S_t, F_t)_{t \in N_0}$ является семимартингалом. Без ограничения общности можно считать, что для любого $t \in N_0$ $F_t = \sigma(S_u, u \le t)$. Предполагаем, что имеется один безрисковый актив, доходность которого равна нулю, а его начальная стоимость равна единице. Такой набор активов называют $(1, S^{(1)}, ..., S^{(d)})$-рынком [2].

Пусть $f_N\colon R^{d(N+1)} \to R^1$ — борелевская функция, обозначаемая $f_N(x_0, ..., x_N)$. Пусть $f_N(S.) \triangleq f_N(x_0, ..., x_N)|_{x_i = S_i,\, i = \overline{0, N}}$; F_N — измеримую случайную величину $f_N(S.)$ называют платежным обязательством европейского опциона с моментом исполнения N [2].

Чтобы не загромождать формулировки приводимых далее утверждений условиями, связанными с интегрируемостью случайной величины $f_N(S.)$, мы предполагаем, что $f_N(x_0, ..., x_N)$ — ограниченная функция.

Пусть на фильтрованном измеримом пространстве $(\Omega, F, (F_t)_{t \in N_0})$ заданы вероятностные меры Q, эквивалентные мере P ($Q \sim P$). Множество таких вероятностных мер Q обозначим через $\Re_N$. Без ограничения общности можно считать, что $P \in \Re_N$.

Пусть $\gamma_0^N \triangleq \{\gamma_t\}_{t \in N_0}$ — d-мерная F-предсказуемая последовательность, которую назовем стратегией эмитента опциона, а γ_t — управлением в момент времени $t \in N_0$. Отметим, что i-я ($i \in \{1, ..., d\}$) компонента вектора управлений γ_t в момент времени $t \in N_0$ имеет экономическую интерпретацию количества i-го рискового актива в момент времени $t \in N_0$ [2]. Множество таких стратегий обозначим через U_1^N. Пусть $\bar{U}_1^N$ — любое подмножество U_1^N. Через $\bar{U}_{t_k}^{t_l}$, где $t_k, ..., t_l \in N_1$, $N_1 \triangleq \{1, ..., N\}$, и $t_l > t_k$, обозначим сужение множества $\bar{U}_1^N$ на $t_k, ..., t_l \subseteq N_1$ и будем использовать обозначение $\gamma_{t_k}^{t_l} \in \bar{U}_{t_k}^{t_l}$, где $\gamma_{t_k}^{t_l} = \{\gamma_{t_k}, ..., \gamma_{t_l}\}$.

1.2. Приведем обоснование минимаксного подхода к решению задачи хеджирования для случая экспоненциальной функции полезности.

Пусть $\Theta(S.) \triangleq \sum_{i=1}^{N} (\gamma_i, \Delta S_i)$, где $\Delta S_t \triangleq S_t - S_{t-1}$, а $(\cdot, \cdot)$-скалярное произведение в R^d. Очевидно, что $\Theta(S.)$ является F_N-измеримой случайной величиной, экономический смысл которой — выручка, полученная эмитентом в результате управления рисковыми активами. Пусть $l(S.) \triangleq \Theta(S.) - f_N(S.)$ также F_N-измеримая случайная величина, экономический смысл которой — доход, полученный эмитентом в результате управления рисковыми активами.

Пусть φ: $R^1 \to R^+$ — функция полезности эмитента — экспоненциальная, $\varphi(x) \triangleq 1 - e^{-x}$, и зависит от дохода, т. е. $\varphi(l(S.)) \triangleq \varphi(x)|_{x = l(S.)}$ — полезность дохода эмитента.

Сформулируем наши предположения:

— эмитенту неизвестно распределение вероятностей последовательности цен рисковых активов,

— эмитент разумен в следующем смысле: а) он предполагает, что распределение цен рисковых активов минимизирует его ожидаемую полезность; б) он максимизирует ожидаемую полезность путем выбора соответствующей стратегии γ_1^N.

Определение 1 [4]. Стратегию γ_1^N назовем допустимой, если выполняется неравенство

$$\sup_{Q \in \mathfrak{R}_N} E^Q\left[\exp\left\{-\sum_{i=1}^{N} (\gamma_i, \Delta S_i)\right\}|F_0\right] < \infty. \ \blacklozenge$$

Множество допустимых стратегий обозначим D_1^N.

Предположения приводят нас к задаче

$$E^Q\varphi(l(S.)) \to \sup_{\gamma_1^N \in D_1^N} \inf_{Q \in \mathfrak{R}_N}. \qquad (3)$$

Так как функция полезности экспоненциальная, то из выражения (3) следует

$$\sup_{\gamma_1^N \in D_1^N} \inf_{Q \in \mathfrak{R}_N} E^Q\varphi(l(S.)) = \sup_{\gamma_1^N \in D_1^N} \inf_{Q \in \mathfrak{R}_N} E^Q(1 - e^{-l(S.)}) =$$

$$= 1 - \sup_{\gamma_1^N \in D_1^N} \inf_{Q \in \mathfrak{R}_N} E^Q\left[\exp\left\{f_N(S.) - \sum_{i=1}^{N} (\gamma_i, \Delta S_i)\right\}\right].$$

Задача (3) эквивалентна минимаксной задаче

$$E^Q\left[\exp\left\{f_N(S.) - \sum_{i=1}^{N} (\gamma_i, \Delta S_i)\right\}\right] \to \sup_{\gamma_1^N \in D_1^N} \inf_{Q \in \mathfrak{R}_N}. \qquad (4)$$

Известно [3], что каждой функции полезности $\varphi(x)$ можно поставить в соответствие функцию риска $\psi(x)$ следующим образом: $\psi(x) = -\varphi(-x)$, поэтому задача (4) имеет следующую интерпретацию — эмитент разумен: а) он предполагает, что распределение вероятностей цен рисковых активов максимизирует его ожидаемый риск; б) выбирает такую стратегию γ_1^N которая минимизирует максимальный ожидаемый риск.

Выбор экспоненциальной функции полезности обусловлен возможностью применения к задаче (4) стохастического варианта метода динамического программирования. Отметим, что решение задачи (4) было получено в работе [4].

1.3. Для описания решения задачи (4) нам понадобятся следующие обозначения и определения из работы [4].

Через $D_{t_k}^{t_l}$, где $t_k, ..., t_l \in N_1$, $t_l \in N_1$, и $t_l > t_k$, обозначим сужение множества D_1^N на $t_k, ..., t_l \subseteq N_1$. Пару $(Q, \gamma_{t+1}^N) \in \mathfrak{R}_N \times D_{t+1}^N$ назовем t-бистратегией, $t \in N_1$, $(Q, \gamma_1^N) \in \mathfrak{R}_N \times D_1^N$ — бистратегией, а $\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N$ — t-стратегией. Оценкой t-бистратегии $(Q, \gamma_{t+1}^N) \in \mathfrak{R}_N \times D_{t+1}^N$, $t \in N_1$, назовем F_t-измеримую случайную величину, обозначаемую через $I_t^{Q, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$ и определяемую равенством

$$I_t^{Q, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t) = E^Q\left[\exp\left\{f_N(S.) - \sum_{i=t+1}^{N} (\gamma_i, \Delta S_i)\right\}|F_t\right],$$

где $E^Q[\cdot|F_t]$ — условное математическое ожидание относительно меры $Q \in \mathfrak{R}_N$ и σ-алгебры F_t. Оценка t-бистратегии $I_t^{Q, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$ имеет экономический смысл ожидаемого, относительно некоторой меры $Q \in \Re_N$, риска эмитента, когда он применяет t-стратегию γ_{t+1}^N.

Пусть $\{\beta_t\}_{t \in N_0}$ — F-предсказуемая, одномерная последовательность, элемент β_t которой интерпретируют как количество безрискового актива в момент времени $t \in N_0$. Последовательность пар $\pi = \{\beta_t, \gamma_t\}_{t \in N_0}$ называют портфелем [2]. Капиталом портфеля π [2] в момент времени $t \in N_0$ на $(1, S^{(1)}, ..., S^{(d)})$-рынке называют F_t-измеримую, случайную величину $X_t^\pi = \beta_t + (S_t, \gamma_t)$.

Портфель π называют самофинансирующим, если для любого $t \in N_1$, выполнены равенства P-п. н.

$$\begin{cases} \Delta\beta_t + (S_{t-1}, \Delta\gamma_t) = 0, \\ \beta_t|_{t=0} = \beta_0, \end{cases}$$

где $\Delta\gamma_t \stackrel{\Delta}{=} \gamma_t - \gamma_{t-1}$. Множество самофинансирующих портфелей обозначают SF.

Согласованную возрастающую последовательность $C = \{C_t, F_t\}_{t \in N_0}$ с $C_t|_{t=0} = 0$ называют потреблением [2]. Набор (π, C) называют портфелем с потреблением [2, 4]. Капитал портфеля с потреблением (π, C) в момент времени $t \in N_0$, обозначаемый $X_t^{(\pi, C)}$, определим равенством $X_t^{(\pi, C)} = X_t^\pi - C_t$.

Определение 2 [2]. Согласованная последовательность случайных величин $\xi = \{\xi_t, F_t\}_{t \in N_0}$ называется локальным мартингалом относительно меры Q, если $E^Q[\xi_t|F_{t-1}) = \xi_{i-1}$ Q-п. н. При этом меру Q называют мартингальной. ♦

Множество мартингальных мер [2] обозначим через m_N.

Определение 3 [2]. $(1, S^{(1)}, ..., S^{(d)})$-рынок назовем безарбитражным, если для каждого самофинансирующего портфеля π, капитал которого удовлетворяет условию: если из того, что для любого $t \in N_0$ $P(X_t^\pi \geq 0 \mid X_0^\pi = 0) = 1$, следует, что $P(X_N^\pi = 0 \mid X_0^\pi = 0) = 1$.

Замечание 1. Если $|\Re_N \cap m_N| \neq \varnothing$, то легко показать, аналогично работе [2], что $(1, S^{(1)}, ..., S^{(d)})$-рынок без трения будет безарбитражным.

Определение 4 [2]. Безарбитражный $(1, S^{(1)}, ..., S^{(d)})$-рынок без трения называется неполным, если мощность множества $\Re_N \cap m_N$ больше единицы, т. е. $|\Re_N \cap m_N| > 1$. Если $|\Re_N \cap m_N| = 1$, то такой $(1, S^{(1)}, ..., S^{(d)})$-рынок без трения называют полным.

Определение 5 [2]. Самофинансирующий портфель с потреблением (π, C) на $(1, S^{(1)}, ..., S^{(d)})$-рынке без трения в задаче расчета европейского опциона с платежным обязательством $f_N(S.)$ назовем суперхеджирующим, если в момент времени N выполняется неравенство $f_N(S.) \leq X_N^{(\pi, C)}$ P-п. н.

Определение 6 [2]. Суперхеджирующий портфель с потреблением (π, C) назовем совершенным, если

$$f_N(S.) = X_N^{(\pi, C)} \quad P\text{-п. н.}$$

Определение 7 [4]. Совершенный суперхеджирующий портфель с потреблением (π^*, C^*), капитал которого в момент времени $t \in N_0$ равен $X_t^{(\pi^*, C^*)}$, назовем минимальным, совершенным, суперхеджирующим портфелем с потреблением, если для любого другого совершенного суперхеджирующего портфеля с потреблением (π, C) (т. е. $(\pi^*, C^*) \neq (\pi, C)$), капитал которого в момент времени $t \in N_0$ равен $X_t^{(\pi, C)}$, для любого $t \in N_0$ справедливо неравенство P-п. н.

$$X_t^{(\pi^*, C^*)} \leq X_t^{(\pi, C)}.$$

1.4. Теперь мы можем привести утверждение работы [4], которое позволяет строить минимальный совершенный суперхеджирующий портфель с потреблением.

Приводимое далее утверждение, взятое из работы [4], дает условия существования минимального совершенного суперхеджирующего портфеля с потреблением. Обозначим

$$V_t^* \stackrel{\Delta}{=} \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N} \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \Re_N} I_t^{Q, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t), \tag{5}$$

F_t-измеримая случайная величина. Как и в теории игр [16], назовем V_t^* верхним гарантированным значением в момент времени $t \in N_0$; V_t^* имеет смысл минимаксного значения ожидаемого риска эмитента при условии, что проводились наблюдения до момента времени $t \in N_0$ за ценами рисковых активов.

Теорема 1. *Пусть фильтрация* $\{F_t\}_{t \in N_0}$ *универсально полна* [2], $f_N(S.)$ — F_N-*измеримая, ограниченная, случайная величина и* $|\Re_N \cap m_N| \geq 1$. *Тогда на* $(1, S^{(1)}, ..., S^{(d)})$-*рынке без трения относительно любой меры* $Q \in \Re_N$ *существует минимальный совершенный суперхеджирующий портфель с потреблением* (π^*, C^*) *такой, что:*

1) $\pi^* = \{\beta_t^*, \gamma_t^*\}_{t \in N_1}$ — *самофинансирующий портфель, где* $\{\gamma_t^*\}_{t \in N_1}$ — *допустимая предсказуемая последовательность, определяемая равенствами*

$$\begin{cases} V_t^* = \underset{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N}{\text{ess inf}} \underset{Q \in \mathfrak{R}_N}{\text{ess sup}} E^Q[V_{t+1}^* e^{-(\gamma, \Delta S_{t+1})} | F_t] = \\ = \underset{Q \in \mathfrak{R}_N}{\text{ess sup}} E^Q\Big[V_{t+1}^* e^{-(\gamma_{t+1}^*, \Delta S_{t+1})} | F_t\Big], \\ V_t^*\big|_{t=N} = \exp\{f_N(S.)\}, \end{cases} \tag{6}$$

а $\{\beta_t^*\}_{t \in N_1}$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению Q-п. н.*

$$\Delta\beta_t^* + (S_{t-1}, \Delta\gamma_t^*) = 0, \tag{7}$$

причем $\beta_t^*|_{t=0} = \ln V_0^*$, а $\gamma_0^* = 0$, *при этом для любого* $t \in N_0$ *капитал* $X_t^{\pi^*}$ *портфеля* π^* *равен* $X_t^{\pi^*} = \beta_t^* + (S_t, \gamma_t^*)$;

2) *для любых* $t \in N_0$ и $Q \in \mathfrak{R}_N$ *капитал* $X_t^{(\pi^*, C^*)} = X_t^{\pi^*} - C_t^*$ *суперхеджирующего портфеля с потреблением* (π^*, C^*) *равен Q-п. н.* $\ln V_t^*$ (*т. е.* $X_t^{(\pi^*, C^*)} = \ln V_t^*$), *причем* C_t^* — *потребление в любой момент времени* $t \in N_1$ F_t-*измеримо и удовлетворяет рекуррентному соотношению Q-п. н.*

$$\begin{cases} \Delta C_t^* = (\gamma_t^*, \Delta S_t) - \Delta \ln V_t^* \ge 0, \\ C_t^*\big|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{8}$$

3) *портфель с потреблением* (π^*, C^*) *является минимальным, совершенным, суперхеджирующим, т. е. Q-п. н.* $X_t^{(\pi^*, C^*)}|_{t=N} = f_N(S.)$,

4) *справедливо равенство* $f_N(S.) = \ln V_0^* + \sum_{i=1}^{N} (\gamma_i^*, \Delta S_i) - C_N^*$ *Q-п. н.*

Замечания 2. 1. Доказательство теоремы 1 почти дословно повторяет доказательство сформулированной в работе [4] теоремы 3. Здесь условие (γ), фигурирующее в формулировке теоремы 3 из работы [4], заменено на условие $|\mathfrak{R}_N \cap m_N| \ge 1$. Поясним это: условие $|\mathfrak{R}_N \cap m_N| > 1$ гарантирует неполноту рассматриваемого $(1, S^{(1)}, ..., S^{(d)})$-рынка без трения и поэтому является естественным. Из этого условия, в частности, следует, что существует мера $\overline{Q} \in \mathfrak{R}_N \cap m_N$, относительно которой для любых $t \in N_0$ и $\gamma \in D_t$ кумулянта $G_{\overline{Q}}(t, S_0^{t-1}, -\gamma) \triangleq \ln E^{\overline{Q}}\left[e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | F_{t-1}\right]$ является ограниченной снизу и стремится к плюс бесконечности при $|\gamma| \to \infty$. Поэтому, условие (γ) будет выполнено.

2. Из утверждения теоремы 1 следует, что относительно любой меры $Q \in \mathfrak{R}_N$ существует $\gamma_1^{*N} \in D_1^N$ такое, что справедливо неравенство Q-п. н.

$$f_N(S.) \le \ln V_0^* + \sum_{i=1}^{N} (\gamma_i^*, \Delta S_i),$$

из которого следует существование суперхеджирующего портфеля.

1.5. Пусть $A_N(\omega)$ — любое F_N-измеримое множество. Рассмотрим задачу расчета европейского опциона на $(1, S^{(1)}, ..., S^{(d)})$-рынке с платежным обязательством вида $1_{A_N}(\omega)$, где $1_{A_N}(\omega) \triangleq \begin{cases} 1, \text{если } \omega \in A_N \\ 0, \text{если } \omega \notin A_N \end{cases}$. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда, в силу ограниченности платежного обязательства вида $1_{A_N}(\omega)$, выполнены все утверждения теоремы 1.

Чтобы избежать повторов в изложении материала, при построении минимального, совершенного, суперхеджирующего портфеля с потреблением с платежным обязательством $1_{A_N}(\omega)$ в формулировках утверждений теоремы 1 будем использовать следующее переобозначение: вместо символа «*» (звездочка вверху) будем использовать символ «λ» (вверху), т. е.

$$V_t^\lambda \triangleq \underset{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N}{\text{ess inf}} \underset{Q \in \mathfrak{R}_N}{\text{ess sup}} E^Q \times \left[\exp\left\{1_{A_N}(\omega) - \sum_{i=t+1}^{N} (\gamma_i, \Delta S_i)\right\} | F_t\right]. \tag{9}$$

Следовательно:

1) V_t^λ для любого $t \in N_0$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (6) с граничным условием $V_t^\lambda|_{t=N} = \exp\{1_{A_N}(\omega)\}$;

2) самофинансирующий портфель $\pi^\lambda = \{\beta_t^\lambda, \gamma_t^\lambda\}_{t \in N_1}$, где $\{\gamma_t^\lambda\}_{t \in N_1}$ — допустимая предсказуемая последовательность, определяется равенством

$$\underset{\gamma \in D_{t+1}}{\text{ess inf}} \underset{Q \in \mathfrak{R}_N}{\text{ess sup}} E^Q\Big[V_{t+1}^\lambda e^{-(\gamma, \Delta S_{t+1})} | F_t\Big] = = \underset{Q \in \mathfrak{R}_N}{\text{ess sup}} E^Q\Big[V_{t+1}^\lambda e^{-(\gamma_{t+1}^\lambda, \Delta S_{t+1})} | F_t\Big], \tag{10}$$

а β_t^λ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\Delta\beta_t^\lambda + (S_{t+1}, \Delta\gamma_t^\lambda) = 0, \qquad (11)$$

причем $\beta_t^\lambda|_{t=0} = \ln V_0^\lambda$, а $\gamma_0^\lambda = 0$;

3) потребление C_t^λ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\Delta C_t^\lambda = (\gamma_t^\lambda, \Delta S_t) - \Delta\ln V_t^\lambda, \; C_t^\lambda|_{t=0} = 0; \qquad (12)$$

4) платежное обязательство $1_{A_N}(\omega)$ относительно любой меры $Q \in \Re_N$ допускает представление

$$1_{A_N}(\omega) = \ln V_0^\lambda + \sum_{i=1}^{N}(\gamma_i^\lambda, \Delta S_i) - C_N^\lambda,$$

причем для любого $t \in N_1$ $\Delta\ln V_t^\lambda = (\gamma_t^\lambda, \Delta S_t) - \Delta C_t^\lambda$.

Кроме того, справедлива

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и V_t^λ удовлетворяет выражению* (9). *Тогда* $\ln V_0^\lambda < 1$.

Доказательство леммы 1 см. в Приложении.

2. КВАНТИЛЬНЫЙ СУПЕРХЕДЖИРУЮЩИЙ ПОРТФЕЛЬ УРОВНЯ 1 – α ЕВРОПЕЙСКОГО ОПЦИОНА НА МНОГОМЕРНОМ НЕПОЛНОМ РЫНКЕ БЕЗ ТРЕНИЯ

2.1. Определим, что будем понимать под решением задачи расчета европейского опциона с квантильным критерием.

Определение 8 [2]. Будем говорить, что согласованный процесс $\{\chi_t, F_t\}_{t \in N_0}$ имеет ограниченную вариацию относительно меры P, если

$$\sum_{i=1}^{N}|\Delta\chi_i| < \infty \; P\text{-п. н.},$$

где $\Delta\chi_t \triangleq \chi_t - \chi_{t-1}$. ♦

Пусть X_t^π — капитал самофинансирующего портфеля π в момент времени $t \in N_0$.

Определение 9. Пару (π, χ) назовем самофинансирующим портфелем с ограниченной вариацией, где $\pi \in SF$, $\{\chi_t, F_t\}_{t \in N_0}$ — процесс ограниченной вариации относительно меры P. Капитал портфеля с ограниченной вариацией (π, χ) в момент времени $t \in N_0$, обозначаемый как $X_t^{(\pi,\chi)}$ определим равенством

$$X_t^{(\pi,\chi)} = X_t^\pi - \chi_t.$$

Замечание 3. Поскольку последовательность $\{X_t^{(\pi,\chi)}\}_{t \in N_0}$ согласованна с фильтрацией F_t, т. е. $(X_t^{(\pi,\chi)}, F_t)_{t \in N_0}$, то она является семимартингалом относительно любой меры $Q \in \Re_N$ [2].

Определение 10. Решением задачи расчета европейского опциона с платежным обязательством $f_N(S_\cdot)$ на неполном рынке без трения с квантильным критерием уровня $1 - \alpha$, где $\alpha \in (0, 1)$, относительно любой меры $Q \in \Re_N$ назовем самофинансирующий портфель с ограниченной вариацией $(\pi^\alpha, \chi^\alpha)$, капитал которого $X_N^{(\pi^\alpha,\chi^\alpha)}$ в момент времени N удовлетворяет неравенству

$$Q(X_N^{(\pi^\alpha,\chi^\alpha)} \ge f_N(S_\cdot)) \ge 1 - \alpha.$$

Портфель $(\pi^\alpha, \chi^\alpha)$ назовем квантильным суперхеджирующим уровня $1 - \alpha$. ♦

Обозначим

$$c \triangleq \ln V_t^*|_{t=0} > 0.$$

Доказано (см. лемму 1 в работе [4]) неравенство $c > 0$.

2.2. Приведем условия, которые обеспечивают существование решения задачи расчета европейского опциона с квантильным критерием уровня $1 - \alpha$ на многомерном неполном рынке без трения.

Пусть $S_t^{(j)}$ — j-я компонента d-мерного вектора S_t, $t \in N_0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть для каждого* $\alpha \in (0, 1)$ *существуют* $\lambda_t^{(j)}(\alpha) \in R^+$, $j = \overline{1, d}$, $t \in N_0$, *такие, что относительно любой меры* $Q \in \Re_N$ *выполняется неравенство*

$$Q\left(\bigcap_{t=1}^{N}\bigcap_{j=1}^{d}\{S_t^{(j)} \ge \lambda_t^{(j)}(\alpha)\}\right) \ge 1 - \alpha.$$

Тогда существует решение задачи расчета европейского опциона с квантильным критерием уровня $1 - \alpha$, *т. е. существуют:*

1) $\pi^\alpha = \{\beta_t^\alpha, \gamma_t^\alpha\}_{t \in N_0}$ — *самофинансирующий портфель, где* $\{\gamma_t^\alpha\}_{t \in N_0}$ — *предсказуемая последовательность, элементы которой определяются равенством*

$$\gamma_t^\alpha = \gamma_t^* - c\gamma_t^\lambda,$$

где $\gamma_t^* \in D_1^N$ *определяются из равенства* (6), *а* $\gamma_t^\lambda \in D_1^N$ — *из равенства* (10); $\{\beta_t^\alpha\}_{t \in N_0}$ — *последовательность, элементы которой определяются равенством* $\beta_t^\alpha = \beta_t^* - c\beta_t^\lambda$, *где* β_t^* *удовлетворяет соотношению* (7), *а* β_t^λ — *соотношению* (11);

2) *для любых* $t \in N_0$ *и* $Q \in R_N$ *капитал* $X_t^{\pi^\alpha}$ *портфеля* π^α *имеет Q-п. н. вид* $X_t^{\pi^\alpha} = \beta_t^\alpha + (S_t, \gamma_t^\alpha)$;

3) *процесс ограниченной вариации* χ_t^α *определяется равенством*

$$\chi_t^\alpha = C_t^* - cC_t^\lambda, \tag{13}$$

где C_t^* *удовлетворяет* (8), *а* C_t^λ — (12);

4) *для любых* $t \in N_0$ *и* $Q \in R_N$ *капитал* $X_t^{(\pi^\alpha, \chi^\alpha)}$ *портфеля с ограниченной вариацией* $(\pi^\alpha, \chi^\alpha)$ *имеет Q-п. н. вид* $X_t^{(\pi^\alpha, \chi^\alpha)} = X_t^{\pi^\alpha} - \gamma_t^\alpha$;

5) *портфель с ограниченной вариацией* $(\pi^\alpha, \chi^\alpha)$ *является квантильным суперхеджирующим портфелем уровня* $1 - \alpha$, *т. е. относительно любой меры* $Q \in \Re_N$ *выполняется неравенство*

$$Q(X_N^{(\pi^\alpha, \chi^\alpha)} \ge f_N(S.)) \ge 1 - \alpha,$$

причем

$$X_0^{(\pi^\alpha, \chi^\alpha)} = c(1 - \ln V_0^\lambda) > 0.\blacklozenge \tag{14}$$

Доказательство теоремы 2 см. в Приложении.

Замечания 4. 1. В отличие от работ [8—10], в настоящей статье условия существования решения задачи расчета европейского опциона с квантильным критерием относительно любой меры из класса эквивалентных $\Re_N$ легко проверяемые.

2. Существование $\lambda_t^{(j)}(\alpha) \in R^+$ таких, что относительно любой меры $Q \in \Re_N$ выполняется неравенство $Q\left(\bigcap_{t=1}^{N}\bigcap_{j=1}^{d}\{S_t^{(j)} \ge \lambda_t^{(j)}(\alpha)\}\right) \ge 1 - \alpha$, вытекает из леммы Неймана — Пирсона, поскольку существует базовая мера P.

3. ПРИМЕР РАСЧЕТА ЕВРОПЕЙСКОГО ОПЦИОНА НА ОДНОМЕРНОМ НЕПОЛНОМ РЫНКЕ С КВАНТИЛЬНЫМ КРИТЕРИЕМ

Для расчета европейского опциона на одномерном неполном рынке с квантильным критерием потребуется решить две задачи суперхеджирования европейского опциона на данном рынке.

3.1. Приведем решение задачи расчета европейского опциона с ограниченным платежным обязательством на одномерном неполном рынке.

3.1.1. Дадим описание неполного (1, S)-рынка. Пусть $(\Omega, F, (F_t)_{t \in N_0})$ — фильтрованное измеримое пространство. Пусть $0 < S_0 - F_0$ — измеримая случайная величина, $\{\rho_t\}_{t \in N_0}$ — семейство дискретных случайных величин, принимающих относительно меры P три значения: a, 0, b, причем $-1 < a < 0 < b < \infty$. Экономический смысл ρ_t — доходность рискового актива в момент времени $t \in N_1$.

Пусть $\underline{\Re}_N$ — множество вероятностных мер таких, что относительно любой меры $Q \in \underline{\Re}_N$ случайные величины $S_0, \rho_1, ..., \rho_N$ независимы в совокупности и одинаково распределены. Для удобства изложения приведенные условия обозначим через $(\underline{\Re})$. Очевидно, что $\underline{\Re}_N \ne \varnothing$. Заметим, если выполнены условия $(\underline{\Re})$, то вероятности $Q(\rho_t = a)$, $Q(\rho_t = 0)$, $Q(\rho_t = b)$ не зависят от $t \in N_1$.

Обозначим

$$q_1 \triangleq Q(\rho_t = a), \quad q_2 \triangleq Q(\rho_t = 0), \quad q_3 \triangleq Q(\rho_t = b).$$

Пусть эволюция стоимости рискового актива $\{S_t\}_{t \in N_0}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S_t = S_{t-1}(1 + \rho_t), \quad S_t|_{t=0} = S_0 > 0.$$

Очевидно, если выполнены условия $(\underline{\Re})$, то последовательность $\{S_t, F_t\}_{t \in N_0}$ относительно любой меры $Q \in \underline{\Re}_N$ является однородной марковской.

Будем полагать, что стоимость безрискового актива B_t в момент времени $t \in N_0$ удовлетворяет соотношению $B_t \equiv 1$.

Очевидно, что описанный (1, S)-рынок без трения является неполным. Действительно, пусть любая $Q \in \underline{\Re}_N \cap m_N$ и выполнены условия $(\underline{\Re})$. Тогда q_i, $i = \overline{1, 3}$, удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} aq_1 + bq_3 = 0, \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1, \end{cases}$$

решение которой

$$q_1 = (1 - q_2)p^*, \quad q_3 = (1 - q_2)q^*, \tag{15}$$

где $p^* = \frac{b}{|a| + b}$, $q^* = \frac{|a|}{|a| + b}$, любое $q_2 \in [0, 1]$.

Из решения (15) следует, что $q_2 \in (0, 1)$ — любое. Поэтому рассматриваемый (1, S)-рынок без трения является неполным.

3.1.2. Пусть на описанном в пп. 3.1.1 (1, S)-рынке платежное обязательство имеет вид $g(S_N)$, где g: $R^+ \to R^1$ — ограниченная функция. Приведем решение задачи расчета европейского опциона на неполном (1, S)-рынке без трения с платежным обязательством $g(S_N)$.

Пусть $V_t^* \triangleq \inf\limits_{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N} \sup\limits_{Q \in \mathfrak{R}_N} E^Q\Big[\exp\Big\{g(S_N) - \sum\limits_{i=t+1}^{N} (\gamma_i, \Delta S_i)\Big\}\Big|F_t\Big]$. Из утверждения теоремы 1 следует, что верхнее гарантированное значение в момент времени $t \in N_1$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} V_{t-1}^* = \inf\limits_{\gamma \in D_t} \sup\limits_{Q \in \mathfrak{R}_N} E^Q[V_t^* e^{-\gamma S_{t-1}\rho_t} | F_{t-1}], \\ V_t^*|_{t=N} = \exp\{g(S_N)\}. \end{cases} \quad (16)$$

Сделаем пару замечаний:

— аналогично работе [5], легко установить, что при каждом $t \in N_0$ верхнее гарантированное значение V_t^* является марковской случайной функцией; поэтому, в силу теоремы Бореля, существует функция V_t^*: $N_0 \times R^+ \to R^1$, обозначаемая $V_t^*(x)$, такая, что для любого $t \in N_0$ функция $V_t^* = V_t^*(x)|_{x=S_t} \triangleq V_t^*(S_t)$;

— в данном случае $D_t = R^1$.

С учетом сделанных замечаний, из соотношения (16) следует, что $V_t^*(S_t)$ для любого $t \in N_0$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} V_t^* = \inf\limits_{\gamma \in R^1} \sup\limits_{Q \in \mathfrak{R}_N} E^Q[V_{t+1}^*(S_{t+1}) e^{-\gamma S_t \rho_{t+1}} | F_t], \\ V_t^*(S_t)|_{t=N} = \exp\{g(S_N)\}. \end{cases} \quad (17)$$

Так как ρ_t — дискретная случайная величина, принимающая три значения, то

$$\sup_{Q \in \mathfrak{R}_N} E^Q\Big[V_{t+1}^*(S_{t+1}) e^{-\gamma S_t \rho_{t+1}} | F_t\Big] =$$
$$= \sup_{\left\{\begin{smallmatrix} 0 \le q_i \le 1,\ i = \overline{1,3} \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \end{smallmatrix}\right\}} \{V_{t+1}^*(S_t(1+a)) e^{\gamma S_t |a|} q_1 +$$
$$+ V_{t+1}^*(S_t) q_2 + V_{t+1}^*(S_t(1+b)) e^{-\gamma S_t b} q_3\} =$$
$$= \max\{V_{t+1}^*(S_t(1+a)) e^{\gamma S_t |a|}, V_{t+1}^*(S_t),$$
$$V_{t+1}^*(S_t(1+b)) e^{-\gamma S_t b}\}. \quad (18)$$

С учетом выражения (18) соотношение (17) примет вид

$$\begin{cases} \ln V_t^*(S_t) = \inf\limits_{\gamma \in R^1} \max\{\ln V_{t+1}^*(S_t(1+a)) + \gamma S_t|a|, \\ \ln V_{t+1}^*(S_t), \ln V_{t+1}^*(S_t(1+b)) - \gamma S_t b\}, \\ \ln V_t^*(S_t)|_{t=N} = g(S_N). \end{cases} \quad (19)$$

Обозначим

$$\psi(t, x, \gamma) \triangleq \max\{\ln V_{t+1}^*(x(1+a)) + \gamma x|a|,$$
$$\ln V_{t+1}^*(x), \ln V_{t+1}^*(x(1+b)) - \gamma x b\}.$$

Очевидно, что для любых (t, x) функция $\psi(t, x, \gamma)$ является верхней огибающей по $\gamma \in R^1$ набора функций в фигурных скобках последнего выражения. Поэтому для любых (t, x) функция $\psi(t, x, \gamma)$ является выпуклой, непрерывной, ограниченной снизу по γ, причем

$$\psi(t, x, \gamma) \underset{|\gamma| \to \infty}{\to} \infty.$$

Следовательно, для любых (t, x) существует γ_t^* такое, что справедливо равенство

$$\inf_{\gamma \in R^1} \psi(t, x, \gamma) = \psi(t, x, \gamma_t^*).$$

Для любого $t \in N_1$ найдем γ_t^*. Пусть $D_{t,x}^+ \subseteq R^1$ — множество таких $\gamma \in R^1$, которые удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} \ln V_{t+1}^*(x(1+b)) - \gamma x b \ge \ln V_{t+1}^*(x), \\ \ln V_{t+1}^*(x(1+a)) + \gamma x|a| \ge \ln V_{t+1}^*(x). \end{cases}$$

Очевидно, возможны два случая.

1. Пусть $D_{t,x}^+ \ne \varnothing$. Отсюда следует, что существует $\gamma_{t+1}^{(1)} \in R^1$ такое, что

$$\ln V_{t+1}^*(x(1+a)) + \gamma_{t+1}^{(1)} x|a| =$$
$$= \ln V_{t+1}^*(x(1+b)) - \gamma_{t+1}^{(1)} x b,$$

откуда

$$\gamma_{t+1}^{(1)} = \frac{1}{x(b+|a|)} \ln \frac{V_{t+1}^*(x(1+b))}{V_{t+1}^*(x(1+a))}.$$

В этом случае рекуррентное соотношение (19) примет вид

$$\begin{cases} \ln V_t^*(x) = (1-q^*) \ln V_{t+1}^*(x(1+a)) + \\ + q^* \ln V_{t+1}^*(x(1+b)), \\ \ln V_t^*|_{t=N} = g(x), \end{cases}$$

где $q^* = |a|/(|a| + b)$.

2. Пусть $D_{t,x}^+ = \varnothing$. Тогда существуют единственные $\gamma_{t+1}^{(2)}$ и $\gamma_{t+1}^{(3)}$ такие, что

$$\ln V_{t+1}^*(x(1+a)) + \gamma_{t+1}^{(2)} x|a| =$$
$$= \ln V_{t+1}^*(x(1+b)) - \gamma_{t+1}^{(3)} x b = \ln V_{t+1}^*(x), \quad (20)$$

откуда следует, что $\gamma_{t+1}^{(2)} \neq \gamma_{t+1}^{(3)}$ и

$$\gamma_{t+1}^{(2)} = \frac{1}{x|a|}\ln\frac{V_{t+1}^*(x)}{V_{t+1}^*(x(1+a))},$$

$$\gamma_{t+1}^{(3)} = \frac{1}{xb}\ln\frac{V_{t+1}^*(x(1+b))}{V_{t+1}^*(x)}.$$

Очевидно, что для любого $\alpha \in (0, 1)$

$$\gamma_{t+1}^{\alpha} \triangleq \alpha\gamma_{t+1}^{(2)} + (1-\alpha)\gamma_{t+1}^{(3)},$$

что также снимает внешнюю нижнюю грань в соотношении (19). Пусть $\alpha = q^*$. Тогда

$$\gamma_{t+1}^* \triangleq \gamma_{t+1}^{q^*} \triangleq \gamma_{t+1}^{\alpha}\big|_{\alpha = q^*} = \gamma_{t+1}^{(1)} =$$
$$= \frac{1}{S_t(b+|a|)}\ln\frac{V_{t+1}^*(S_t(1+b))}{V_{t+1}^*(S_t(1+a))}. \qquad (21)$$

Очевидно, что γ_{t+1}^*, определяемая равенством (21), — единственно. Следовательно, соотношение (19) с учетом сделанных замечаний примет вид

$$\begin{cases} \ln V_t^*(S_t) = \max[\ln V_{t+1}^*(S_t), p^*\ln V_{t+1}^*(S_t(1+a)) + \\ + q^*\ln V_{t+1}^*(S_t(1+b))], \\ \ln V_t^*(S_t)\big|_{t=N} = g(S_N). \end{cases} \qquad (22)$$

Выражение (21) дает возможность построения суперхеджирующего портфеля и его капитала. Действительно, из условия самофинансируемости следует, что количество безрискового актива β_t^* в любой момент времени $t \in N_0$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} \beta_t^* = \beta_{t-1}^* - S_{t-1}\Delta\gamma_t^*, \\ \beta_t^*\big|_{t=0} = \beta_0^*, \end{cases} \qquad (23)$$

причем капитал $X_t^{\pi^*}$ портфеля π^*

$$X_t^{\pi^*} = \beta_t^* + (S_t, \gamma_i^*),$$

а $\beta_t^* = \ln V_0^*(S_0)$, $\gamma_0^* = 0$.

В силу утверждения теоремы 1 относительно любой меры $Q \in \mathfrak{R}_N$ и $t \in N_0$ капитал портфеля с потреблением (π^*, C^*)

$$X_t^{(\pi^*, C^*)} = X_t^{\pi^*} - C_t^* = \ln V_t^*(S_t), \qquad (24)$$

причем

$$X_t^{(\pi^*, C^*)}\big|_{t=N} = \ln V_N^*(S_N) = g(S_N),$$

а потребление $\{C_t^*, F_t\}_{t \in N_0}$, относительно любой меры $Q \in \mathfrak{R}_N$ $Q(\Delta C_{t+1}^* \geq 0|F_t) = 1$ и удовлетворяет рекуррентному соотношению Q-п. н.

$$\begin{cases} \Delta C_t^* = (\gamma_t^*, \Delta S_t) - \Delta X_t^{(\pi^*, C^*)}, \\ C_t^*\big|_{t=0} = 0. \end{cases} \qquad (25)$$

3.1.3. Рассмотрим частный случай, когда рекуррентное соотношение (22) допускает явное решение.

Пусть функция $g(x)$ — выпуклая. Методом индукции назад легко установить, что для любого $t \in N_0$ функция $\ln V_t^*(x)$ является выпуклой. Следовательно, справедливо неравенство

$$\ln V_{t+1}^*(S_t) \leq p^*\ln V_{t+1}^*(S_t(1+a)) +$$
$$+ q^*\ln V_{t+1}^*(S_t(1+b)).$$

Тогда соотношение (22) можно переписать в виде

$$\ln V_t^*(S_t) = p^*\ln V_{t+1}^*(S_t(1+a)) +$$
$$+ q^*\ln V_{t+1}^*(S_t(1+b)),\ \ln V_t^*(S_t)\big|_{t=N} = g(S_N). \qquad (26)$$

Уравнение (26) имеет явное решение (см. формулу (154) в работе [5])

$$\ln V_t^*(x) = \Phi_{N-t}(x) = \sum_{i=0}^{N-t} g(x(1+a)^i \times$$
$$\times (1+b)^{N-t-i})\, C_{N-t}^i (p^*)^i (q^*)^{N-t-i}. \qquad (27)$$

Из выражений (21) и (27) следует, что

$$\gamma_t^* = \frac{1}{S_{t-1}(b+|a|)}\sum_{i=0}^{N-t}[g(S_{t-1}(1+a)^i \times$$
$$\times (1+b)^{N-t-i+1}) - g(S_{t-1}(1+a)^{i+1} \times$$
$$\times (1+b)^{N-t-i})]\, C_{N-t}^i (p^*)^i (q^*)^{N-t-i}. \qquad (28)$$

Из соотношений (23)—(28), следует, что для любого $t \in N_0$:

— количество безрискового актива

$$\beta_t^* = \beta_{t-1}^* - \frac{1}{b+|a|}\sum_{i=0}^{N-t}[g(S_{t-1}(1+a)^i \times$$
$$\times (1+b)^{N-t-i+1}) - g(S_{t-1}(1+a)^{i+1} \times$$
$$\times (1+b)^{N-t-i})]\, C_{N-t}^i (p^*)^i (q^*)^{N-t-i} +$$
$$+ \frac{(1+\rho_{t-1})}{b+|a|}\sum_{i=0}^{N-t+1}[g(S_{t-2}(1+a)^i(1+b)^{N-t-i+2}) -$$
$$- g(S_{t-2}(1+a)^{i+1}(1+b)^{N-t-i+1})] \times$$
$$\times\ C_{N-t+1}^i (p^*)^i (q^*)^{N-t-i+1},\quad \beta_t^*\big|_{t=0} = \beta_0^*,$$

— капитал суперхеджирующего портфеля с потреблением Q-п. н.

$$X_t^{(\pi^*, C^*)} = \ln V_t^*(x) = \Phi_{N-t}(x) =$$
$$= \sum_{i=0}^{N-t} g(x(1+a)^i(1+b)^{N-t-i})\, C_{N-t}^i (p^*)^i (q^*)^{N-t-i};$$

— потребление C_t^*, относительно любой меры $Q \in \mathfrak{R}_N$, удовлетворяет рекуррентному соотношению (25), которое имеет вид

$$\Delta C_t^* = \frac{\rho_t}{|a|+b}\left[\sum_{i=0}^{N-t}\{g(S_{t-1}(1+a)^i(1+b)^{N-t-i+1}) - g(S_{t-1}(1+a)^{i+1}(1+b)^{N-t-i})\} \times C_{N-t}^i(p^*)^i(q^*)^{N-t-i}\right] - \sum_{i=0}^{N-t} g(S_{t-1}(1+a)^i \times (1+b)^{N-t-i})\, C_{N-t}^i (p^*)^i (q^*)^{N-t-i} + \sum_{i=0}^{N-t-1} g(S_{t-1}(1+a)^i(1+b)^{N-t-i-1}) \times C_{N-t}^i (p^*)^i (q^*)^{N-t-i-1}, \quad C_t^*|_{t=0} = 0,$$

причем для любых $t \in N_0$ и $Q \in \mathfrak{R}_N \backslash \partial\mathfrak{R}_N$ справедливо равенство $C_t^* > 0$ Q-п. н., где $\mathfrak{R}_N$ — компакт в слабой топологии, а $\partial\mathfrak{R}_N$ — его граница.

3.1.4. В дальнейшем на (1, S)-рынке без трения нам понадобится построить минимаксный суперхеджирующий портфель европейского опциона с платежным обязательством $1_{\{S_N<\lambda\}}(\omega)$, где $\lambda \in R^+$. Решение данной задачи для неполных рынков без трения в литературе не описано.

Обозначим $A^\lambda \triangleq \{\omega \in \Omega\colon S_N(\omega) \ge \lambda\}$, где $\lambda \in R^+$ — любое. Очевидно, что $A^\lambda \in F_N$. Множество λ таких, что $Q(A^\lambda) > 0$ для любого $Q \in \mathfrak{R}_N$ обозначим через Γ. Очевидно, что $\Gamma \ne \varnothing$.

Пусть $V_t^\lambda \triangleq \inf\limits_{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N} \sup\limits_{Q \in \mathfrak{R}_N} E^Q\left[\exp\{1_{\{S_N<\lambda\}} - \sum\limits_{i=t+1}^{N} (\gamma_i, \Delta S_i)\}|F_t\right]$. Тогда, проводя рассуждения, аналогичные проведенным в пп. 3.1.2, легко установить, что:

— существует функция $V_t^\lambda\colon N_0 \times R^+ \to R^+$, обозначаемая $V_t^\lambda(x)$, такая, что $V_{t+1}^\lambda = V_{t-1}^\lambda(x)|_{x=S_{t-1}} = V_{t-1}^\lambda(S_{t-1})$, удовлетворяющая рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} V_{t-1}^\lambda(S_{t-1}) = \inf\limits_{\gamma \in R^1} \sup\limits_{Q \in \mathfrak{R}_N} E^Q[V_t^\lambda(S_t)e^{-\gamma S_{t-1}\rho_t}|F_{t-1}], \\ V_t^\lambda(S_t)|_{t=N} = \exp\{1_{\{S_N<\lambda\}}\}; \end{cases} \tag{29}$$

— для любого $t \in N_0$ существует самофинансирующий портфель $\pi^\lambda = \{\beta_t^\lambda, \gamma_t^\lambda\}_{t \in N_0}$ такой, что:

а) γ_t^λ такое, что справедливо равенство

$$\inf_{\gamma \in R^1} \sup_{Q \in \mathfrak{R}_N} E^Q\left[V_t^\lambda(S_t)e^{-\gamma S_{t-1}\rho_t}|F_{t-1}\right] = \sup_{Q \in \mathfrak{R}_N} E^Q\left[V_t^\lambda(S_t)e^{-\gamma_t^\lambda S_{t-1}\rho_t}|F_{t-1}\right],$$

причем

$$\gamma_t^\lambda = \frac{1}{S_{t-1}(b+|a|)}\ln\frac{V_t^\lambda(S_{t-1}(1+b))}{V_t^\lambda(S_{t-1}(1+a))}; \tag{30}$$

б) β_t^λ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} \beta_t^\lambda = \beta_{t-1}^\lambda - S_{t-1}\Delta\gamma_t^\lambda, \\ \beta_t^\lambda|_{t=0} = \beta_0^\lambda. \end{cases} \tag{31}$$

Из утверждения теоремы 1 следует, что $\beta_0^\lambda = \ln V_0^\lambda(S_0)$, а $\gamma_t^\lambda = 0$.

3.1.5. Следующее утверждение устанавливает явный вид решения рекуррентного соотношения (29).

Лемма 2. *Решение рекуррентного соотношения* (29) *имеет вид*

$$\ln V_t^\lambda(x) = 1_{\{x<\lambda\}} + \sum_{i=1}^{N-t}(p^*)^i 1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+a)^{i-1}} \le x < \frac{\lambda}{(1+a)^i}\right\}},$$

где $1_{\{x<\lambda\}} \triangleq \begin{cases} 1, x<\lambda, \\ 0, x \ge \lambda, \end{cases}$

$$1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+a)^{i-1}} \le x < \frac{\lambda}{(1+a)^i}\right\}} \triangleq \begin{cases} 1, x \in \left[\frac{\lambda}{(1+a)^{i-1}}, \frac{\lambda}{(1+a)^i}\right), \\ 0, x \notin \left[\frac{\lambda}{(1+a)^{i-1}}, \frac{\lambda}{(1+a)^i}\right). \end{cases}$$ ♦

Доказательство леммы 2 см. в Приложении.

3.1.6. Утверждения теоремы 1 и леммы 2 позволяют установить явный вид потребления, портфеля с потреблением, его капитала.

Из утверждений теоремы 1, леммы 2 и выражения (30) имеем:

— для любого $t \in N_0$ количество рискового актива

$$\gamma_{t+1}^{\lambda} = \frac{1}{S_t(b+|a|)}\left(\sum_{i=1}^{N-t-1}(p^*)^i \times \right.$$
$$\left.\times\left(1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+b)(1+a)^{i-1}} < S_t \le \frac{\lambda}{(1+b)(1+a)^i}\right\}} + 1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+a)^i} < S_t \le \frac{\lambda}{(1+a)^{i+1}}\right\}}\right)\right) -$$
$$- 1_{\left\{\frac{\lambda}{1+b} < S_t \le \frac{\lambda}{1+a}\right\}}, \qquad (32)$$

а количество безрискового актива β_t^{λ} удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{cases}\beta_t^{\lambda} = \beta_{t-1}^{\lambda} - S_{t-1}\Delta\gamma_t^{\lambda}, \\ \beta_t^{\lambda}|_{t=0} = \beta_0^{\lambda}.\end{cases}$$

— потребление C_t^{λ} удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\Delta C_t^{\lambda} = \frac{\rho_t}{b+|a|}\left[\left(\sum_{i=1}^{N-t}(p^*)^i \times \right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left(1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+b)(1+a)^{i-1}} < S_{t-1} \le \frac{\lambda}{(1+b)(1+a)^i}\right\}} + 1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+a)^i} < S_{t-1} \le \frac{\lambda}{(1+a)^{i+1}}\right\}}\right)\right) -\right.$$
$$\left. - 1_{\left\{\frac{\lambda}{1+b} \le S_{t-1} < \frac{\lambda}{1+a}\right\}}\right] - \left(1_{\{S_t < \lambda\}} - 1_{\{S_{t-1} < \lambda\}} + \right.$$
$$+ \sum_{i=1}^{N-t}(p^*)^i 1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+a)^{i-1}} \le S_t < \frac{\lambda}{(1+a)^i}\right\}} -$$
$$\left. - \sum_{i=1}^{N-(t-1)}(p^*)^i 1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+a)^{i-1}} \le S_{t-1} < \frac{\lambda}{(1+a)^i}\right\}}\right) \ge 0,$$
$$C_t^{\lambda}|_{t=0} = 0;$$

— капитал портфеля с потреблением

$$X_t^{(\pi^{\lambda}, C^{\lambda})} = \ln V_t^{\lambda}(S_t) =$$
$$= 1_{\{S_t < \lambda\}} + \sum_{i=1}^{N-t}(p^*)^i 1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+a)^{i-1}} \le S_t < \frac{\lambda}{(1+a)^i}\right\}},$$

причем $X_t^{(\pi^{\lambda}, C^{\lambda})}|_{t=N} = \ln V_N^{\lambda}(S_N) = 1_{\{S_N < \lambda\}}$.

3.2. Приведем решение задачи квантильного суперхеджирующего портфеля уровня $1 - \alpha$ европейского опциона с платежным обязательством $g(S_N)$ на описанном в пп. 3.1.1 $(1, S)$-рынке.

3.2.1. Пусть $\alpha \in (0, 1)$ и для любой меры $Q \in \mathfrak{R}_N$ существует $\lambda(\alpha) \in R^+$ такие, что $Q(S_N \ge \lambda(\alpha)) \ge 1 - \alpha$. Из утверждения теоремы 2 следует, что портфель $\pi^{\alpha} = \{\beta_t^{\alpha}, \gamma_t^{\alpha}\}_{t \in N_0}$ определяется равенствами

$$\beta_t^{\alpha} = \beta_t^* - c\beta_t^{\lambda}, \quad \gamma_t^{\alpha} = \gamma_t^* - c\gamma_t^{\lambda}, \qquad (33)$$

где γ_t^* и γ_t^{λ} удовлетворяют соотношениям (21) и (32), а β_t^* и β_t^{λ} — соотношениям (23) и (31) соответственно.

Из равенств (33) следует, что для любого $t \in N_0$ капитал $X_t^{\pi^{\alpha}}$ портфеля π^{α} выражается как $X_t^{\pi^{\alpha}} = X_t^{\pi^*} - cX_t^{\pi^{\lambda}}$, где $c = \ln V_0^* > 0$, а капитал $X_t^{(\pi^{\alpha}, \chi^{\alpha})}$ портфеля с ограниченной вариацией $(\pi^{\alpha}, \chi^{\alpha})$

$$X_t^{(\pi^{\alpha}, \chi^{\alpha})} = \ln V_t^* - c\ln V_t^{\lambda}. \qquad (34)$$

Из формулы (34) и леммы 1 следует, что начальный капитал

$$X_0^{(\pi^{\alpha}, \chi^{\alpha})} = X_0^{(\pi^{\alpha})} = \ln V_0^* - c\ln V_0^{\lambda} = c(1 - \ln V_0^{\lambda}) =$$
$$= c\left(1 - 1_{\{S_0 < \lambda\}} - \sum_{i=1}^{N}(p^*)^i 1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+a)^{i-1}} \le S_0 < \frac{\lambda}{(1+a)^i}\right\}}\right) =$$
$$= c\left(1_{\{S_0 \ge \lambda\}} - \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{b}{b+|a|}\right)^i 1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+a)^{i-1}} \le S_0 < \frac{\lambda}{(1+a)^i}\right\}}\right).$$

Из теоремы 2 следует, что портфель π^{α}, определяемый равенствами (33), является квантильным суперхеджирующим уровня $1 - \alpha$, т. е.

$$Q(X_N^{(\pi^{\alpha}, \chi^{\alpha})}) \ge g(S_N)) \ge 1 - \alpha.$$

Таким образом, мы построили квантильный суперхеджирующий портфеля уровня $1 - \alpha$.

3.2.2. Рассмотрим частный случай, когда функция $g(x)$ выпуклая. Тогда из результатов п. 3.2, а также из соотношений (28), (30) и леммы 2, относительно любой меры $Q \in \mathfrak{R}_N$, имеем:

а) $\gamma_t^{\alpha} = \gamma_t^* - c\gamma_t^{\lambda} = \dfrac{1}{S_{t-1}(b+|a|)}\left[\sum_{i=0}^{N-t}[g(S_{t-1}(1+a)^i \times\right.$

$\times (1+b)^{N-t-i+1}) - g(S_{t-1}(1+a)^{i+1}(1+b)^{N-t-i})] \times$

$\times\ C_{N-t}^i(p^*)^i(q^*)^{N-t-i} - c\left\{\sum_{i=0}^{N-t}(p^*)^i \times\right.$

$\times\ 1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+b)(1+a)^{i-1}} \le S_{t-1} < \frac{\lambda}{(1+b)(1+a)^i}\right\}} - 1_{\left\{\frac{\lambda}{1+b} \le S_{t-1} < \frac{\lambda}{1+a}\right\}} +$

$\left.\left. + \sum_{i=0}^{N-t}(p^*)^i 1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+a)^i} \le S_{t-1} < \frac{1}{(1+a)^{i+1}}\right\}}\right\}\right]$;

б) β_t^{α} в любой момент времени $t \in N_0$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{cases}\beta_t^{\alpha} = \beta_{t-1}^{\alpha} - S_{t-1}\Delta\gamma_t^{\alpha}, \\ \beta_t^{\alpha}|_{t=0} = \beta_0^{\alpha};\end{cases}$$

в) $c = \ln V_0^*(S_0) = \sum_{i=1}^{N} g(S_0(1+a)^i(1+b)^{N-i}) \times$

$\times\ C_N^i(p^*)^i(q^*)^{N-i}$;

г) капитал портфеля (34) $X_t^{(\pi^{\alpha}, \chi^{\alpha})} = X_t^{(\pi^*, C^*)} -$

$- cX_t^{(\pi^{\lambda}, C^{\lambda})} = \ln V_t^*(S_t) - c\ln V_t^{\lambda}(S_t) = \sum_{i=0}^{N-t} g(S_t(1+a)^i$

$\times$

$\times (1+b)^{N-i})\, C_{N-t}^i(p^*)^i(q^*)^{N-t-i} - c\left[1_{\{S_t < \lambda\}} +\right.$

$\left. + \sum_{i=0}^{N-t}(p^*)^i 1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+a)^{i-1}} \le S_t < \frac{1}{(1+a)^i}\right\}}\right]$,

и $Q(X_N^{(\pi^{\alpha}, \chi^{\alpha})}) \ge g(S_N)) \ge 1 - \alpha$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим полученные результаты.

- Вычислена оценка верхней границы спрэда европейского опциона с квантильным критерием на неполном рынке без трения (см. выражение (14)).
- Доказано, что стоимость квантильного суперхеджирующего портфеля уровня $1 - \alpha$ меньше стоимости минимального суперхеджирующего портфеля с тем же платежным обязательством на величину $c\ln V_0^{\lambda}$ (см. (14)), где c — стоимость минимального суперхеджирующего портфеля.
- Получено явное решение задачи расчета опциона с платежным обязательством, являющимся индикатором любого борелевского множества (см. лемму 2).
- Рассчитан европейский опцион с квантильным критерием, когда носитель любой меры $Q \in \Re_N$ сосредоточен в трех точках: a, 0, b.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Из определения V_t^{λ} (см. выражение (9)) имеем:

$$V_t^{\lambda} = \inf_{\gamma_1^N \in D_1^N} \sup_{Q \in \Re_N} E^Q\left[\exp\left\{1_{A_N}(\omega) - \sum_{i=1}^{N}(\gamma_i, \Delta S_i)\right\}|F_0\right].$$

Отсюда следует, что для любого $\gamma \in D_{t+1}$ справедливо неравенство P-п. н.

$$V_0^{\lambda} \le \sup_{Q \in \Re_N} E^Q\left[\exp\left\{1_{A_N}(\omega) - \sum_{i=1}^{N}(\gamma_i, \Delta S_i)\right\}|F_0\right].$$

Очевидно, что стратегия $\gamma_t \equiv 0$ — допустима. Поэтому, если положить $\gamma_t = 0$ для любого $t \in N_0$, то справедливо неравенство

$$V_0^{\lambda} \equiv \sup_{Q \in \Re_N} E^Q\exp\{1_{A_N}(\omega)\}.$$

Поскольку логарифм является непрерывной монотонной функцией и для любой меры $Q \in \Re_N$ $Q(A_N) < 1$, то из этого неравенства получим

$$\ln V_0^{\lambda} \le \ln \sup_{Q \in \Re_N} E^Q\exp\{1_{A_N}(\omega)\} = \sup_{Q \in \Re_N} \ln E^Q\exp\{1_{A_N}(\omega)\} =$$
$$= \sup_{Q \in \Re_N} \ln E^Q[e1_{A_N}(\omega) + 1_{\bar{A}_N}(\omega)\} =$$
$$= \sup_{Q \in \Re_N} \ln E^Q\{(e-1)1_{A_N}(\omega) - 1\} =$$
$$= \sup_{Q \in \Re_N} \ln\{(e-1)Q(A_N) + 1\} < \ln\{(e-1) + 1\} = 1.$$

Следовательно, $\ln V_0^{\lambda} < 1$

Лемма 1 доказана. ♦

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим два платежных обязательства $f_N(S.)$ и $1_{A_N}(\omega)$, где $A_N = \Omega \backslash \bar{A}_N$, а множество $\bar{A}_N(\omega) \triangleq \left\{\omega \in \Omega: \bigcap_{i=1}^{N}\bigcap_{j=1}^{d}\{S_i^{(j)} \ge \lambda_i^{(j)}\}\right\}$. Из теоремы 1 следует, что, относительно любой меры $Q \in \Re_N$, платежные обязательства $f_N(S.)$ и $1_{A_N}(\omega)$ допускают, соответственно, представления

$$f_N(S.) = \ln V_0^* + \sum_{i=1}^{N}(\gamma_i^*, \Delta S_i) - C_N^*,$$

$$1_{A_N}(\omega) = \ln V_0^{\lambda} + \sum_{i=1}^{N}(\gamma_i^{\lambda}, \Delta S_i) - C_N^{\lambda}\ Q\text{-п. н.}$$

Определим портфель $\pi^\alpha = \{\beta_t^\alpha, \gamma_t^\alpha\}_{t \in N_0}$ следующим образом

$$\beta_t^\alpha = \beta_t^* - c\beta_t^\lambda, \quad \gamma_t^\alpha = \gamma_t^* - c\gamma_t^\lambda, \qquad (35)$$

где γ_t^* и γ_t^λ определяются, соответственно, выражениями (6) и (10), а β_t^* и β_t^γ соответственно выражениями (7) и (11). Тогда для любого $t \in N_0$ капитал $X_t^{\pi^\alpha}$ портфеля π^α, относительно любой меры $Q \in \Re_N$,

$$X_t^{\pi^\alpha} = \beta_t^\alpha + (S_t, \gamma_t^\alpha).$$

С учетом равенств (35)

$$X_t^{\pi^\alpha} = \beta_t^\alpha + (S_t, \gamma_t^\alpha) = \beta_t^* - c\beta_t^\lambda + (S_t, \gamma_t^* - c\gamma_t^\gamma) = \\ = X_t^{\pi^*} - cX_t^{\pi^\lambda}, \qquad (36)$$

где $X_t^{\pi^*}$ и $X_t^{\pi^\lambda}$ — капиталы, соответственно, портфелей $\pi^* = \{\beta_t^*, \gamma_t^*\}_{t \in N_0}$ и $\pi^\lambda = \{\beta_t^\lambda, \gamma_t^\lambda\}_{t \in N_0}$ в момент времени $t \in N_0$.

Из теоремы 1 следует, что для любого $t \in N_0$ капитал $X_t^{(\pi^*, C^*)}$ ($X_t^{(\pi^\lambda, C^\lambda)}$) портфеля с потреблением (π^*, C^*) ((π^λ, C^λ)) допускает, относительно любой меры $Q \in \Re_N$, представление

$$X_t^{(\pi^*, C^*)} = \ln V_t^* = X_t^{\pi^*} - C_t^* (X_t^{(\pi^\lambda, C^\lambda)} = \ln V_t^\lambda = \\ = X_t^{(\pi^\lambda)} - C_t^\lambda), \qquad (37)$$

где $\{C_t^*\}_{t \in N_0}$ ($\{C_t^\lambda\}_{t \in N_0}$) — возрастающая последовательность определяемая соотношением (8) ((12)). Капитал (36) с учетом представления (37) можно переписать в виде Q-п. н.

$$X_t^{\pi^\alpha} = X_t^{\pi^*} - cX_t^{\pi^\lambda} = X_t^{(\pi^*, C^*)} - cX_t^{(\pi^\lambda, C^\lambda)} + C_t^* - cC_t^\lambda.$$

Отсюда следует, что:

а) $\chi^\alpha = \{\chi_t^\alpha\}_{t \in N_0}$, где $\chi_t^\alpha = C_t^* - cC_t^\lambda$, — согласованная с фильтрацией $\{F_t\}_{t \in N_0}$ последовательность, имеющая ограниченную вариацию, причем $\chi_0^\alpha = 0$;

б) пара (π^α, χ^α) является портфелем с ограниченной вариацией.

Следовательно, для любого $t \in N_0$ определена F_t-измеримая случайная величина

$$X_t^{(\pi^\alpha, \chi^\alpha)} \triangleq X_t^{(\pi^*, C^*)} - cX_t^{(\pi^\lambda, C^\lambda)} = X_t^{\pi^\alpha} - \chi_t^\alpha. \qquad (38)$$

— капитал портфеля с ограниченной вариацией (π^α, χ^α).

Проверим, что построенный портфель π^α самофинансирующий, т. е. для любого $t \in N_1$ выполняется равенство Q-п. н.

$$\Delta\beta_t^\alpha + (S_{t-1}, \Delta\gamma_t^\alpha) = 0. \qquad (39)$$

Действительно, из равенств (35):

$$\Delta\beta_t^\alpha + (S_{t-1}, \Delta\gamma_t^\alpha) = \beta_t^\alpha - \beta_{t-1}^\alpha + (S_{t-1}, \gamma_t^\alpha) - \\ - (S_{t-1}, \Delta\gamma_{t-1}^\alpha) = \beta_t^* - c\beta_t^\lambda - (\beta_{t-1}^* - c\beta_{t-1}^\lambda) + \\ + (S_{t-1}, \gamma_t^* - c\gamma_t^\lambda) - (S_{t-1}, \gamma_{t-1}^* - c\gamma_{t-1}^\lambda) = \\ = \Delta\beta_t^* + (S_{t-1}, \Delta\gamma_t^*) - c(\Delta\beta_t^\lambda + (S_{t-1}, \Delta\gamma_t^\lambda)).$$

Учитывая в последнем равенстве, что портфели π^* и π^λ — самофинасирующие, получаем равенство (39).

Покажем, что портфель с ограниченной вариацией (π^α, χ^α) является искомым квантильным суперхеджирующим. Из формулы (38) следует, что капитал портфеля (π^α, χ^α) в момент времени N Q-п. н.

$$X_N^{(\pi^\alpha, \chi^\alpha)} = f_N(S.) - c1_{A_N}(\omega).$$

Отсюда следует, что Q-п. н. справедливы равенства

$$\{\omega \in \Omega: X_N^{(\pi^\alpha, \chi^\alpha)} - f_N(S.) \ge 0\} = \{\omega \in \Omega: -c1_{A_N}(\omega) \ge 0\} = \\ = \{\omega \in \Omega: 1_{A_N}(\omega) \le 0\} = \{\omega \in \Omega: 1_{A_N}(\omega) = 0\} = \\ = \left\{\omega \in \Omega: \bigcap_{i=1}^{N} \bigcap_{j=1}^{d} \{S_i^{(j)} \ge \lambda_i^{(j)}(\alpha)\}\right\}.$$

Поэтому, относительно любой меры $Q \in \Re_N$, в силу условия теоремы и последнего выражения имеем

$$Q\left\{X_N^{(\pi^\alpha, \chi^\alpha)} - f_N(S.) \ge 0\right\} = \\ = Q\left\{\bigcap_{i=1}^{N} \bigcap_{j=1}^{d} \{S_i^{(j)} \ge \lambda_i^{(j)}(\alpha)\}\right\} \ge 1 - \alpha.$$

Из формулы (38) и утверждения теоремы 1 следует, что начальный капитал

$$X_0^{(\pi^\alpha, \chi^\alpha)} = X_0^{(\pi^*, C^*)} - cX_0^{(\pi^\lambda, C^\lambda)} = c(1 - \ln V_0^\lambda).$$

Таким образом, с учетом леммы 1 получаем

$$X_0^{(\pi^\alpha, \chi^\alpha)} = c(1 - \ln V_0^\lambda) > 0.$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство леммы 2. Проводя рассуждения, аналогичные проведенным в п. 3.1, и учитывая соотношения (29) и (30), легко показать, что $\ln V_t^\lambda(S_t)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\ln V_t^\lambda(S_t) = \max[\ln V_{t+1}^\lambda(S_t), \\ p^* \ln V_{t+1}^\lambda(S_t(1 + a)) + q^* \ln V_{t+1}^\lambda(S_t(1 + b))], \\ \ln V_t^\lambda(S_t)|_{t = N} = 1_{\{S_n < \lambda_N\}}. \qquad (40)$$

Докажем, что решение рекуррентного соотношения (40) имеет вид

$$\ln V_t^\lambda(x) = 1_{\{x < \lambda\}} + \sum_{i=1}^{N-t} (p^*)^i 1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+a)^{i-1}} \le x < \frac{\lambda}{(1+a)^i}\right\}}. \qquad (41)$$

Доказательство проведем методом индукции «назад». Очевидно, что $\ln V_N^\lambda(x) = 1_{\{x<\lambda\}}$.

Положим $\ln V_t^\lambda(x) = 1_{\{x<\lambda\}} + \sum_{i=1}^{N-t}(p^*)^i 1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+a)^{i-1}} \le x < \frac{\lambda}{(1+a)^i}\right\}}$.

Покажем, что $\ln V_{t-1}^\lambda(x) = 1_{\{x<\lambda\}} + \sum_{i=1}^{N-t+1}(p^*)^i \times$ $\times\, 1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+a)^{i-1}} \le x < \frac{\lambda}{(1+a)^i}\right\}}$. Из соотношения (40) следует

$$\ln V_{t-1}^\lambda(x) = \max\left[1_{\{x<\lambda\}} + \sum_{i=1}^{N-t}(p^*)^i 1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+a)^{i-1}} \le x < \frac{\lambda}{(1+a)^i}\right\}},\right.$$

$$p^*\left\{1_{\{x(1+a)<\lambda\}} + \sum_{i=1}^{N-t}(p^*)^i 1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+a)^{i-1}} \le x(1+a) < \frac{\lambda}{(1+a)^i}\right\}}\right\} +$$

$$\left. + q^*\left\{1_{\{x(1+b)<\lambda\}} + \sum_{i=1}^{N-t}(p^*)^i 1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+a)^{i-1}} \le x(1+b) < \frac{\lambda}{(1+a)^i}\right\}}\right\}\right] =$$

$$= \max\left[1_{\{x<\lambda\}} + \sum_{i=1}^{N-t}(p^*)^i 1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+a)^{i-1}} \le x < \frac{\lambda}{(1+a)^i}\right\}},\right.$$

$$p^*\left\{1_{\left\{x<\frac{\lambda}{1+a}\right\}} + \sum_{i=1}^{N-t}(p^*)^i 1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+a)^{i}} \le x < \frac{\lambda}{(1+a)^{i+1}}\right\}}\right\} +$$

$$\left. + q^*\left\{1_{\left\{x<\frac{\lambda}{1+b}\right\}} + \sum_{i=1}^{N-t}(p^*)^i 1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+a)^{i-1}(1+b)} \le x < \frac{\lambda}{(1+a)^i(1+b)}\right\}}\right\}\right]. \quad (42)$$

Поскольку для любого $i \in N^+$ и $j > i$ справедливо неравенство

$$(p^*)^i = (p^*)^i(p^* + q^*) = (p^*)^{i+1} + q^*(p^*)^i > (p^*)^{i+1} + q^*(p^*)^j,\quad j > i,$$

то правую часть выражения (42) можно записать в виде

$$\ln V_{t-1}^\lambda(x) = 1_{\{x<\lambda\}} + \sum_{i=1}^{N-t}(p^*)^i 1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+a)^{i-1}} \le x < \frac{\lambda}{(1+a)^i}\right\}} +$$

$$+ (p^*)^{N-t+1} 1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+a)^{N-t}} \le x < \frac{\lambda}{(1+a)^{N-t+1}}\right\}} =$$

$$= 1_{\{x<\lambda\}} + \sum_{t=1}^{N-(t-1)}(p^*)^i 1_{\left\{\frac{\lambda}{(1+a)^{i-1}} \le x < \frac{\lambda}{(1+a)^i}\right\}}.$$

Таким образом, основной шаг индукции доказан. Равенство (32) следует из выражений (30) и (41). Лемма 2 доказана.

Замечание 5. Методом индукции назад легко показать, что $\ln V_t^\lambda(x)$, удовлетворяющий соотношению (40), обладает следующими свойствами:

1) для любого $t \in N_0$ функция $\ln V_t^\lambda(x)$ монотонно убывающая по x;

2) для любого $x \in R^+$ справедливо неравенство $\ln V_t^\lambda(x) \ge \ln V_{t+1}^\lambda(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ширяев А.Н.* Вероятность. — М.: Наука, 1980. — 576 с.
2. *Ширяев А.Н.* Основы стохастической финансовой математики (теория). — Т. 2. — М.: Фазис, 1998. — 1017 с.
3. *Фельмер Г., Шид А.* Введение в стохастические финансы. Дискретное время. — М.: МЦНМО, 2008. — 496 с.
4. *Зверев О.В., Хаметов В.М.* Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках (дискретное время) // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2011. — Т. 18, вып. 1. — С. 26—54.
5. *Зверев О.В., Хаметов В.М.* Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках (дискретное время) // Там же. Вып. 2. — С. 193—204.
6. *Зверев О.В.* Расчет Европейского опциона на полном биномиальном (*B*, *S*)-рынке с квантильным критерием // Тез. докл. науч.-техн. конф. студентов, аспирантов и молодых специалистов МГИЭМ. — М., 2007. — С. 31.
7. *Мельников А.В., Волков С.Н., Нечаев М.М.* Математика финансовых обязательств. — М.: ГУВШЭ, 2001. — 260 с.
8. *Föllmer H., Leukert P.* Quantile hedging // Finance and Stochastics. — 1999. — Vol. 3. — P. 251—273.
9. *Föllmer H., Leukert P.* Efficient hedging: cost versus shortfall risk // Finance and Stochastics. — 2000. — Vol. 4. — P. 117—146.
10. *Leung T., Song Q., Jie Yang* Outperformance portfolio optimization via the equivalence of pure and randomized hypothesis testing // Finance Stoch. — 2013. — Vol. 17. — P. 839—870.
11. *Григорьев П.В., Кан Ю.С.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг // Автоматика и телемеханика. — 2004. — № 2. — С. 179—197.
12. *Бунто Т.В., Кан Ю.С.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг с ненулевой вероятностью разорения // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 5. — С. 114—136.
13. *Губерниев В.А., Кибзун А.И.* Последовательное хеджирование опционной позиции: анализ и модернизация // Автоматика и телемеханика. — 1999. — Т. 1. — С. 113—125.
14. *Кибзун А.И., Соболь В.Р.* Модернизация стратегии последовательного хеджирования опционной позиции // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. — 2013. — Т. 19, № 2. — С. 179—192.
15. *Кибзун А.И., Наумов А.В., Норкин В.И.* О сведении задачи квантильной оптимизации с дискретным распределением к задаче смешанного целочисленного программирования // Автоматика и телемеханика. — 2013. — № 6. — С. 66—86.
16. *Воробьев Н.Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. — М.: Физматлит, 1984. — 496 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.С. Манделем.

Зверев Олег Владимирович — инженер,
☎ (49643) 9-21-78, ✉ zv-oleg@yandex.ru,

Хаметов Владимир Минирович — д-р физ.-мат. наук, профессор,
☎ (495) 467-28-03, ✉ khametovvm@mail.ru,

Национальный исследовательский университет —
Высшая школа экономики, г. Москва.