УДК 519.2

КВАНТИЛЬНОЕ ХЕДЖИРОВАНИЕ ОПЦИОНОВ ЕВРОПЕЙСКОГО ТИПА НА НЕПОЛНЫХ РЫНКАХ БЕЗ ТРЕНИЯ. Ч. 2. Минимаксное хеджирование

О.В. Зверев, В.М. Хаметов

Рассмотрено решение задачи расчета европейского опциона с квантильным критерием на многомерном неполном рынке без трения с дискретным временем. Предложен и обоснован минимаксный подход к квантильному хеджированию европейского опциона на многомерном неполном рынке. Доказано существование самофинансирующего портфеля, капитал которого обеспечивает исполнение платежного обязательства относительно наихудшей меры с заданным уровнем значимости.

Ключевые слова: европейский опцион, квантильное хеджирование, минимаксный портфель, неполный рынок, S-представление.

ВВЕДЕНИЕ

В первой части [1] настоящей работы были установлены условия существования решения задачи расчета европейского опциона с квантильным критерием уровня $1 - \alpha$ относительно любой меры из класса эквивалентных мер $\Re_N$. В работе [2] установлено существование наихудшей меры (см. теорему 5 в работе [2]), относительно которой $(1, S^{(1)}, ..., S^{(d)})$-рынок без трения является полным, при этом сама мера является мартингальной и дискретной (см. теоремы 11, 13 в той же работе). Опираясь на этот результат, мы обосновываем процедуру квантильного хеджирования европейского опциона относительно наихудшей меры уровня $1 - \alpha$, которая в статье названа минимаксной квантильной уровня $1 - \alpha$. Отметим, что в доступной нам научной литературе указанная задача не рассматривалась.

1. МИНИМАКСНОЕ ХЕДЖИРОВАНИЕ ЕВРОПЕЙСКОГО ОПЦИОНА НА МНОГОМЕРНОМ РЫНКЕ

Изложим некоторые результаты, полученные в работе [2] и касающиеся существования наихудшей меры и ее свойств — мартингальности и дискретности, а также существования минимаксного хеджирующего портфеля. Эти результаты понадобятся нам для обоснования существования минимаксного квантильного хеджирования уровня $1 - \alpha$ на $(1, S^{(1)}, ..., S^{(d)})$-рынке без трения, описание которого было дано нами в первой части [1] статьи.

1.1. Напомним ряд обозначений [1]. Пусть $F_t \triangleq \sigma\{S_n, n \le t\}$-σ-алгебра, где $\{S_n, F_n\}_{n \ge 0}$ — d-мерная последовательность цен рисковых активов, а

$$I_0^{Q, \gamma_1^N}(S_0) \triangleq E^Q\left[\exp\left\{f_N(S.) - \sum_{i=1}^{N}(\gamma_i, \Delta S_i)\right\}|F_0^S\right] —$$

оценка бистратегии (Q, γ_1^N). Обозначим

$$V_t^* \triangleq \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N} \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \Re_N} I_t^{Q, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t) —$$

верхнее гарантированное значение оценки бистратегии (Q, γ_1^N) по наблюдениям за ценами рисковых активов до момента времени $t \in N_0$, где $\Re_N$ — множество эквивалентных вероятностных мер, m_N — множество мартингальных вероятностных мер, D_t^N — множество допустимых t-стратегий.

Определение 1. Бистратегию (Q^*, γ_1^{*N}) такую, что справедливо равенство

$$V_0^* = I_0^{Q^*, \gamma_1^{*N}}(S_0), \quad (1)$$

будем называть минимаксной, вероятностную меру Q^* — наихудшей, а стратегию $\gamma_1^{*N} \in D_1^N$ — минимаксной. ♦

Для удобства изложения приведем без доказательства две теоремы [2, *см. теоремы 3 и 5*].

Теорема 1. *Пусть фильтрация* $\{F_t^S\}_{t \in N_0}$ *— универсально полна,* $f_N(S.)$ *—* F_N^S*-измеримая ограниченная случайная величина,* $|\Re_N \cap m_N| > 1$*, а множество* $\Re_N$ *относительно слабо компактно. Тогда для любого* $t \in N_1$ *существуют* $\gamma_t^* \in D_t$ *и вероятностная мера* Q^**, являющаяся наихудшей, такие, что справедливы равенства*

$$V_{t-1}^* = \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_t \in D_t} \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \Re_N} E^Q\Big[V_t^* e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} | F_{t-1}^S\Big] =$$

$$= \left(\operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \Re_N} E^Q[V_t^* e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} | F_{t-1}^S]\right)\bigg|_{\gamma_t = \gamma_t^*} =$$

$$= E^{Q^*}\Big[V_t^* e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | F_{t-1}^S\Big].$$

Определение 2. Пару (Q^*, π^*) такую, что выполняется равенство (1), где $\pi^* \in SF$, назовем минимаксным решением задачи расчета европейского опциона с платежным обязательством $f_N(S.)$, а портфель π^* — минимаксным.

Определение 3 [4]. Назовем $(1, S^{(1)}, ..., S^{(d)})$-рынок наихудшим полным, если относительно наихудшей вероятностной меры Q^* и портфеля $\pi^* \in SF$ для любого F_N^S-измеримого ограниченного платежного обязательства $f_N(S.)$ и капитала $X_N^{\pi^*}$ портфеля $\pi^* \in SF$ в момент времени N имеет место равенство $Q^*(X_N^{\pi^*} = f_N(S.)) = 1$, при этом портфель π^* называют минимаксным хеджирующим. ♦

Нам понадобятся утверждения теорем 11—15 из работы [2] в форме, удобной для изложения наших результатов.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда* $(1, S^{(1)}, ..., S^{(d)})$*-рынок является наихудшим полным. Кроме того, справедливы утверждения:*

1) *мера* $Q^* \notin \Re_N$,

2) *мера* Q^* *— единственная дискретная мартингальная мера, носитель которой сосредоточен не более чем в* $(d + 1)^{N+1}$ *точках;*

3) *существует минимаксный хеджирующий портфель* π^**, а именно*

а) *для любого* $t \in N_1$ *существует предсказуемая* d*-мерная последовательность* $\{\gamma_t^*\}_{t \in N_1}$*, элементы которой удовлетворяют соотношениям*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \Re_N} E^Q\Big[V_t^* e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} | F_{t-1}^S\Big] =$$

$$= \left(\operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \Re_N} E^Q[V_t^* e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} | F_{t-1}^S]\right)\bigg|_{\gamma_t = \gamma_t^*} =$$

$$= E^{Q^*}\Big[V_t^* e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | F_{t-1}^S\Big]; \quad (2)$$

б) *для любого* $t \in N_1$ *существует предсказуемая последовательность* $\{\beta_t^*\}_{t \in N_0}$*, элементы которой удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{cases} \Delta\beta_t^* + (S_{t-1}, \Delta\gamma_t^*) = 0, \\ \beta_t^*\big|_{t=0} = \beta_0^*, \end{cases} \quad (3)$$

причем $\beta_t^*\big|_{t=0} = \beta_0^* = \ln V_0^*$, а $\gamma_0^* = 0$;

в) *для любого* $t \in N_0$ *капитал портфеля* π^* $X_t^{\pi^*} = \beta_t^* + (S_t, \gamma_t^*)$*, причем*

$$Q^*(X_t^{\pi^*} = \ln V_t^*) = 1;$$

4) *относительно меры* Q^* *платежное обязательство* $f_N(S.)$ *допускает представление*

$$Q^*\left(f_N(S.) = E^{Q^*}[f_N(S.)|F_0] + \sum_{i=1}^{N} (\gamma_i^*, \Delta S_i)\right) = 1.$$

1.2. Пусть $A_N(\omega)$ — любое F_N-измеримое множество. Рассмотрим задачу расчета европейского опциона на $(1, S^{(1)}, ..., S^{(d)})$-рынке с платежным обязательством вида $1_{A_N}(\omega)$. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда, в силу ограниченности платежного обязательства вида $1_{A_N}(\omega)$, выполнены все утверждения теоремы 2.

Как и в первой [1] части статьи, во избежание повторов в изложении материала, когда используется платежное обязательство вида $1_{A_N}(\omega)$, сделаем переобозначения в утверждениях теоремы 2: вместо символа «*» (звездочка вверху) будем использовать символ «λ» (вверху). Таким образом, для любого $t \in N_0$:

1) верхнее гарантированное значение оценки бистратегии (Q, γ_1^N) $V_t^\lambda \triangleq \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N} \operatorname*{ess\,sup}_{Q \in \Re_N} I_t^{Q, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (2) с граничным условием $V_t^\lambda\big|_{t=N} = \exp\{1_{A_N}(\omega)\}$;

2) существует самофинансирующий портфель $\pi^{\lambda} = \{\beta_t^{\lambda}, \gamma_t^{\lambda}\}_{t \in N_1}$, где $\{\gamma_t^{\lambda}\}_{t \in N_1}$ — допустимая предсказуемая последовательность, определяемая равенством

$$\underset{\gamma \in D_{t+1}}{\text{ess inf}}\ \underset{Q \in \Re_N}{\text{ess sup}} E^Q\Big[V_{t+1}^{\lambda}\, e^{-(\gamma,\, \Delta S_{t+1})} | F_t\Big] =$$

$$= \underset{Q \in \Re_N}{\text{ess sup}} E^Q\Big[V_{t+1}^{\lambda}\, e^{-(\gamma_{t+1}^{\lambda},\, \Delta S_{t+1})} | F_t\Big], \qquad (4)$$

$\{\beta_t^{\lambda}\}_{t \in N_1}$ — предсказуемая последовательность, удовлетворяющая рекуррентному соотношению

$$\Delta\beta_t^{\lambda} + (S_{t-1}, \Delta\gamma_t^{\lambda}) = 0, \qquad (5)$$

причем $\beta_t^{\lambda}\big|_{t=0} = \ln V_0^{\lambda}$, а $\gamma_0^{\lambda} = 0$,

3) для любого $\omega \in \operatorname{supp} Q^*$

$$1_{A_N}(\omega) = Q^*(A_N) + \sum_{i=1}^{N} (\gamma_i^{\lambda}, \Delta S_i)(\omega),$$

причем

$$\Delta \ln V_t^{\lambda}(\omega) = (\gamma_t^{\lambda}, \Delta S_t)(\omega),\ \ln V_t^{\lambda}|_{t=N}(\omega) = 1_{A_N}(\omega).$$

Замечание 1. Из теоремы 12 работы [2] следует, что относительно наихудшей меры потребление равно нулю, т. е.

$$Q^*(C_t^* = 0) = 1.$$

2. МИНИМАКСНОЕ КВАНТИЛЬНОЕ ХЕДЖИРОВАНИЕ ЕВРОПЕЙСКОГО ОПЦИОНА НА МНОГОМЕРНОМ РЫНКЕ БЕЗ ТРЕНИЯ

Дадим определение минимаксного решения задачи расчета европейского опциона с квантильным критерием на многомерном рынке без трения и установим условия существования такого решения.

Определение 4. Минимаксным решением задачи расчета европейского опциона с квантильным критерием уровня $1 - \alpha$ на многомерном рынке назовем триплет $(X_0^{\pi^{\alpha}}, \pi^{\alpha}, Q^*)$, где портфель $\pi^{\alpha} \in SF$ и наихудшая мера Q^* такие, что для капитала $X_N^{\pi^{\alpha}}$ портфеля π^{α}, справедливо неравенство

$$Q^*(X_N^{\pi^{\alpha}} \geq f_N(S.)) \geq 1 - \alpha,$$

где $\alpha \in (0, 1)$. Портфель π^{α} назовем минимаксным квантильным уровня $1 - \alpha$. ♦

Пусть $c \triangleq \ln V_0^*$, где $\{V_t^*\}_{t \in N_0}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (2). Доказано, что $c > 0$ [2]. Обозначим $S_t^{(j)}$ — j-я компонента d-мерного вектора S_t, $t \in N_0$.

Приводимое далее утверждение устанавливает условия существования минимаксного решения задачи расчета европейского опциона с квантильным критерием уровня $1 - \alpha$ на многомерном $(1, S^{(1)}, ..., S^{(d)})$-рынке без трения.

Из теоремы 2 в работе [1] и теоремы 2 (см. п. 1.1) следует

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы* 2. *Пусть для каждого* $\alpha \in (0, 1)$ *найдутся* $\lambda_t^{(j)}(\alpha) \in R^+$, $j = \overline{1, d}$, $t \in N_0$, *такие, что* $Q^*\left(\bigcap_{t=1}^{N} \bigcap_{j=1}^{d} \{S_t^{(j)} \geq \lambda_t^{(j)}(\alpha)\}\right) \geq 1 - \alpha$. *Тогда существует решение задачи расчета европейского опциона с квантильным критерием уровня* $1 - \alpha$, *т. е. существуют:*

1) *самофинансирующий портфель* $\pi^{\alpha} = \{\beta_t^{\alpha}, \gamma_t^{\alpha}\}_{t \in N_0}$ *такой, что:*

а) $\{\gamma_t^{\alpha}\}_{t \in N_0}$ — *предсказуемая последовательность, элементы которой определяются равенством* $\gamma_t^{\alpha} = \gamma_t^* - c\gamma_t^{\lambda}$, *причем* $\gamma_t^* \in D_1^N$ *определяются из соотношения* (2), а $\gamma_t^{\lambda} \in D_1^N$ — из равенства (4);

б) $\{\beta_t^{\alpha}\}_{t \in N_0}$ — *предсказуемая последовательность, элементы которой определяются равенством* $\beta_t^{\alpha} = \beta_t^* - c\beta_t^{\lambda}$, *причем* β_t^* *и* β_t^{λ} *определяются соотношениями* (3) и (5) *соответственно;*

2) *для любого* $t \in N_0$ *капитал* $X_t^{\pi^{\alpha}}$ *портфеля* π^{α} *удовлетворяет равенству*

$$Q^*(X_t^{\pi^{\alpha}} = \beta_t^{\alpha} + (S_t, \gamma_t^{\alpha})) = 1;$$

3) *начальный капитал* $X_0^{\pi^{\alpha}}$ *портфеля* π^{α} *удовлетворяет неравенству*

$$X_0^{\pi^{\alpha}} \geq c(1 - \alpha); \qquad (6)$$

4) *портфель* π^{α} — *минимаксный квантильный уровня* $1 - \alpha$, *т. е.*

$$Q^*(X_N^{\pi^{\alpha}} \geq f_N(S.)) \geq 1 - \alpha.\ ♦$$

Доказательство теоремы 3 почти дословно повторяет доказательство теоремы 2 из работы [1]. Относительно наихудшей меры Q^* потребление тривиально, т. е. для любого $t \in N_0$ $C_t^* = C_t^{\lambda} = 0$.

Замечания 2. 1. Теорема 3 дает методику построения решения задачи расчета европейского опциона с квантильным критерием уровня $1 - \alpha$ на полных рынках без трения.

2. Доказано [2], что если мера $Q^* \notin \Re_N$ — дискретная и сосредоточена не более чем в $(d + 1)^{N+1}$ точке, то она эквивалентна любой дискретной ме-

ре, имеющей тот же носитель. Поэтому существование $\lambda_t^{(j)}(\alpha) \in R^+$ таких, что выполнено неравенство $Q^*\left(\bigcap_{t=1}^{N}\bigcap_{j=1}^{d}\{S_t^{(j)} \geq \lambda_t^{(j)}(\alpha)\}\right) \geq 1 - \alpha$ следует из леммы Неймана — Пирсона.

3. ПРИМЕР РАСЧЕТА МИНИМАКСНОГО КВАНТИЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ УРОВНЯ 1 – α НА ОДНОМЕРНОМ РЫНКЕ БЕЗ ТРЕНИЯ

3.1. Постановка задачи. Пусть на стохастическом базисе $(\Omega, F, (F_t)_{t \in N_0}, P)$ задана одномерная согласованная случайная последовательность $(S_t, F_t)_{t \in N_0}$, описывающая эволюцию цен рискового актива, которая удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S_t = S_{t-1}(1 + \rho_t), \quad S_t|_{t=0} = S_0 > 0,$$

где $(\rho_t)_{t \in N_0}$ — последовательность случайных величин, причем экономический смысл ρ_t — доходность рискового актива в момент времени $t \in N_1$. Без ограничения общности можно считать, что для любого $t \in N_0$ σ-алгебра $F_t = \sigma(S_0, \rho_1, ..., \rho_t)$. Обозначим через $\underline{\underline{\mathfrak{R}_N}}$ множество вероятностных мер таких, что:

— $(\rho_t, F_t)_{t \in N_0}$ — последовательность случайных величин, элементы которой независимы в совокупности и одинаково распределены;

— для любого $t \in N_1$ носитель любой меры $Q \in \underline{\underline{\mathfrak{R}_N}}$, обозначаемый supp Q, равен $[a, b]$, причем $-1 < a < 0 < b < \infty$.

Из этих условий следует, что:

— для любого $t \in N_0$ случайная величина $S_t > 0$ Q-п. н.;

— последовательность $(S_t, F_t)_{t \in N_0}$ относительно любой меры $Q \in \underline{\underline{\mathfrak{R}_N}}$ является однородной марковской.

3.2. Приведем минимаксное решение задачи расчета европейского опциона на исходном неполном относительно любой меры $Q \in \underline{\underline{\mathfrak{R}_N}}$ $(1, S)$-рынке. Пусть g: $R^+ \to R^1$ — ограниченная борелевская функция, обозначаемая $g(x)$. Положим, что платежное обязательство имеет вид $g(S_N) = g(x)|_{x = S_N}$.

Заметим, что из результатов работы [3, *см. п. 6.3, 6.4*], следует:

1) существует единственная наихудшая дискретная мартингальная мера Q^*, носитель которой сосредоточен в точках a и b, т. е. supp $Q^* = \{a, b\}$, причем

$$Q^*(\rho_t = a) = 1 - q^* = \frac{b}{|a| + b},$$

$$Q^*(\rho_t = b) = q^* = \frac{|a|}{|a| + b}; \qquad (7)$$

2) относительно меры Q^* случайная последовательность $(S_t, F_t^S)_{t \in N_0}$ — марковская;

3) V_t^* — марковская случайная функция, следовательно, существует функция V_t^*: $N_0 \times R^+ \to R^+$, обозначаемая $V_t^*(x)$, такая, что для любого $t \in N_0$ $V_t^* = V_t^*(x)|_{x = S_t} = V_t^*(S_t)$;

4) $D_t = R^1$;

5) функция $V_t^*(S_t)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} V_t^*(S_t) = \inf\limits_{\gamma \in R^1} E^{Q^*}\left[V_{t+1}^*(S_{t+1})e^{-\gamma S_t \rho_{t+1}} | F_t^S\right], \\ V_t^*(S_t)|_{t=N} = \exp\{g(S_N)\}, \end{cases} \qquad (8)$$

из которого следует, что рассматриваемый $(1, S)$-рынок относительно меры Q^* является полным.

Перепишем с учетом выражения (7) соотношение (8):

$$\begin{cases} V_t^*(S_t) = \inf\limits_{\gamma \in R^1}\Big[(1-q^*)V_{t+1}^*(S_t(1+a))e^{\gamma S_t|a|} + \\ + q^* V_{t+1}^*(S_t(1+b))e^{-\gamma S_t b}\Big], \\ V_t^*(S_t)|_{t=N} = \exp\{g(S_N)\}. \end{cases} \qquad (9)$$

Очевидно, что выражение, стоящее под знаком инфимума, является ограниченной снизу и выпуклой функцией, значение которой стремится к плюс бесконечности, когда $\gamma \to \pm\infty$. Поэтому существует $\gamma_{t+1}^* \in D_{t+1}$ такое, что

$$\begin{aligned} &\inf_{\gamma \in R^1}[(1 - q^*)V_{t+1}^*(S_t)(1 + a))e^{\gamma S_t|a|} + \\ &+ q^*V_{t+1}^*(S_t(1 + b))e^{-\gamma S_t b}] = \\ &= (1 - q^*)V_{t+1}^*(S_t(1 + a))e^{\gamma_{t+1}^* S_t|a|} + \\ &+ q^*V_{t+1}^*(S_t(1 + b))e^{\gamma_{t+1}^* S_t b}. \end{aligned} \qquad (10)$$

Отсюда следует, что

$$\gamma_{t+1}^* = \frac{1}{S_t(b + |a|)}\ln\frac{V_{t+1}^*(S_t(1+b))}{V_{t+1}^*(S_t(1+a))}. \qquad (11)$$

Тогда, опуская простые, но громоздкие промежуточные выкладки,

$$V_t^*(S_t) = (V_{t+1}^*(S_t(1+a)))^{1-q^*}(V_{t+1}^*(S_t(1+b)))^{q^*},$$

откуда

$$\ln V_t^*(S_t) = (1-q^*)\ln(V_{t+1}^*(S_t(1+a))) + q^*\ln(V_{t+1}^*(S_t(1+b))). \quad (12)$$

Так же, как и в работе [3] легко показать, что решение рекуррентного соотношения (12) имеет вид:

$$\ln V_t^*(S_t) = \Phi_{N-t}^*(S_t) = \sum_{i=0}^{N-t} g(S_t(1+a)^{N-t-i} \times (1+b)^i)\, C_{N-t}^i(1+q^*)^{N-t-i}(q^*)^i. \quad (13)$$

Из выражений (11) и (13) следует, что

$$\gamma_{t+1}^* = \frac{\Phi_{N-t-1}^*(S_t(1+b)) - \Phi_{N-t-1}^*(S_t(1+a))}{S_t(b+|a|)}. \quad (14)$$

Из теоремы 2 следует, что в момент времени $t \in N_0$ капитал портфеля π^* в силу равенства (13)

$$X_t^{\pi^*} = \ln V_t^*(S_t) = \Phi_{N-t}^*(S_t). \quad (15)$$

Из условия самофинансируемости, выражений (13) и (14) следует, что количество безрискового актива в момент времени $t \in N_0$

$$\beta_{t+1}^* = \Phi_{N-t-1}^*(S_t) - \frac{\Phi_{N-t-1}^*(S_t(1+b)) - \Phi_{N-t-1}^*(S_t(1+a))}{b+|a|}. \quad (16)$$

Очевидно, что $X_N^{\pi^*} = \ln V_N^*(S_N) = g(S_N)$.

3.3. Решим задачу расчета европейского опциона на наихудшем полном $(1, S)$-рынке с платежным обязательством $1_{\Gamma_N}(S_N)$, где Γ_N — любое борелевское множество.

Сделав выкладки, аналогичные приведенным в п. 3.2, легко установить, что для любого $t \in N_0$:

1) $V_t^\lambda = V_t^\lambda(S_t)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению:

$$\begin{cases} V_t^\lambda(S_t) = \inf\limits_{\gamma \in R^1}\Big[(1-q^*)V_{t+1}^\lambda(S_t(1+a))e^{\gamma S_t|a|} + \\ + q^* V_{t+1}^\lambda(S_t(1+b))e^{-\gamma S_t b}\Big], \\ V_t^\lambda(S_t)\big|_{t=N} = \exp\{1_{\Gamma_N}(S_N)\}; \end{cases}$$

2) $$\gamma_t^\lambda = \frac{1}{S_{t-1}(b+|a|)}\ln\frac{V_t^\lambda(S_{t-1}(1+b))}{V_t^\lambda(S_{t-1}(1+a))}; \quad (17)$$

3) $\ln V_t^\lambda(S_t)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\ln V_t^\lambda(S_t) = (1-q^*)\ln(V_{t+1}^\lambda(S_t(1+a))) + q^*\ln(V_{t+1}^\lambda(S_t(1+b))); \quad (18)$$

4) количество безрискового актива β_t^λ определяется из условия самофинансируемости

$$\Delta\beta_t^\lambda + (S_{t-1}, \Delta\gamma_t^\lambda), \quad \beta_0^\lambda = \ln V_0^\lambda;$$

5) капитал портфеля $\pi^\lambda = \{\beta_t^\lambda, \gamma_t^\lambda\}_{t \in N_0}$

$$X_t^{\pi^\lambda} = \ln V_t^\lambda(S_t), \quad (19)$$

причем $X_N^{\pi^\lambda} = \ln V_N^\lambda(S_N) = 1_{\Gamma_N}(S_N)$.

3.4. Построим минимаксное решение задачи расчета европейского опциона платежным обязательством $1_{\{S_N \le \lambda\}}(\omega)$. Без ограничения общности можно считать, что $0 < S_0 < \infty$. Пусть отображение $\bar\psi(x):[0, N] \to R^+$, обозначаемое $\bar\psi(x)$, имеет вид

$$\bar\psi(x) \triangleq S_0(1+b)^x(1+a)^{N-x}.$$

Очевидно, что существует обратная функция $\bar\psi^{-1}$: $R^+ \to [0, N]$ к $\bar\psi(x)$, т. е. $\bar\psi^{-1}(\bar\psi(x)) = x$. Обозначим $\Delta_N = \sum_{t=1}^{N} 1_{\{\rho_t = b\}}$. Очевидно, что $\bar\psi(x)|_{x=\Delta_N} = S_N$. Следовательно,

$$Q^*\{\bar\psi(\Delta_N) = S_N\} = Q^*\{\bar\psi^{-1}(S_N) = \Delta_N\} = 1.$$

Пусть $x = \bar\psi^{-1}(\lambda)$, $\lambda \in R^+$. Тогда

$$Q^*\{S_N \le \lambda\} = Q^*\{\bar\psi(\Delta_N) \le \lambda\} = Q^*\{\Delta_N \le \bar\psi^{-1}(\lambda)\} = Q^*\{\Delta_N \le x\}.$$

Очевидно, что случайная величина Δ_N относительно меры Q^*, имеет биномиальное распределение с параметрами q^* (определяемым выражением (7)) и N. Следовательно, в силу непрерывности справа функции распределения $F_{\Delta_N}^*(x) = Q^*(\Delta_N \le x)$, существует квантиль уровня α, обозначаемая $x^*(\alpha)$, такая, что

$$Q^*\{\Delta_N(\omega) > x^*(\alpha)\} \ge 1 - \alpha.$$

Поэтому найдется $\lambda^*(\alpha) \in R^+$ такое, что

$$Q^*\{\Delta_N > x^*(\alpha)\} = Q^*\{\Delta_N > \bar\psi^{-1}(\lambda^*(\alpha))\} = Q^*\{\bar\psi(\Delta_N) > \lambda^*(\alpha)\} = Q^*\{S_N > \lambda^*(\alpha)\} = 1 - Q^*\{S_N \le \lambda^*(\alpha)\} = 1 - F_{\Delta_N}^*(\lambda^*(\alpha)).$$

Теперь, капитал $X_t^{\pi^\lambda}$ портфеля π^λ и стратегия γ_{t+1}^λ, для любого $t \in N_0$, имеют вид:

1) в силу (18), (19) капитал $X_t^{\pi^{\lambda^*(\alpha)}}$ портфеля $\pi^{\lambda^*(\alpha)}$ равен

$$X_t^{\pi^{\lambda^*(\alpha)}} = \ln V_t^{\lambda^*(\alpha)}(S_t) = \Phi_{N-t}^{\lambda^*(\alpha)}(S_t) = \sum_{i=0}^{N-t} 1_{\left\{S_t < \frac{\lambda^*(\alpha)}{(1+a)^{N-t-i}(1+b)^i}\right\}} \times C_{N-t}^i (1-q^*)^{N-t-i}(q^*)^i; \quad (20)$$

2) в силу (17) количество рискового актива $\gamma_{t+1}^{\lambda^*(\alpha)}$ равно

$$\gamma_{t+1}^{\lambda^*(\alpha)} = \frac{\Phi_{N-t-1}^{\lambda^*(\alpha)}(S_t(1+b)) - \Phi_{N-t-1}^{\lambda^*(\alpha)}(S_t(1+a))}{S_t(b+|a|)}; \quad (21)$$

3) в силу самофинансируемости количество безрискового актива $\beta_{t+1}^{\lambda^*(\alpha)}$ равно:

$$\beta_{t+1}^{\lambda^*(\alpha)} = \Phi_{N-t-1}^{\lambda^*(\alpha)}(S_t) - \frac{\Phi_{N-t-1}^{\lambda^*(\alpha)}(S_t(1+b)) - \Phi_{N-t-1}^{\lambda^*(\alpha)}(S_t(1+a))}{b+|a|}. \quad (22)$$

3.5. Опираясь на результаты пп. 3.1—3.4, построим минимаксный квантильный портфель уровня $1 - \alpha$ в задаче расчета европейского опциона с платежным обязательством $g(S_N)$.

Из теоремы 3 следует, что для любого $t \in N_0$:

— существует портфель $\pi^\alpha = \{\beta_t^\alpha, \gamma_t^\alpha\}_{t \in N_0}$:

$$\beta_t^\alpha = \beta_t^* - c\beta_t^{\lambda^*(\alpha)}; \quad (23)$$

— капитал портфеля π^α

$$X_t^{\pi^\alpha} = X_t^{\pi^*} - cX_t^{\pi^{\lambda^*(\alpha)}} = \ln V_t^* - c\ln V_t^{\lambda^*(\alpha)}; \quad (24)$$

— портфель π^α является минимаксным квантильным уровня $1 - \alpha$.

Из выражений (13)—(16) и (20)—(24) следует, что для любого $t \in N_0$:

— капитал портфеля π^α

$$X_t^{\pi^\alpha} = \Phi_{N-t}^\alpha(S_t) = \Phi_{N-t}^*(S_t) - c\Phi_{N-t}^{\lambda^*(\alpha)}(S_t) = \sum_{i=0}^{N-t}\left(g(S_t(1+a)^{N-t-i}(1+b)^i) - c1_{\left\{S_t < \frac{\lambda^*(\alpha)}{(1+a)^{N-t-i}(1+b)^i}\right\}}\right) C_{N-t}^i (1-q^*)^{N-t-i}(q^*)^i,$$

где $c = X_0^* = \ln V_0^*(S_0) = \Phi_N^*(S_0) = \sum_{i=0}^{N} g(S_0(1+a)^{N-i} \times (1+b)^i)\, C_N^i (1-q^*)^{N-i}(q^*)^i$,

— количество рискового актива

$$\gamma_{t+1}^\alpha = \frac{\Phi_{N-t-1}^\alpha(S_t(1+b)) - \Phi_{N-t-1}^\alpha(S_t(1+a))}{S_t(b+|a|)},$$

— количество безрискового актива

$$\beta_{t+1}^\alpha = \Phi_{N-t-1}^\alpha(S_t) - \frac{\Phi_{N-t-1}^\alpha(S_t(1+b)) - \Phi_{N-t-1}^\alpha(S_t(1+a))}{b+|a|}.$$

Таким образом, мы построили решение задачи расчета европейского опциона с квантильным критерием уровня $1 - \alpha$ относительно наихудшей меры на $(1, S)$-рынке.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сформулируем полученные результаты.

- Построена оценка верхней границы спрэда европейского опциона с квантильным критерием.
- Доказано, что стоимость минимаксного квантильного портфеля уровня $1 - \alpha$ меньше стоимости минимаксного хеджирующего портфеля с тем же платежным обязательством на величину $c\alpha$, где c — стоимость минимаксного хеджирующего портфеля.
- Получено явное решение задачи расчета порогового опциона.
- Рассчитан европейский опцион с квантильным критерием, когда носитель меры компактный.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зверев О.В., Хаметов В.М.* Квантильное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках. Ч. 1. Суперхеджирование // Проблемы управления. — 2014. — № 6. — С. 31 — 44.
2. *Зверев О.В., Хаметов В.М.* Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках (дискретное время) // Обозрение прикладной и промышленной математики. — 2011. — Т. 18, вып. 1. — С. 26—54.
3. *Зверев О.В., Хаметов В.М.* Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках (дискретное время) // Там же. — Вып. 2. — С. 193—204.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.С. Манделем.

Зверев Олег Владимирович — инженер,
☎ (49643) 9-21-78, ✉ zv-oleg@yandex.ru,

Хаметов Владимир Минирович — д-р физ.-мат. наук, профессор,
☎ (495) 467-28-03, ✉ khametovvm@mail.ru,

Национальный исследовательский университет —
Высшая школа экономики, г. Москва.

ПОПРАВКА

В Ч. 1 [1] настоящей статьи в формуле (4) символы «sup»и «inf» следует поменять местами. То же самое и в правой части предыдущей формулы.

УДК 001.891.573

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, АЛГОРИТМЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ ДЛЯ МОНИТОРИНГА ЭФФЕКТИВНОСТИ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ВУЗА

Н.В. Яндыбаева, В.А. Кушников

Разработаны математические модели для проведения мониторинга эффективности образовательной деятельности высшего учебного заведения. Предложен эвристический численный алгоритм решения системы дифференциальных уравнений, основанный на нейронных сетях и методе Рунге — Кутты четвертого порядка. Разработан программный модуль для автоматизации расчета показателей эффективности.

Ключевые слова: высшая школа, мониторинг, образовательная деятельность, показатель, эффективность, математическая модель, программный модуль.

ВВЕДЕНИЕ

Динамичные изменения в современном мире, рост конкуренции в мировой экономике, межнациональные конфликты, ограниченность всех видов ресурсов требуют перехода к стратегическим приоритетам в управлении развитием государства. Одним из документов, в которых предложена концепция повышения качества жизни граждан России, является Указ Президента РФ от 12 мая 2009 г. № 537 «О Стратегии национальной безопасности Российской Федерации до 2020 года».

Методология комплексных исследований безопасности и перехода России к устойчивому развитию с помощью математических моделей и новых информационных технологий рассмотрена в работах [1, 2] и др. Однако предлагаемые учеными логико-математические модели и подходы к обеспечению устойчивого развития носят слишком общий и обтекаемый характер. Целевые показатели, характеризующие уровни, при которых обеспечивается безопасное развитие России в экономическом, социальном, экологическом, оборонном и других аспектах, должны быть углублены и откорректированы в соответствии с требованиями современности.

Одним из показателей национальной безопасности служит уровень обеспеченности ресурсами образования и науки (в процентах от ВВП). Для подготовки высококлассных специалистов, востребованных на рынке труда, необходимо реформирование системы оценки качества образовательной деятельности высших учебных заведений [3]. Один из способов решения проблемы оценки качества высшего образования заключается в определении эффективности деятельности вуза посредством мониторинга. В ходе мониторинга реализуется комплекс мероприятий, направленных на формирование аналитических материалов о деятельности вузов и их филиалов на основе показателей эффективности деятельности образовательных организаций высшего образования. Принятие решения об отнесении образовательной организации к группе вузов, имеющих признаки неэффективности, принимается в том случае, когда образовательная организация или ее филиал достигает порогового значения для любых четырех из семи показателей.

По результатам мониторинга вузовской сети в 2014 г. межведомственная комиссия под председательством главы Минобрнауки признала неэффективными и нуждающимися в реорганизации около 1010 вузов и филиалов. На заседании межведомственной комиссии, состоявшемся в апреле 2013 г., были определены критерии, по которым оценивается деятельность высшего учебного заведения [4].

В этой связи возникает необходимость разработки математических моделей, алгоритмов и комплексов программ, позволяющих в рамках информационной системы вуза осуществить имитацион-