УДК 519.816

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ РЕГРЕССИЯ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК КОМПЛЕКСНОГО КАЧЕСТВА

Д. Б. Зотьев*, А. А. Махин**

Новосибирский государственный университет экономики и управления «НИНХ», г. Новосибирск

*✉ zotev@inbox.ru, **✉ kislik0fist@mail.ru

Аннотация. Рассматривается проблема построения многокритериальных рейтингов, т. е. ранжирования объектов с учетом нескольких полезных качеств. Эта задача, которая относится к многокритериальной оптимизации, возникает также в ситуациях выбора управленческих решений при наличии альтернативных вариантов. Целью исследования была разработка метода решения этой проблемы, основанного на вычислении комплексных, т. е. обобщенных средних показателей качества, которые представляют собой многочлены из класса нормализованных средних функций. Последние относятся к строго монотонным сдвиг-инвариантным агрегирующим операторам. Такие многочлены кратко называются СМ. Например, взвешенные среднеарифметические показатели комплексного качества являются СМ степени 1. Предположительно, СМ обладают всеми свойствами таких показателей, которые существенны для построения многокритериальных рейтингов. В рамках представленного метода, который назван интерактивной аппроксимацией экспертных оценок, для вычисления комплексных показателей качества предлагается использовать СМ произвольной степени. Данный подход аналогичен экспертно-статистическому методу определения весов. При этом он обеспечивает наилучшую среднеквадратическую аппроксимацию любого числа экспертных оценок, поэтому в процессе экспертизы их неопределенность уменьшается, а взаимная согласованность повышается. В статье описываются СМ степеней 1, 2, 3. Метод интерактивной аппроксимации экспертных оценок проверяется для СМ степени 2 в рамках задачи о вычислении комплексного показателя качества смартфонов, ранжируемых по семи частным критериям.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, принятие решений, нормализованная средняя функция, сдвиг-инвариантный многочлен, агрегирующий оператор, весовой коэффициент, комплексный показатель, экспертная оценка.

ВВЕДЕНИЕ

Задача выбора наиболее предпочтительного объекта с учетом различных его полезных свойств (*качеств*) относится к многокритериальной оптимизации. Предполагается, что качества объекта измеряются некоторыми показателями $q_i \in [0; 1]$, $i = 1, \ldots, n$. Большему значению показателя q_i соответствует более предпочтительный по i-му качеству объект [1]. Этот объект может быть способом действий в ситуации принятия решения, и тогда в роли его частных качеств выступают оценки полезности с различных точек зрения [2]. Данная задача не вызывает принципиальных затруднений, если есть возможность так упорядочить частные качества по важности, чтобы более важное качество имело подавляющий приоритет над менее важным. Тогда задача оптимизации по многим критериям сводится к последовательной оптимизации по одному критерию. Но если все качества по важности сопоставимы, то вполне объективного метода ее решения не существует. Можно лишь утверждать, что наиболее предпочтительный объект должен быть Парето-оптимальным [3]. Это хотя и сужает область поиска, но оставляет место неопределенности. Для устранения этой неопределенности приходится привлекать разного рода субъективные (нечеткие) оценки, которые могут исходить от экспертов или ЛПР (лица, принимающего решение).

Наиболее часто применяется метод взвешенного усреднения показателей q_i, в соответствии с которым вычисляется так называемый комплексный показатель качества $q \in [0; 1]$ (также называемый агрегирующим, интегральным и т. п., а по существу являющийся обобщенным, средним показателем)

$$q = \sum_{i=1}^{n} w_i q_i. \quad (1)$$

Числа $w_i > 0$ называются коэффициентами весомости (весами) и удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$ Функция (1) называется также функцией полезности или функцией ценности. Использование функций вида (1) обусловлено их простотой и традицией. Однако не существует убедительных научных доказательств предпочтительности таких функций перед прочими. Формула (1) является незаменимой лишь в некоторых специальных задачах многокритериальной оптимизации. Например, в монографии [4, *п. 4.2.2*] представлена теорема 1, согласно которой функция полезности должна иметь вид (1), если частные и комплексные предпочтения, лежащие в основе соответствующих ранжировок, удовлетворяют аксиомам фон Неймана – Моргенштерна. Последние исходят из того, что в ранжировании участвуют неопределенные объекты, в отношении которых известны лишь распределения вероятностей их совпадения с конкретными объектами (так называемые смеси или лотереи). Теория фон Неймана – Моргенштерна применима к задачам принятия решений с неопределенностью исходов, но бесполезна при определенности. Согласно монографии [5, *п. 3.6.3*] показатель q можно выразить формулой (1), если для каждой пары критериев, измеряемых показателями q_i и q_j, комплексный рейтинг по q_i и q_j не зависит от позиций данных объектов в рейтингах по всем остальным критериям. Очевидно, что в общем случае это условие не выполняется. Таким образом, при вычислении комплексного показателя качества $q(q_1,..., q_n)$ применять формулу (1) не обязательно.

Понятие весов w_i считается интуитивно ясным и выражающим относительную важность (значимость) частных качеств, измеряемых показателями q_i [1]. Но общепринятого определения, из которого можно извлечь правило их вычисления, не существует. В обзоре [6] описаны более сотни методов, которые могут давать различные значения весов. В связи с этим некоторые специалисты считают метод свертывания частных показателей недостаточно объективным. В полемически острой форме это мнение выражено фразой А. И. Орлова: «Игры по разработке обобщенного показателя качества не имеют объективного характера» [7]. В рамках такой парадигмы при оптимизации следует использовать все значения частных показателей (критериев) q_i в совокупности. В. Д. Ногин разработал сужающий границу Парето метод корректировки показателей q_i, основанный на сравнениях их относительной важности [3]. В. В. Подиновский предложил метод N-моделей, в рамках которого частные качества (или критерии полезности) количественно сравниваются по важности, но формула (1) не применяется [8]. Фактически метод N-моделей имеет дело с ранжированием по частным качествам (критериям). В настоящей статье проводится мысль о том, что объективным основанием для вычисления комплексного показателя $q = f(q_1,\dots, q_n)$ служит задача построения усредненной оценки.

Согласно формуле (1) вес w_i выражает относительное приращение значения комплексного показателя q, отвечающее приращению значения q_i при неизменных прочих значениях частных показателей. Обобщая это определение, приходим к понятию *функционального веса* ρ_i, введенному в монографии [9]:

$$\rho_i = \frac{\partial q}{\partial q_i}. \quad (2)$$

Прозрачная идея рассматривать производные (2) как весовые коэффициенты имеет давнюю историю. Как отмечается в монографии [1, *с. 46*], замечательный кораблестроитель и ученый А. Н. Крылов еще в 1907 г. исследовал вопрос об оценке комплексного качества боевого корабля с учетом четырех частных качеств: броневой защиты, огневой мощи, скорости хода и дальности плавания. Отношение весомостей этих качеств он выразил пропорцией, стоящей слева от знака приближенного равенства в следующей формуле:

$$\frac{w_i}{w_k} = \frac{\Delta_i q / \delta}{\Delta_k q / \delta} \approx \frac{\partial q / \partial q_i}{\partial q / \partial q_k} = \frac{\rho_i}{\rho_k}, \quad (3)$$

где $\delta = \Delta q_i = \Delta q_k$ есть равные малые приращения частных показателей при неизменных прочих показателях. Здесь комплексный показатель q характеризует водоизмещение, а его приращения $\Delta_i q$ и $\Delta_k q$ вычисляются от «среднего корабля». Из выражения (3) видно, что А. Н. Крылов был близок к понятию функциональных весов (2).

Производные (2) используются в алгоритмах многокритериальной оптимизации [10], однако не отождествляются с весами. В статье [11] рассматривается функция предпочтения $P(F_1,..., F_n)$, зависящая от критериев F_i, которые можно считать ненормированными показателями качества. Предлагается рассматривать производные $\partial P / \partial F_i$ как меры значимости критериев F_i. Эта идея близка к понятию функционального веса, хотя авторы работы [11] не отказались от весов w_i, проводя различие между функцией предпочтений и функцией полезности вида (1) как ее линейной аппроксимацией. При этом на веса не накладывается условие $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$ а их отношения определяются из отношений производных $\partial P / \partial F_i$.

В настоящей статье применительно к проблеме многокритериального ранжирования рассматриваются комплексные показатели качества $q(q_1,..., q_n),$ которые выражаются сдвиг-инвариантными монотонными многочленами (СМ). Подробно обсуждаются СМ степеней 1, 2 и 3. Предлагается алгоритм построения СМ степени 2 и связанный с ним метод интерактивной аппроксимации экспертных оценок комплексного качества, посредством которого коэффициенты многочлена выражаются через эти оценки. Алгоритм повышает их взаимную согласованность и уменьшает неопределенность. Последнее существенно упрощает задачу, стоящую перед экспертами, и тем самым повышает уровень объективности полученных от них данных.

1. СДВИГ-ИНВАРИАНТНЫЕ СРЕДНИЕ СТРОГО МОНОТОННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

Ограничение областей значений показателей q и q_i промежутком $[0; 1]$ обусловлено их применением в задаче построения рейтинга (т. е. ранжирования) объектов, в котором учтены их (*частные*) рейтинги по каждому i-му качеству. Рейтинги будем считать возрастающими, т. е. лучший объект имеет ранг N, а худший – ранг 1. Позиция r_i^j объекта j в рейтинге i является целой частью числа $q_i^j(N-1)+1$, где $q_i = q_i^j$ – соответствующий показатель качества. Аналогично позиция r^j объекта j в общем (комплексном) рейтинге является целой частью числа $q^j(N-1)+1$, где $q = q^j$.

Число позиций N считаем общим для всех рейтингов и достаточно большим для ранжирования всех объектов, сравнимых между собой по каждому из качеств $i = 1,..., n.$ Рассматриваются также гипотетические объекты, которые могут занимать любые позиции в соответствующих рейтингах. Для корректной интерпретации показателей качества необходимы более *тонкие рейтинги*, допускающие промежуточные позиции в исходных рейтингах. Число таких позиций между r_i и $r_i + 1$, а также между r и $r + 1$ равно $10^m - 1$, если произведения $q_i (N - 1)$ и $q (N - 1)$ вычисляются с точностью до m цифр после запятой. Добавляя к реально существующим объектам все *мыслимые* объекты того же рода, отвечающие любым наборам позиций в тонких рейтингах по i-м качествам, получим *гиперкубическую совокупность*. Термин «гиперкубическая» указывает на то, что наборы значений показателей q_i, отвечающих объектам данной совокупности, равномерно распределены в n-мерном гиперкубе. Будем ранжировать эти объекты по (тонкому) общему рейтингу, считая заданным число $m \geq 1$.

Следующее основополагающее утверждение принимается без доказательства как естественное свойство всякого общего рейтинга, имеющего единую шкалу рангов для соответствующих частных рейтингов. Априори нельзя исключить, что какие-то общие рейтинги этим свойством не обладают. Такие рейтинги в данной статье не рассматриваются. Для ранжирования по частным качествам также могут использоваться различные шкалы рангов.

Утверждение (принцип равного сдвига). *Для любого объекта из гиперкубической совокупности, занимающего позиции* $r_1,..., r_n$ *и* r *в частных и в общем (тонких) рейтингах, объект с позициями* $r+10^{-m},..., r_n+10^{-m}$ *в частных рейтингах занимает позицию* $r+10^{-m}$ *в общем рейтинге.*

Из этого принципа вытекает, что любым равным между собой сдвигам позиций объекта в частных рейтингах отвечает ровно такой же сдвиг его позиции в общем рейтинге. Какими свойствами должен обладать комплексный показатель $q = f(q_1,..., q_n),$ чтобы его можно было использовать для многокритериального ранжирования?

Объект с наихудшими качествами $q_1 = ... = q_n = 0$ должен занять низшую позицию, а объект с наилучшими качествами $q_1 = ... = q_n = 1$ – высшую позицию в общем рейтинге. Поэтому должно быть $f(0, …, 0)$ и $f(1, …, 1)$ = 1. Следовательно, функция $f(\boldsymbol{q})$, $\boldsymbol{q} = (q_1,…, q_n)$, отображает гиперкуб Q^n на отрезок [0; 1], где

$$Q^n = \left\{ \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n : 0 \leq q_i \leq 1 \ \forall i \right\}. \quad (4)$$

Еще одно естественное свойство называется монотонностью:

$$\forall \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}' \in Q^n \;\; (\forall i \in \{1,..., n\} \;\; q_i' \ge q_i) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(q_1',..., q_n') \ge f(q_1,..., q_n), \tag{5}$$

т. е. если объект не хуже по всем частным качествам, то он не хуже в среднем.

Любая функция $q = f(\boldsymbol{q})$ с вышеуказанными свойствами называется агрегирующим оператором [12]. Если в дополнение к свойству (5) имеет место

$$\big((\forall i \in \{1,..., n\} \;\; q_i' \ge q_i) \,\&\, (\exists i \in \{1,..., n\} \;\; q_i' > q_i)\big) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(q_1',..., q_n') > f(q_1,..., q_n), \tag{6}$$

то функция f называется строго монотонной. Практический смысл условия (6) очевиден.

Свойство $f(a, a,..., a) = a \;\; \forall a \in [0; 1]$ называется идемпотентностью [12]. Оно означает, что если объект занимает одну и ту же позицию $r = r_i = a\,(N - 1) + 1$ в каждом из частных (тонких) рейтингов, то в общем рейтинге он также занимает позицию r. Для линейной функции (1) свойство идемпотентности эквивалентно $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, а строгая монотонность означает, что все веса $w_i > 0$.

Для монотонных агрегирующих операторов идемпотентность равносильна свойству

$$\forall \boldsymbol{q} \in Q^n \;\; \min_{i=1,...,n} q_i \le f(\boldsymbol{q}) \le \max_{i=1,...,n} q_i, \\ \boldsymbol{q} = (q_1,..., q_n). \tag{7}$$

Свойство (7) называют компенсационным [12]. Такие $f(\boldsymbol{q})$ будем называть *средними функциями*. Важное свойство, которым обладают агрегирующие операторы $q = f(\boldsymbol{q})$ вида (1), называется сдвиговой инвариантностью [12]. Оно состоит в том, что

$$\forall \boldsymbol{q} \in Q^n \;\; \forall \Delta \boldsymbol{q} \in R^n \\ (\boldsymbol{q} + \Delta \boldsymbol{q} \in Q^n \;\&\; \Delta q_1 = ... = \Delta q_n) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta q = \Delta f = \Delta q_i. \tag{8}$$

Условие (8) соответствует принципу равного сдвига и выглядит весьма естественным, хотя далеко не все средние функции являются сдвиг-инвариантными. Например, таковыми не являются следующие функции: взвешенная среднегеометрическая $f(\boldsymbol{q}) = \prod_{i=1}^{n} q_i^{w_i}$, среднеквадратическая $f(\boldsymbol{q})\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (q_i)^2 / n}$ и среднегармоническая $f(\boldsymbol{q}) = n\left(\sum_{i=1}^{n} 1/q_i\right)^{-1}$. Заметим, что из условия $f(\boldsymbol{0}) = 0$, которому агрегирующий оператор удовлетворяет по определению, и сдвиговой инвариантности вытекает его идемпотентность.

Итак, согласно принципу равного сдвига для построения многокритериальных рейтингов следует использовать строго монотонные сдвиг-инвариантные агрегирующие операторы, к которым относятся *нормализованные средние функции* (НСФ). Последние были введены в статье [13] под впечатлением от работы [9], базовые идеи которой изложены также в публикации [14]. В статье [15] определение НСФ было несколько усилено до строгой монотонности на всех гранях гиперкуба Q^n (4) размерностей до $n-1$.

Определение 1. *Нормализованной средней функцией (НСФ) называется любая непрерывно дифференцируемая функция* $f(\boldsymbol{q})$, *определенная на гиперкубе* Q^n, *такая, что* $f(\boldsymbol{0}) = 0$, *и выполнено условие*

$$\forall \boldsymbol{q} \in Q^n \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}(\boldsymbol{q}) = 1 \;\&\; \forall i \in \{1, \ldots, n\} \right. \\ \left. \left[\frac{\partial f}{\partial q_i}(\boldsymbol{q}) \ge 0 \;\&\; \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}(\boldsymbol{q}) = 0 \Rightarrow q_i \in \{0, 1\} \right) \right] \right). \tag{9}$$

Дифференциальное уравнение в выражении (9) является обобщением на функциональные веса (2) условия $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Функции вида (1) относятся к классу НСФ. Проверим, что каждая непрерывно дифференцируемая функция $f(\boldsymbol{q})$ на гиперкубе Q^n, которая является строго монотонным сдвиг-инвариантным агрегирующим оператором, относится к классу НСФ.

Возьмем произвольный набор отрезков $[q_i; q_i + \Delta q] \subseteq [0; 1]$, $i = 1, \ldots, n$. Из формулы конечных приращений Лагранжа для некоторого $\theta \in (0; 1)$ получаем:

$$\Delta q = f(q_1 + \Delta q, \ldots, q_n + \Delta q) - f(q_1, \ldots, q_n) = \\ = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}(q_1 + \theta \Delta q, \ldots, q_n + \theta \Delta q)\Delta q, \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}(q_1 + \theta \Delta q, \ldots, q_n + \theta \Delta q) = 1.$$

Поскольку число Δq можно брать сколь угодно малым, множество точек $\boldsymbol{q}+\theta\Delta\boldsymbol{q}$, в которых выполняется условие (10), является всюду плотным в гиперкубе Q^n. Следовательно, в каждой точке Q^n сумма производных $\partial f / \partial q_i$ равна 1.

Таким образом, класс функций НСФ не является существенно новым, однако до работы [14] весьма естественное уравнение (9) в контексте обобщенных средних функций не рассматривалось. Оно дает не только новое описание для сдвиг-инвариантных агрегирующих операторов, но и эффективный метод вычисления многочленов, являющихся НСФ. В работе [15] они получили название сдвиг-инвариантных средних монотонных многочленов и сокращенное обозначение СМ. Поскольку любую непрерывную функцию на гиперкубе Q^n можно сколь угодно точно аппроксимировать многочленом, с практической точки зрения для вычисления многокритериальных средних рейтингов достаточно комплексных показателей качества в виде многочленов. В дальнейшем будем рассматривать комплексные показатели $q=f(\boldsymbol{q})$, являющиеся СМ.

Среди многих методов вычисления весов w_i выделяется экспертно-статистический [16], который заключается в следующем. Пусть дана выборка из K реально существующих объектов с частными показателями $q_i=q_i^j$, $i=1, \ldots, n$, $j=1, \ldots, K$. Назовем такую выборку *эмпирической совокупностью*. При наличии экспертной оценки $q=q_0^j$ комплексного показателя для каждого j-го объекта коэффициенты w_i подбираются так, чтобы аппроксимировать оценки q_0^j посредством формулы (1). Для этого решается задача оптимизации

$$\sum_{j=1}^{K}\left(q_0^j-\sum_{i=1}^{n}w_i q_i^j\right)^2 \to \min,\ \sum_{i=1}^{n} w_i=1,\ w_i\geq 0\ \ \forall i.$$

Веса w_i можно рассматривать как коэффициенты многочлена $f(q_1,\ldots,q_n)$ степени 1, зависящие от оценок q_0^j. Если повысить степень многочлена, то это повысит точность попадания в экспертные оценки и позволит увеличить их число. Если этот многочлен относится к классу СМ, то он обладает *всеми* свойствами функций (1), которые обеспечивают многокритериальное ранжирование по принципу равного сдвига.

Таким образом, однократная экспертиза объектов из эмпирической совокупности (выборки) позволяет получить формулу для комплексного показателя качества, которая может применяться ко всем объектам из гиперкубической совокупности, не прибегая каждый раз к организационно сложным и затратным экспертизам.

Следует пояснить, что комплексный показатель качества q определяет рейтинг объектов виртуальной гиперкубической совокупности. Объекты из эмпирической совокупности наделяются теми и только теми показателями качества, как частными, так и комплексными, которые они имеют в гиперкубической совокупности. За исключением примера из § 4, в этой статье не рассматриваются показатели качества объектов из эмпирической совокупности, определяемые независимо от гиперкубической. Например, показатель q_i для наилучшего из объектов эмпирической совокупности по i-му качеству не обязательно равен единице, поскольку данный объект может не быть лучшим в гиперкубической совокупности.

В пользу СМ степени выше 1 можно выдвинуть формальное возражение, состоящее в том, что такая функция $q=f(q_1,\ldots,q_n)$ переводит показатели $q_1,\ldots, q_n$, измеряемые по шкале интервалов или отношений, в показатель q, не измеряемый ни по одной из этих шкал. Однако ограничение значений качества шкалы промежутком $[0;1]$ исключает ее линейные преобразования.

В задачах многокритериального ранжирования показатели качества (функции ценности, полезности или предпочтения) располагаются на порядковой шкале. Допускаются *всевозможные* значения показателей q и q_i на промежутке $[0;1]$ и допустимые преобразования их шкал ограничиваются строго возрастающими непрерывно дифференцируемыми функциями $q=\psi(p)$ и $q_i=\varphi_i(p_i)$, которые отображают отрезок $[0;1]$ на себя. Если $q=f(\boldsymbol{q})$ является НСФ и для такого преобразования переменных q и q_i в переменные p и p_i справедливо

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial q_i}(\varphi_1(p_1),\ldots,\varphi_n(p_n))\frac{\partial\varphi_i}{\partial p_i}(p_i)=\frac{\partial\psi}{\partial p}(p),$$

где $p=\psi^{-1}\left(f(\varphi_1(p_1),\ldots,\varphi_n(p_n))\right)$, то функция $p=\psi^{-1}\left(f\left(\varphi_1(p_1),\ldots,\varphi_n(p_n)\right)\right)$ является НСФ. Такие *допустимые* преобразования показателей q и q_i в показатели p и p_i, $i=1,\ldots,n$, сохраняют согласованные с ними рейтинги (ранги).

В качестве примера допустимого преобразования шкал $[0;1]$ рассмотрим НСФ (1). Заметим, что она является СМ степени 1. Легко проверить, что для любой строго возрастающей непрерывно дифференцируемой функции $\varphi(p)$ преобразования $q=\varphi(p)$ и $q_i=\varphi(p_i)$ $\forall i\in\{1,\ldots,n\}$ являются допустимыми в указанном выше смысле. Соответствующий комплексный показатель $p=\varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\varphi(p_i)\right)$ относится к классу НСФ, но не является СМ. Это не что иное, как взвешенное среднее по Колмогорову – Нагумо.

2. СМ СТЕПЕНЕЙ 2 И 3

Произвольный многочлен степени 2 можно записать в виде

$$f(q_1,\ldots,q_n)=\sum_{i=1}^{n} a_i q_i^2+\sum_{1\le i<k\le n} b_{ik}q_iq_k+\sum_{i=1}^{n} c_iq_i. \quad (11)$$

При каждом $i\in\{1,\ldots,n\}$ функциональный вес (2) представляется в виде

$$\rho_i=\frac{\partial f}{\partial q_i}=2a_iq_i+\sum_{1\le k<i} b_{ki}q_k+\sum_{i<k\le n} b_{ik}q_k+c_i. \quad (12)$$

Вершины гиперкуба Q^n (4) имеют вид $(B_1,\ldots,B_n)$, $B_i\in\{0;1\}$, всего таких вершин 2^n. Функциональные веса ρ_i являются линейными функциями от качеств $q_1,\ldots,q_n$, поэтому для строгой монотонности функции (11) необходимо и достаточно, чтобы для любой вершины вида $\boldsymbol{B}=(B_1,\ldots,B_n)$ гиперкуба Q^n выполнялось условие

$$\forall i\in\{1,\ldots,n\}$$
$$\rho_i(\boldsymbol{B})\ge 0 \;\&\; \rho_i(B_1,\ldots,B_{i-1},0,B_{i+1},\ldots,B_n)+ \quad (13)$$
$$+\rho_i(B_1,\ldots,B_{i-1},1,B_{i+1},\ldots,B_n)>0.$$

Условие (13) равносильно тому, что для любой точки $\boldsymbol{q}=(q_1,\ldots,q_n)\in Q^n$ имеет место

$$\forall i\in\{1,\ldots,n\}$$
$$\left[\rho_i(\boldsymbol{q})\ge 0 \;\&\; (\rho_i(\boldsymbol{q})=0\Rightarrow q_i\in\{0,1\})\right].$$

Условие (13) выполняется, если при некотором $\varepsilon>0$ для любой вершины $\boldsymbol{B}$ имеем $\rho_i(\boldsymbol{B})\ge\varepsilon$.

Если условие (13) выполняется, то из вершины $(0,\ldots,0)$ получим, что все $c_i\ge 0$. Дифференциальное уравнение в формуле (9) равносильно системе уравнений

$$\forall i\in\{1,\ldots,n\}$$
$$2a_i+\sum_{1\le k<i} b_{ki}+\sum_{i<k\le n} b_{ik}=0,\; \sum_{k=1}^{n} c_k=1. \quad (14)$$

Итак, коэффициенты СМ (11) можно определить из уравнений (14) с учетом условий (13). При этом нужно позаботиться о том, чтобы все коэффициенты b_{ik} и b_{ki} не обращались в ноль одновременно (иначе степень многочлена понижается).

Варьируя свободные параметры b_{ik} при $i<k$ и c_l при $l<n$ (общим числом $n(n+1)/2-1$), можно аппроксимировать экспертные оценки $q=q_0^j$ путем решения задачи оптимизации (15) относительно коэффициентов многочлена (11) с учетом условий (13) и (14):

$$\sum_{j=1}^{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\left(q_i^j\right)^2+\sum_{1\le i<k\le n} b_{ik}q_i^jq_k^j+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{n} c_iq_i^j-q_0^j\right)^2\to\min, \quad (15)$$

где E – число объектов, подвергнутых экспертизе (т. е. размер эмпирической совокупности). Абсолютная погрешность полученной таким образом аппроксимации оценивается числом

$$\Delta=\max_{j=1,\ldots,E}\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\left(q_i^j\right)^2+\sum_{1\le i<k\le n} b_{ik}q_i^jq_k^j+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{n} c_iq_i^j-q_0^j\right|. \quad (16)$$

Если условие $\Delta<<1$ не выполняется, то функция (11) может оказаться практически бесполезной.

Наилучшую аппроксимацию оценок q_0^j с помощью СМ степени 2 можно найти следующим образом. Выражая $a_1,a_2,\ldots,a_n$ и c_n через остальные параметры в формуле (14) и подставляя их в целевую функцию задачи (15), получим квадратичную функцию $S(b_{12},b_{13},\ldots,b_{1n},b_{23},\ldots,b_{2n},\ldots,$ $b_{n-1,n},c_1,c_2,\ldots,c_{n-1})$. Положительно определенная функция S достигает своего наименьшего значения в единственной точке

$$\tilde{X}=\left(\tilde{b}_{12},\tilde{b}_{13},\ldots,\tilde{b}_{1n},\tilde{b}_{23},\ldots,\tilde{b}_{2n},\ldots,\right.$$
$$\left.\tilde{b}_{n-1,n},\tilde{c}_1,\tilde{c}_2,\ldots,\tilde{c}_{n-1}\right)\in\mathbb{R}^{n(n+1)/2-1},$$

которая определяется системой уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial b_{ik}}=0,\;\frac{\partial S}{\partial c_l}=0,\; 1\le i<k\le n,\; 1\le l\le n-1. \quad (17)$$

Из формулы (14) следует, что $\partial a_i / \partial b_{ik} = \partial a_k / \partial b_{ik} = -1/2$ и $\partial c_n / \partial c_l = -1$, все остальные частные производные равны нулю. Отсюда вытекает, что система (17) равносильна системе (18), если положить в ней $q^j = q_0^j$:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \left(q_i^j\right)^2 + \sum_{1\le i<k\le n} b_{ik} q_i^j q_k^j + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{n} c_i q_i^j - q^j\right)\cdot\left(q_s^j - q_t^j\right)^2 = 0,\ 1\le s<t\le n, \\ \sum_{j=1}^{E}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \left(q_i^j\right)^2 + \sum_{1\le i<k\le n} b_{ik} q_i^l q_k^j + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{n} c_i q_i^j - q^j\right)\cdot\left(q_l^j - q_n^j\right) = 0,\ 1\le l\le n-1. \end{cases} \tag{18}$$

Из этой системы, содержащей $n(n+1)/2-1$ уравнений, однозначно находится точка $\tilde{X}$. Последняя согласно условиям (14) определяет коэффициенты многочлена (11), описывающего регрессию экспертных оценок q_0^j с наименьшей ошибкой аппроксимации $\sigma = \sqrt{S\left(\tilde{X}\right)/E}$.

Следует также проверить условие (13). Если оно выполняется, то получен СМ $f(\boldsymbol{q})$ степени 2, который является оптимальным по среднеквадратической ошибке σ. Но для решения вопроса о практической применимости комплексного показателя $q = f(\boldsymbol{q})$ следует еще оценить погрешность (16).

Если условие (13) не выполняется, то функция (11) не является СМ из-за нарушения строгой монотонности. В этом случае можно численно решать задачу (15) с учетом условий (13) и (14).

Произвольный многочлен степени 3 можно записать в виде

$$f(q_1,..., q_n) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \alpha_{ijk} q_i q_j q_k + \\ + \sum_{i,j=1}^{n} \beta_{ij} q_i q_j + \sum_{i=1}^{n} \gamma_i q_i, \tag{19}$$

где тензоры α_{ijk} и β_{ij} симметричны. Для каждого $k \in \{1,\ldots, n\}$ найдем функциональный вес

$$\rho_k = 3\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ijk} q_i q_j + 2\sum_{i=1}^{n} \beta_{ik} q_i + \gamma_k.$$

Дифференциальное уравнение (9) для функции (19) равносильно системе уравнений

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{ijk} = 0,\ \sum_{k=1}^{n} \beta_{ik} = 0,\ \sum_{k=1}^{n} \gamma_k = 1,\ 1\le i, j\le n. \tag{20}$$

Для того, чтобы удовлетворяющий уравнениям (20) многочлен (19) относился к классу СМ, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки $\boldsymbol{q} = (q_1,\ldots, q_n) \in Q^n$ было выполнено условие

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\}$$
$$\left[\rho_k(\boldsymbol{q}) \ge 0\ \&\ \left(\rho_k(\boldsymbol{q}) = 0 \Rightarrow q_k \in \{0,1\}\right)\right].$$

Также нужно позаботиться о том, чтобы все α_{ijk} не обращались в ноль одновременно.

3. ИНТЕРАКТИВНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

Многочлены из класса СМ можно использовать как для наилучшей аппроксимации (полиномиальной регрессии) экспертных оценок комплексного качества q_0^j, так и для уменьшения их неопределенности, а также для того, чтобы повысить взаимную согласованность этих оценок. Соответствующий алгоритм применительно к СМ степени 1 был предложен в работе [17] и описан в публикации [15].

Повышение взаимной согласованности экспертных оценок означает улучшение их аппроксимируемости посредством некоторой НСФ (см. определение 1). Из теоремы Вейерштрасса – Стоуна следует, что любая НСФ может быть сколь угодно точно аппроксимирована многочленом достаточно большой степени. Очевидно, что со сколь угодно малой погрешностью этот многочлен можно считать относящимся к классу СМ. Таким образом, наиболее адекватное экспертным оценкам выражение для среднего показателя $q = q(q_1,\ldots, q_n)$ можно искать в виде многочлена класса СМ.

Рассмотрим случай СМ степени 2. Пусть оценки q_0^j нумеруются числами $j = 1,\ldots, E$ в порядке последовательной экспертизы объектов из эмпирической совокупности, при этом диапазон возможных значений комплексного показателя качества для очередного объекта зависит от ранее назначенных оценок. Этот диапазон определяется условием

$$q_{\min}^j < q_0^j < q_{\max}^j. \tag{21}$$

Здесь $q_{\min}^j$ и $q_{\max}^j$ есть минимальное и максимальное значения функции

$$g_j\left(q^1,\ldots, q^E\right) = q^j,\ \left(q^1,\ldots, q^E\right) \in \bar{\Omega}_j,$$

на замыкании $\bar{\Omega}_j$ множества Ω_j таких точек $\left(q^1,\ldots, q^E\right) \in \mathbb{R}^E$, что

$$q^l = q_0^l\ \forall l \in \{1,\ldots, j-1\}\ \&\ 0 \le q^k \le 1\ \forall k \in \{j,\ldots, E\},$$

и для любого набора двоичных чисел $B_i \in \{0; 1\}$, а также для любых чисел a_i, b_{kl}, c_i, удовлетворяющих системам (14) и (18), справедливы все неравенства (13). Знаки строгого неравенства в формуле (21) обусловлены тем, что значения $q^j_{\min}$ и $q^j_{\max}$ вычисляются на замыкании $\bar{\Omega}_j$ множества Ω_j, а экспертные оценки q^j_0 должны отвечать точкам из множества Ω_j.

Очевидно, что уравнения (14) и неравенства (13) определяют выпуклый многогранник $\wp$ в пространстве $\mathbb{R}^{n(n+1)/2-1}$ параметров $b_{ik}, c_1, \ldots, c_{n-1}$, $1 \le i < k \le n.$ Множество Ω_j является пересечением $(E - j + 1)$-мерной плоскости

$$\left\{\left(q^1, \ldots, q^E\right) \in \mathbb{R}^E : q^l = q^l_0,\ l = 1, \ldots, j-1\right\}$$

с многогранником Ω_1, который является прообразом многогранника $\wp$ при линейном отображении $\omega:\ Q^E \to \mathbb{R}^{n(n+1)/2-1}$, где Q^E – гиперкуб в пространстве $\mathbb{R}^E$: $0 \le q^j \le 1.$ Отображение ω определяется системой (18) линейных относительно q^j уравнений, где коэффициенты a_i и c_n выражены через $b_{ik}, c_1, \ldots, c_{n-1}$ согласно формуле (14). Следовательно, $\bar{\Omega}_j$ – выпуклый компактный многогранник в $\mathbb{R}^E$. Нужно проверить, что $\bar{\Omega}_j \ne \varnothing$ при каждом $j = 1, \ldots, E.$

При нулевых значениях всех b_{ik} и любых положительных значениях c_i в силу системы (14) условия (13) удовлетворяются, поэтому соответствующая точка $\tilde{X} \in \wp$. Легко понять, что точка $\tilde{X}$ является внутренней для многогранника $\wp$. Следовательно, $\dim \wp = n(n+1)/2 - 1$. Для любой $\tilde{X} \in \wp$ при условиях (14) система (18) имеет решение

$$q^j = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(q^j_i\right)^2 + \sum_{1 \le i < k \le n} b_{ik} q^j_i q^j_k + \sum_{i=1}^{n} c_i q^j_i,\quad j = 1, \ldots, E.$$

Поэтому $\Omega_1 = \omega^{-1}(\wp) \ne \varnothing$. Вышеуказанная формула вместе с условиями (14) задает линейное отображение $\mathbb{R}^{n(n+1)/2-1} \to \mathbb{R}^E$. Если его матрица $\mathfrak{I}$ имеет ранг E, то $\dim \Omega_1 = E.$ В этом случае выпуклый многогранник $\bar{\Omega}_1$ имеет непустую внутренность. Из процесса построения множеств $\bar{\Omega}_j$ вытекает, что каждое из них также имеет непустую внутренность. При этом линейная функция $g_j\left(q^1, \ldots, q^E\right)$ достигает на $\bar{\Omega}_j$ максимума и минимума, не совпадающих между собой. Если же условие о ранге матрицы $\mathfrak{I}$ не выполняется (что маловероятно при $E \le n(n+1)/2 - 1$), то описываемый алгоритм не всегда гарантирует успех. Впрочем, пример 1 в § 4 показывает, что и в случае, когда $E > n(n+1)/2 - 1,$ алгоритм может быть эффективным.

Каждая оценка q^j_0 выбирается экспертом (или группой экспертов) субъективно, но из объективно заданного числового промежутка (21). При этом должно быть выполнено условие

$$\min\left\{q^j_1, \ldots, q^j_n\right\} \le q^j_0 \le \max\left\{q^j_1, \ldots, q^j_n\right\}. \qquad (22)$$

Обсудим геометрический смысл ограничения значений показателя q^j_0 промежутком между $q^j_{\min}$ и $q^j_{\max}$.

Выпуклый непустой многогранник $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^E$ состоит из таких точек вида $\left(q^1, \ldots, q^E\right)$, что соответствующее решение a_i, b_{kl}, c_i системы (18) с учетом условий (14) определяет многочлен (11), который относится к классу СМ. Данный СМ минимизирует целевую функцию в выражении (15) и тем самым обеспечивает наилучшую среднеквадратическую аппроксимацию экспертных оценок $q^j_0 = q^j$ при $j = 1, \ldots, E$. Если $q^1 \in (q^1_{\min}; q^1_{\max})$, то найдется точка вида $\left(q^1, q^2, \ldots, q^E\right) \in \Omega_1$. Пусть $q^1_0 \in (q^1_{\min}; q^1_{\max})$. Тогда выпуклый непустой многогранник $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^E$ является пересечением многогранника Ω_1 с $(E-1)$-мерной плоскостью $q^1 = q^1_0$ и состоит из точек вида $\left(q^1_0, q^2, \ldots, q^E\right)$, по которым в силу выражения (18) можно построить СМ, обеспечивающий наилучшую аппроксимацию оценок $q^1_0, q^j_0 = q^j$ при $j = 2, \ldots, E$. Если $q^2 \in (q^2_{\min}; q^2_{\max})$, то найдется точка $\left(q^1_0, q^2, \ldots, q^E\right) \in \Omega_2$. Пусть $q^2_0 \in (q^2_{\min}; q^2_{\max})$. Тогда найдется точка $\left(q^1_0, q^2_0, q^3, \ldots, q^E\right) \in \Omega_1$, а выпуклый непустой многогранник $\Omega_3 \subset \mathbb{R}^E$ является пересечением многогранника Ω_2 с $(E-2)$-мерной плоскостью $q^1 = q^1_0$, $q^2 = q^2_0$ и состоит из точек вида

$\left(q_0^1, q_0^2, q^3, \ldots, q^E\right)$, по которым можно построить СМ, обеспечивающий наилучшую аппроксимацию оценок $q_0^1, q_0^2, q_0^j = q^j$ при $j = 3, \ldots, E$. Продолжая по аналогии, в итоге получим такой набор экспертных оценок $q^j = q_0^j$ при $j = 1, \ldots, E$, что соответствующее решение a_i, b_{kl}, c_i системы (18) с учетом условий (14) определяет СМ (11), который обеспечивает наилучшую среднеквадратическую аппроксимацию оценок q_0^j.

Замечание. Условие (22) выполняется автоматически, если число свободных коэффициентов СМ, удовлетворяющих системе (18), не меньше числа экспертных оценок E. Тогда вместо регрессии этих оценок возможна их интерполяция, поэтому минимальное значение целевой функции в задаче (15) будет равно нулю, т. е. существует такой СМ (11), что $\forall\, j \in \{1, \ldots, E\}$ $q_0^j = f\left(q_1^j, \ldots, q_n^j\right)$. Отсюда сразу следует справедливость условия (22). В случае СМ степеней 2 и 3 число свободных коэффициентов равно $n(n+1)/2-1$ и $n(n+1)(n+2)/6-1$ соответственно. ♦

Резюмируем предшествующие рассуждения.

Алгоритм вычисления коэффициентов для СМ степени 2, организующий также процесс получения необходимых экспертных оценок; назовем его *интерактивной аппроксимацией*, представляет собой следующую последовательность действий.

Шаг 1. Объекты эмпирической совокупности (выборки) произвольным образом нумеруются от 1 до E. Экспертиза осуществляется последовательно, в порядке возрастания номеров. Если для какой-либо пары объектов один хуже другого подается экспертизе, то пусть его номер будет больше. Впрочем, это условие не является существенным. Индексу j присваивается значение 1.

Шаг 2. С помощью описанного выше метода вычисляются значения $q_{\min}^j$ и $q_{\max}^j$. Эксперту (или экспертам) предлагается оценить значение комплексного показателя качества q_0^j для объекта j, выбирая его из промежутка (21) при условии (22). При этом эксперты должны оценивать среднее качество объекта по отношению ко всем объектам гиперкубической совокупности, а не относительно объектов из выборки (это, в частности, означает, что лучший и худший объекты выборки отнюдь не обязательно имеют показатели качества $q = 1$ и $q = 0$).

Шаг 3. Если $j < E$, то значение индекса j увеличивается на единицу и осуществляется переход к шагу 2, иначе – переход к шагу 4.

Шаг 4. Из систем уравнений (18) и (14) определяются значения коэффициентов a_i, b_{kl}, c_i искомого СМ (11). Заметим, что условия (13) для него выполняются автоматически.

Полученный таким образом СМ обеспечивает глобальный минимум среднеквадратического отклонения σ экспертных оценок q_0^j от расчетных значений показателей $q = q^j$ для всех объектов из эмпирической совокупности.

В связи с этим возникает вопрос: насколько объективными могут быть экспертные оценки комплексного качества объектов, составляющих эмпирическую совокупность? Ранжирования этих объектов недостаточно, так как нужно оценивать их относительно *всей* гиперкубической совокупности. Последняя в основном является гипотетической, хотя и содержит все реальные объекты. Наилучший объект B из этой совокупности имеет показатели $q_1 = \ldots = q_n = q = 1$, а наихудший объект W – $q_1 = \ldots = q_n = q = 0$. Задача экспертов, таким образом, состоит в том, чтобы оценить комплексное качество q, сравнивая объект с B и W, а также с теми реальными объектами, которые уже оценены. Его также можно сравнивать с гипотетическими объектами, имеющими показатели $q_1 = \ldots = q_n = q = 0{,}5$ и т. д. Таким образом, для экспертной оценки показателя q нет необходимости держать в уме всю в гиперкубическую совокупность (которая может быть необъятной).

Способность экспертов объективно назначать оценки качества отнюдь не очевидна, однако она вполне допускается. Интересный метод Терстоуна [18] оценки показателей качества, основанный на парных сравнениях альтернатив, базируется на неявном предположении о том, что эксперты способны выдавать объективные, нормально распределенные оценки показателей. В работе [3, *с. 54*] описано исследование, в рамках которого опытных работников крупной больницы попросили дать субъективную оценку каждой из 12-ти *гипотетических* больничных палат по шкале от 0 до 100 баллов. Полученные результаты показали, что специалисты (эксперты) «могут разработать весьма надежные, субъективные модели оценки» [3].

В рамках метода интерактивной аппроксимации каждая экспертная оценка $q = q_0^j$ выбирается из некоторого промежутка $[a; b] \subset [0; 1]$. Последний может оказаться малым, что существенно упростит экспертизу.

4. ПРИМЕРЫ ИНТЕРАКТИВНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК

Рассмотрим примеры интерактивной аппроксимации экспертных оценок. Первый из них является абстрактным и служит простой иллюстрацией метода. Второй пример имеет реальную интерпретацию.

Пример 1. Пусть эмпирическая совокупность состоит из трех объектов, пронумерованных индексами $j = 1, 2, 3$ и характеризуемых частными показателями качества $\left(q_1^1; q_1^2; q_1^3\right) = (0,578; 0,361; 0,437)$ и $\left(q_2^1; q_2^2; q_2^3\right) = (0,701; 0,762; 0,675)$. Требуется так организовать получение экспертных оценок комплексного качества q_0^j и найти такой СМ $f(q_1, q_2)$ степени 2, чтобы среднеквадратическое отклонение σ_0 оценок q_0^j от расчетных значений комплексного качества $q^j = f\left(q_1^j, q_2^j\right)$ было минимальным среди всех таких отклонений σ, вычисленных для всевозможных СМ степени 2. Заметим, что такой многочлен будет определен однозначно.

Произвольный СМ степени 2 с двумя переменными записывается в виде

$$f(q_1, q_2) = \alpha(q_1 - q_2)^2 + (1-\beta)q_1 + \beta q_2,$$

где коэффициенты α и β удовлетворяют системе неравенств

$$\alpha \neq 0, \; 2|\alpha| \leq \beta \leq 1 - 2|\alpha|, \; 0 < \beta < 1. \tag{23}$$

Многогранник $\wp$ в пространстве $\mathbb{R}^2$ параметров α, β определяется системой (23). Система (18) в данном случае выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{3}\left(\alpha\left(q_1^j - q_2^j\right)^2 + (1-\beta)q_1^j + \beta q_2^j - q^j\right)\cdot\left(q_1^j - q_2^j\right)^2 = 0, \\ \sum\limits_{j=1}^{3}\left(\alpha\left(q_1^j - q_2^j\right)^2 + (1-\beta)q_1^j + \beta q_2^j - q^j\right)\cdot\left(q_1^j - q_2^j\right) = 0. \end{cases}$$

После подстановки в нее числовых значений показателей q_1^j и q_2^j получим систему уравнений

$$\begin{cases} 0,029\alpha + 0,08\beta - 0,015q^1 - 0,161q^2 - \\ \quad - 0,057q^3 + 0,092 = 0, \\ -0,08\alpha - 0,232\beta + 0,123q^1 + 0,401q^2 + \\ \quad + 0,238q^3 - 0,32 = 0, \end{cases}$$

из которой выразим коэффициенты искомого многочлена:

$$\begin{cases} \alpha = 9,617 - 14,303q^1 - 12,234q^2 - 13,199q^3, \\ \beta = -4,675 + 5,435q^1 - 2,471q^2 + 5,551q^3. \end{cases} \tag{24}$$

Трехмерный многогранник Ω_1 в пространстве $\mathbb{R}^E = \mathbb{R}^3\left(q^1, q^2, q^3\right)$ определяется системой неравенств (23), где переменные α и β выражены через q^1, q^2, q^3 согласно формуле (24). При этом $0 \leq q^j \leq 1$ для каждого $j = 1, 2, 3$.

Вычисляя максимальное $q_{\max}^1$ и минимальное $q_{\min}^1$ значения функции $g_1\left(q^1, q^2, q^3\right) = q^1$ на (компактном и выпуклом) многограннике $\bar{\Omega}_1$, получим тривиальные значения $q_{\max}^1 = 1$ и $q_{\min}^1 = 0$. С учетом условия (22) имеем диапазон для экспертной оценки $0,578 < q_0^1 < 0,701$. Предположим, что эксперты выбрали в нем оценку $q_0^1 = 0,652$ (в реальности эта оценка, вероятно, выглядела бы так: $q_0^1 = 0,65$).

Двумерный многогранник Ω_2 в пространстве $\mathbb{R}^E = \mathbb{R}^3\left(q^1, q^2, q^3\right)$ определяется системой (23) и равенством $q^1 = q_0^1$, где переменные α и β выражены через q^1, q^2, q^3 (24). При этом $0 \leq q^j \leq 1$ для каждого $j = 2, 3$. Вычисляя максимальное $q_{\max}^2$ и минимальное $q_{\min}^2$ значения функции $g_2\left(q^1, q^2, q^3\right) = q^2$ на (компактном и выпуклом) многоугольнике $\bar{\Omega}_2$, получим $q_{\max}^2 = 0,751$ и $q_{\min}^2 = 0,377$. Условие (22) дает несколько более широкий интервал $(0,361; 0,762)$, поэтому имеем диапазон $0,377 < q_0^2 < 0,751$. Предположим, что эксперты выбрали в нем оценку $q_0^2 = 0,6$.

Одномерный многогранник Ω_3 в пространстве $\mathbb{R}^E = \mathbb{R}^3\left(q^1, q^2, q^3\right)$ определяется системой (23) и равенствами $q^1 = q_0^1$, $q^2 = q_0^2$, где переменные α и β выражены через q^1, q^2, q^3 (24). При этом $0 \leq q^3 \leq 1$. Вычисляя максимальное $q_{\max}^3$ и минимальное $q_{\min}^3$ значения функции $g_3\left(q^1, q^2, q^3\right) = q^3$ на отрезке $\bar{\Omega}_3$, получим $q_{\max}^3 = 0,599$ и $q_{\min}^3 = 0,561$. Условие (22) дает более широкий интервал $(0,437; 0,675)$, поэтому имеем диапазон $0,561 < q_0^3 < 0,599$. Предположим, что эксперты выбрали в нем оценку $q_0^3 = 0,584$.

Подставляя оценки q_0^j в систему (24), получим коэффициенты искомого СМ: $\alpha = -0,051$ и $\beta = 0,622$.

Таким образом, комплексный показатель качества q, обеспечивающий наилучшую (в среднеквадратическом) аппроксимацию этих экспертных оценок, вычисляется по формуле

$$q = f(q_1, q_2) = -0,051(q_1 - q_2)^2 + 0,378q_1 - 0,622q_2.$$

Заметим, что этот многочлен степени 2 является единственным, поэтому показатель q определен корректно. Погрешность (16), с которой многочлен $f(q_1, q_2)$ аппроксимирует экспертные оценки q_0^j, равна $\Delta = 0,002$.

Пример 2. В работе [19] для некоторой совокупности из десяти смартфонов (табл. 1) был построен комплексный рейтинг по семи потребительским качествам.

Параметры из табл. 1 пронумерованы в частные показатели качества $q_i = q_i^j$, характеризующие цену, память, ОЗУ, батарею, размер дисплея, фронтальную камеру, частоту процессора соответственно для смартфона j, $i=1,\ldots,7$, $j=1,\ldots,10$. Данные показатели представлены в табл. 2.

Вычислим СМ $f(\boldsymbol{q})$ степени 2, аппроксимирующий экспертные оценки q_0^j комплексных показателей качества $q = q^j = f(\boldsymbol{q}^j)$, $j=1,\ldots,10$, и $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7)$. Множество таких точек $\boldsymbol{q}$, что все $q_i \in [0; 1]$, является гиперкубом Q^7. Его вершинами служат точки вида $(B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7)$, где $B_i \in \{0; 1\}$, – всего 128 вершин. Искомый многочлен (11) при $n = 7$ определяется системой уравнений (14). Для его строгой монотонности (5), (6) необходимо и достаточно, чтобы в каждой из вершин гиперкуба Q^7 выполнялись все условия (13).

Таблица 1

Параметры смартфонов [19]

№	Модель устройства	Потребительские качества						
		Цена, долл. США	Память, Гб	ОЗУ, Гб	Емкость батареи, мА·ч	Диагональ дисплея, см	Камера, Мпк	Частота процессора, ГГц
1	Redmi 7a	85	16	2	4 000	13,84	12	2
2	Samsung Galaxy A10	105	32	2	3 400	15,75	13	1,6
3	Samsung J6 Plus	171	64	4	3 300	15,24	13	1,4
4	Oppo k1	197	64	4	3 600	16,28	16	1,95
5	Realme 3	124	64	3	4 230	15,8	13	2,1
6	Redmi Note 7S	131	32	3	4 000	16	48	2,2
7	Honor 10 Lite	160	64	6	3 400	15,77	13	2,2
8	Realme 5i	144	128	4	5 000	16,56	12	2,2
9	Redmi 8a	98	32	3	5 000	15,8	12	1,95
10	Redmi k20 pro	355	128	6	4 000	16,23	48	2,84

Таблица 2

Частные показатели качества смартфонов

№	Модель устройства	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
1	Redmi 7a	0,000	0,000	0,000	0,206	0,000	0,000	0,208
2	Samsung Galaxy A10	0,037	0,071	0,000	0,029	0,351	0,014	0,069
3	Samsung J6 Plus	0,159	0,214	0,250	0,000	0,257	0,014	0,000
4	Oppo k1	0,207	0,214	0,250	0,088	0,449	0,056	0,191
5	Realme 3	0,072	0,214	0,125	0,274	0,360	0,014	0,243
6	Redmi Note 7S	0,085	0,071	0,125	0,206	0,397	0,500	0,278
7	Honor 10 Lite	0,139	0,214	0,500	0,029	0,355	0,014	0,278
8	Realme 5i	0,109	0,500	0,250	0,500	0,500	0,000	0,278
9	Redmi 8a	0,024	0,071	0,125	0,500	0,360	0,000	0,191
10	Redmi k20 pro	0,500	0,500	0,500	0,206	0,439	0,500	0,500

Путем реализации алгоритма из § 3 с помощью надстройки «Поиск решения» в Excel были последовательно найдены диапазоны (21) для q_0^j. В силу Замечания из § 3 условие (22) здесь выполняется автоматически, так как число свободных параметров СМ (11) при $n=7$ равно 27, что больше числа экспертных оценок $E=10$. В роли оценок q_0^j выбирались центры промежутков (21). В реальности они назначались бы экспертами в промежутках (21).

Исходя из представленных в табл. 3 оценок q_0^j и системы уравнений (18), с учетом условий (14) были найдены коэффициенты a_i, b_{ik}, c_l многочлена (11). В результате получен следующий СМ:

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{q}) = &-0,017q_1^2 - 0,032q_2^2 - 0,032q_3^2 - 0,13q_4^2 - \\ &-0,049q_5^2 - 0,033q_6^2 - 0,093q_7^2 + 0,034q_1q_4 + \\ &+0,063q_2q_4 + 0,023q_3q_4 + 0,013q_3q_5 + \\ &+0,028q_3q_7 + 0,067q_4q_6 + 0,073q_4q_7 + \\ &+0,086q_5q_7 + 0,034q_1 + 0,063q_2 + 0,064q_3 + \\ &+0,259q_4 + 0,238q_5 + 0,067q_6 + 0,275q_7. \end{aligned} \tag{25}$$

Таблица 3

Диапазоны экспертных оценок комплексного качества

№	Модель устройства	$q_{\min}^j$	$q_{\max}^j$	q_0^j
1	Redmi 7a	0,000	0,208	0,104
2	Samsung Galaxy A10	0,015	0,210	0,113
3	Samsung J6 Plus	0,055	0,117	0,091
4	Oppo k1	0,186	0,249	0,218
5	Realme 3	0,223	0,264	0,244
6	Redmi Note 7S	0,236	0,299	0,268
7	Honor 10 Lite	0,198	0,227	0,212
8	Realme 5i	0,350	0,371	0,360
9	Redmi 8a	0,227	0,286	0,257
10	Redmi k20 pro	0,398	0,424	0,411

Погрешность (16), с которой многочлен (25) аппроксимирует экспертные оценки q_0^j, равна $\Delta=0,013$. Средний рейтинг смартфонов, построенный с помощью показателя качества $q=f(\boldsymbol{q})$, приведен в табл. 4.

Таблица 4

Общий рейтинг смартфонов, построенный с помощью СМ (24)

Ранг	Модель устройства	q^j, расчетная оценка
1	Samsung J6 Plus	0,091
2	Redmi 7a	0,104
5	Samsung Galaxy A10	0,113
6	Honor 10 Lite	0,212
3	Oppo k1	0,218
8	Realme 3	0,244
7	Redmi 8a	0,257
9	Redmi Note 7S	0,268
4	Realme 5i	0,360
10	Redmi k20 pro	0,398

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье представлена и теоретически обоснована идея вычисления комплексных показателей качества (многомерных функций ценности, предпочтения или полезности), которые выражаются через частные показатели сдвиг-инвариантными монотонными многочленами (СМ). Описаны методы получения СМ степеней 2 и 3. Главной целью настоящего исследования была разработка алгоритма вычисления СМ степени 2, называемого интерактивной аппроксимацией экспертных оценок, который решает задачу минимизации среднеквадратического отклонения между экспертными оценками и расчетными значениями комплексных показателей качества для объектов из выборки (эмпирической совокупности). Последняя должна быть репрезентативной для гиперкубической совокупности или какой-то ее части. Понятие гиперкубической совокупности введено для того, чтобы придать вполне определенный смысл понятию комплексного показателя качества, связав его с задачей многокритериального ранжирования.

Данный метод сужает промежутки возможных значений для оценок, которые в остальном назначаются по усмотрению экспертов. Это уменьшает неопределенность, что упрощает работу экспертов и повышает объективность их суждений. Одновременно повышается взаимная согласованность экспертных оценок. Коэффициенты искомого СМ выражаются через получаемые таким образом экспертные оценки в ходе единого процесса, который называется интерактивной аппроксимацией и осуществляется в соответствии с алгоритмом, описанным в заключительной части § 3.

Принципиальная осуществимость метода интерактивной аппроксимации экспертных оценок подтверждается примерами, приведенными в § 4. Этот метод нуждается в обобщении на случай СМ степени 3 и выше, а также в проверке его практической полезности, включая проведение реальных экспертиз.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азгальдов Г.Г., Райхман Э.П.* О квалиметрии / под ред. А.В. Гличева. – М.: Издательство стандартов, 1973. – 172 с.

[*Azgaldov, G.G., Raikhman, E.P.* About Qualimetry / Ed. by A.V. Glichev. – Moscow: Standards Publishing House, 1973. – 172 p. (In Russian)]

2. *Петровский А.Б.* Теория принятия решений: учебник для студентов высших учебных заведений. – М.: Академия, 2009. – 400 с. [*Petrovsky, A.B.* Theory of Decision Making: A Textbook for Students of Higher Educational Institutions. – M.: Academia, 2009. – 400 p. (In Russian)]
3. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Физматлит, 2007. – 256 с. [*Podinovskii, V.V., Noghin, V.D.* Pareto-Optimal Solutions to Multicriteria Problems. – M.: PhysmathLit, 2007. – 256 p. (In Russian)]
4. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. – М.: Наука, 1974. – 256 с. [*Mirkin, B.G.* The Problem of Group Choice. – Moscow: Science, 1974. – 256 s. (In Russian)]
5. *Кини* Р.Л., *Райфа* Х. *Принятие решений* при многих критериях: предпочтения и замещения. – М.: Радио и связь, 1981. – 560 с. [*Keeney, R.L., Raiffa, H.*, Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs. – New York: Wiley, 1976.]
6. *Анохин А.М., Глотов В.А., Павельев В.В., Черкашин А.М.* Методы определения коэффициентов важности критериев // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 8. – С. 3–35. [*Anokhin, A.M., Glotov, V.A., Pavel'ev, V.V., Cherkashin, A.M.* Methods for Determination of Criteria Importance Coefficients // Avtomatika i telemekhanika. – 1997. – No. 8. – P. 3–35. (In Russian)]
7. *Орлов А.И.* Экспертные оценки // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 1996. – № 1 (62). – С. 54–60. [*Orlov, A.I.* Expert assessments // Zavodskaya Laboratoria. Diagnostika materialov. – 1996. – No. 1 (62). – P. 54–60. (In Russian)]
8. *Подиновский В.В*. Идеи и методы теории важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений. – М.: Наука, 2019. – 104 с. [*Podinovskii, V.V.* Ideas and methods of the theory of criteria importance in multicriteria decision-making problems. – M.: Nauka, 2019. – 104 p. (In Russian)]
9. *Брызгалин Г.И.* Введение в теорию качества. – В.: Издательство Волгоградского политехнического института, 1988. – 91 с. [*Bryzgalin, G.I.* Introduction to the Theory of Quality. – Volgograd: Publishing house of the Volgograd Polytechnic Institute, 1988. – 91 s. (In Russian)]
10. *Джофрион А., Дайер Д, Файнберг А.* Решение задачи оптимизации при многих критериях на основе человеко-машинных процедур. Применение к задаче организации учебного процесса факультета университета // Вопросы анализа и процедуры принятия решений. – М.: Мир. – 1976. – С. 126–145. [*Geoffrion, A.M., Dyer, J. S., and Feinberg, A.*, Interactive Approach for Multicriterion Optimization, with an Application to the Operation of an Academic Department // Manage. Sci., Appl. – 1972. – Vol. 19. – P. 357–368.]
11. *Marler, R., Arora, J.* The Weighted Sum Method for Multi-objective Optimization: New Insights // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2010. – No. 41. – P. 853–862.
12. *Calvo, T., Kolesárová, A., Komorníková, M., Mesiar, R.* Aggregation Operators: Properties, Classes and Construction Methods, Aggregation operators // New Trends and Applications. – Heidelberg: Physica-Verlag, 2002. – P. 3–106.
13. *Зотьев Д.Б.* Нормализованные средние функции и проблема свертывания показателей качества // Справочник. Инженерный журнал. – 2009. – № 5 (146). – С. 43–48. [*Zotev, D.B.* Normalized Averages Functions and Problem of Aggregation of Quality Indexes // Handbook. Engineering magazine. – 2009. – No. 5 (146). – P. 43–48. (In Russian)]
14. *Брызгалин Г.И.* Теория качеств и системные приложения // Справочник. Инженерный журнал. – 2009. – № 5 (146). – С. 57–63. [*Bryzgalin, G.I.* Theory of Qualities and System Applications // Handbook. Engineering magazine. – 2009. – No. 5 (146). – P. 57–63. (In Russian)]
15. *Зотьев Д.Б.* О нормализованных средних критериях, интерполирующих экспертные оценки // Справочник. Инженерный журнал. – 2012. – № 7 (184). – С. 50–56. [*Zotev, D.B.* On Normalized Average Criteria Interpolating Expert Estimates // Handbook. Engineering Magazine. – 2012. – No. 7 (184). – P. 50–56. (In Russian)]
16. *Айвазян С.А., Бухштабер В.М., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д.* Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 606 с. [*Ayvazyan, S.A., Bukhstaber, V.M., Enyukov, I.S., Meshalkin, L.D.* Applied Statistics. Classification and Dimensionality Reduction. – Moscow: Finance and Statistics, 1989. – 606 p. (In Russian)]
17. *Зотьев Д.Б.* К проблеме определения весовых коэффициентов на основании экспертных оценок. // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2011. – № 1 (77). – С. 75–78. [*Zotev, D.B.* On the Problem of Determining Weight Coefficients Based on Expert Assessments // Factory Laboratory. Diagnostics of Materials. – 2011. – No. 1 (77). – P. 75–78. (In Russian)]
18. *Литвак Б.Г.* Экспертная информация: методы получения и анализа. – М.: Радио и связь. – 1982. – 184 с. [*Litvak, B.G.* Expert Information: Methods of Obtaining and Analysis. – Moscow: Radio and Communications. – 1982. – 184 p. (In Russian)]
19. *Goswami, S.S., Behera, D. K.* Evaluation of the Best Smartphone Model in the Market by Integrating Fuzzy-AHP and PROMETHEE Decision-Making Approach // Decision. – 2021. – No. 1–(48). – P. 71–96.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Ф.Т. Алескеровым.

Поступила в редакцию 17.06.2024,
после доработки 24.12.2024.
Принята к публикации 20.01.2025.

Зотьев Дмитрий Борисович – д-р физ.-мат. наук,
✉ zotev@inbox.ru

Махин Александр Александрович – аспирант,
✉ kislik0fist@mail.ru

Новосибирский государственный университет экономики и управления «НИНХ», г. Новосибирск

POLYNOMIAL REGRESSION OF EXPERT ESTIMATES OF COMPLEX QUALITY

D. B. Zot'ev* and A. A. Makhin**

*Novosibirsk State University of Economics and Management, Novosibirsk, Russia

*✉ zotev@inbox.ru, **✉ kislik0fist@mail.ru

Abstract. The multicriteria ranking problem of objects with several useful qualities is considered. Relating to the field of multicriteria optimization, this problem also arises when management decisions are chosen among several alternatives. The goal of this study is to develop a solution method based on calculating complex (generalized mean) quality indicators that represent polynomials from the class of normalized mean functions. The latter belong to strictly monotonic, shift-invariant aggregation operators. Such polynomials are called SPs for short. For example, the weighted arithmetic mean indicators of complex quality are SPs of degree 1. Apparently, SPs have all the properties of such linear functions that are essential for multicriteria ranking. Within the method presented, called the interactive approximation of expert estimates, we SPs of arbitrary degree for calculating complex quality indicators. This approach is similar to the expert-statistical method for determining weights. It provides the best root-mean-square approximation of any number of expert estimates, reducing their uncertainty and increasing their mutual consistency during the expertise procedure. The SPs of degrees 1, 2, and 3 are described below. The interactive approximation method of expert estimates is tested for SPs of degree 2 in the problem of calculating a complex quality indicator for smartphones ranked by seven partial qualities.

Keywords: multicriteria optimization, decision-making, normalized mean function, shift-invariant polynomial, aggregation operator, weight coefficient, complex indicator, expert estimate.