

ГАРАНТИРОВАННЫЕ РИСКИ И ИСХОДЫ В «ИГРЕ С ПРИРОДОЙ»

В.И. Жуковский, Н.Г. Солдатова

Рассмотрена однокритериальная задача при неопределенности, причем о последней известны только границы изменения, а какие-либо вероятностные характеристики по тем или иным причинам отсутствуют. Предложено два понятия гарантированного одновременно по исходам и рискам решения. Первый базируется на способе принятия решения в двухуровневой иерархической игре двух лиц, второй — на определении векторного максимина. Найден явный вид решения при линейно-квадратичном виде критерия.

Ключевые слова: стратегия, неопределенность, критерий, минимаксное сожаление, максимин, векторный оптимум.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье рассматривается однокритериальная задача $\Gamma^{(1)} = \langle X, Y, f(x, y) \rangle$ в условиях риска и неопределенности (игра с природой). В рамках этой задачи лицо, принимающее решение (ЛПР), выбирает свою стратегию $x \in X \subseteq R^n$ так, чтобы достичь возможно большего исхода (значения скалярного критерия $f(x, y)$), ориентируясь на реализацию любой чистой неопределенности $y \in Y \subseteq R^m$. Предполагается, что о неопределенностях ЛПР известны лишь границы изменения и отсутствуют какие-либо вероятностные характеристики. Такая модель $\Gamma^{(1)}$ возникает, например, на рынке сбыта, где продавец действует с учетом импорта (или конкуренции), добываясь как можно большей прибыли.

Заметим, что подробные обзоры различных видов неопределенности (неполноты и (или) неточности информации об условиях реализации выбранной стратегии) можно найти, например, в книгах [1, с. 106—114; 2, с. 20—32, и др.].

Наличие неопределенностей приводит к множественности исходов $f(x, Y) = \{f(x, y) | \forall y \in Y\}$, «порожденных» каждой конкретной стратегией $x \in X$. «Сужается» $f(x, Y)$ за счет рисков. Однако, как считает известный специалист в области оптимизации Т.К. Сиразетдинов, «строгое математическое определение риска в настоящее время не

существует» [3, с. 31]. В книге [4, с. 15] приводится целая серия различных понятий риска. Все из них, кроме приводимого далее, требуют статистических данных. Однако зачастую у исследователя операций (ИО) просто отсутствует возможность описать «поведение» неопределенностей статистическими методами. Как раз этого случая будем в дальнейшем придерживаться.

Итак, приведем определение: «Риск — это возможность отклонения каких-либо величин от их желаемых значений».

Отметим, что именно такому понятию риска отвечают общепринятые многочисленные микроэкономические риски, вид которых приведен в работе [5, с. 40—50].

Численно оценивается риск значением функции сожаления

$$\Phi(x, y) = \max_{z \in X} f(z, y) - f(x, y), \quad (1)$$

предложенной Леонардом Сэвиджем [6] в 1951 г. Лауреат Нобелевской премии по экономике Милтон Фридман сказал о Сэвидже, что тот «... был одним из немногих встреченных мной людей, о которых я, не задумываясь, могу сказать — гений». Предложенный в работе [6] принцип минимаксного сожаления, сводящийся к построению пары (x^S, Φ^S) согласно

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} \Phi(x, y) = \max_{y \in Y} \Phi(x^S, y) = \Phi^S,$$



активно используется для решения задачи $\Gamma^{(1)}$ наравне с принципом максимина (гарантированного результата по Вальду [7]), сводящемуся к нахождению пары (x^g, f^g) такой, что

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} f(x^g, y) = f^g.$$

Сама функция сожаления $\Phi(x, y)$ в отечественной и мировой литературе получила название «функция риска по Сэвиджу». Именно функцию риска $\Phi(x, y)$ и привлекаем в настоящей статье для оценки гарантированного риска.

Каким бывает отношение людей к риску? В ряде книг по финансовой экономике [1, с. 103; 5, с. 5; 8, с. 343] выделено три группы субъектов в зависимости от отношения их к риску:

- противники риска — рискофобы (люди, боящиеся риска и отвергающие его);
- рисконейтралы (люди, нейтрально относящиеся к риску);
- любители риска — рискофилы.

В экономике считается, что большинство людей относятся к противникам риска. На вопрос о том, как фактор неопределенности влияет на поведение людей, экономист обычно отвечает: «Люди не любят рисковать и готовы заплатить деньги за то, чтобы избежать бремени риска» [5, с. 6].

Однако возникают ситуации, когда риск просто необходим. Люди прошлого выходили в море, что часто было связано с риском для жизни. Существует даже латинская пословица: «Плывать по морю необходимо, жить — не очень». Так любители риска относятся и к альпинизму, авиации, экстремальным ситуациям. Более того, предпринимательство и риск — понятия неразделимые. В экономической практике принято, что некоторая доля риска является необходимым условием увеличения дохода. Зачастую возникают ситуации, когда без риска вообще обойтись невозможно (например, в чрезвычайных ситуациях).

Наконец, значительное большинство относится к рисконейтралам. Они будут пускаться пусть даже и в рискованные ситуации, но в том только случае, если доход будет выглядеть достаточно привлекательным и одновременно, чтобы возможно меньше нужно было бы рисковать.

В соответствии с приведенной градацией, работы [9, 10] и глава 3 из книги [11] посвящены исследованию бескоалиционных игр с позиции противников риска; те же игры, но с позиции любителей риска — в работе [12]; взгляд рисконейтрала на принятие решений в $\Gamma^{(1)}$ — в этой статье. Принятый здесь подход предполагается в дальнейшем распространить на бескоалиционные и кооперативные игры при неопределенности. Именно с

этой целью в статье привлечены некоторые положения теории «игр с приоритетом в действиях у управляющего центра, получивших название иерархических игр Гермейера» [13, с. 8].

Итак, цели настоящей работы:

- формализовать гарантированное решение задачи $\Gamma^{(1)}$ с *одновременным* учетом исходов и рисков (предложено два варианта понятия);
- установить существование при ограничениях, «привычных» для математического программирования;
- найти явный вид гарантированных решений в случае линейно-квадратичного варианта критерия $f(x, y)$ при ограниченных чистых неопределенностях.

1. ИНФОРМИРОВАННЫЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Иерархическая игра представляет собой «математическую модель конфликтной ситуации при фиксированной последовательности ходов и обменом информацией участников» [14, с. 477]. Активное развитие теории иерархических игр в России началось со второй половины прошлого века и возглавлялось Юрием Борисовичем Гермейером ([13—17] и др.), продолжается его учениками. В игре двух лиц «такие игры описывают взаимодействие между верхним (ведущим) и нижним (ведомым) уровнями управления» [17, с. 103], именно, задают порядок ходов игроков, т. е. очередность выбора стратегий и (возможно) сообщение о таком выборе партнеру.

Основной момент в иерархических играх заключается в выборе класса используемых стратегий, зависящем от имеющейся у игроков информации. В теории иерархических игр Гермейера сформулировано точное математическое определение информационного расширения игры [14, с. 479; 15, с. 49—51], которое, в частном случае, приводит к использованию в задаче $\Gamma^{(1)}$ наряду с чистыми неопределенностями $y \in Y$ так называемых, «информированных неопределенностей» — m -вектор-функций $y(x): X \rightarrow Y$. Именно такие стратегии применялись в работе [18, с. 353] при изучении детерминированного варианта минимаксной антагонистической позиционной игры, в которой игроки наделены различными информационными возможностями. Такие возможности определяют соответствующие виды стратегий, что приводит, в свою очередь, к различным видам иерархических игр (Γ_1 , Γ_2 и т. д.) [13, 15, 17].

Наконец, в теории иерархических игр принято выделять *оперирующую сторону* — ЛПР, несущего полную ответственность за результаты, и *исследо-*

вателя операций — консультанта, который готовит аргументированные варианты решений.

При рассмотрении задачи $\Gamma^{(1)}$ будем считать, что один игрок (у нас ИО) ограничен только чистыми стратегиями $x \in X$, другой же может использовать «любую мыслимую информацию» [18, с. 353]. В частности, он может знать стратегию x (информационная дискриминация ИО) и формировать неопределенность в виде функции $y(x): X \rightarrow Y$. В этом случае критерий в задаче $\Gamma^{(1)}$ определяется скалярной функцией $f(x, y(x))$, а исходом будет (при выборе ИО конкретной стратегии $x^* \in X$) значение $f(x^*, y(x^*))$. Такие функции $y(\cdot) \in Y^X$ (множеству m -вектор-функций $y(x)$, определенных на X со значениями в Y) в теории дифференциальных игр иногда называют *контрстратегиями*, а задача вида $\Gamma^{(1)}$, где в качестве неопределенностей используются контрстратегии $y(x)$, названа в работе [18, с. 354] *минимаксной игрой*. Повторим, что такие задачи возникают при информационной дискриминации ИО и дополнительной информированности игрока, «ведущего» формированием неопределенностей. Заметим также, что далее будем применять подмножество Y^X , именно множество $C(X, Y)$ всех покомпонентно непрерывных на X m -вектор-функций $y(x): X \rightarrow Y$.

Итак, в статье используется два вида неопределенностей: чистые $y \in Y$ и информированные $y(\cdot) \in Y^X$.

Приведем два результата из теории исследования операций, касающиеся «информированных неопределенностей».

Лемма 1. Если в $\Gamma^{(1)} = \langle X, Y, f(x, y) \rangle$ множества X, Y суть компакты, а $f(x, y)$ непрерывна на $X \times Y$, то:

а) функция максимума (минимума) $\max_{x \in X} f(x, y)$ (соответственно, $\min_{y \in Y} f(x, y)$) непрерывна на Y (соответственно на X);

б) если дополнительно Y — выпукло и $f(x, y)$ строго выпукла по $y \in Y$ при каждом $x \in X$, то существует единственная непрерывная функция $y(\cdot) \in C(X, Y)$ такая, что

$$\min_{y \in Y} f(x, y) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in X. \quad \blacklozenge$$

Напомним, что $f(x, y)$ строго выпукла по $y \in Y$ при каждом $x \in X$, если

$$f(x, \lambda y^{(1)} + (1 - \lambda)y^{(2)}) < \lambda f(x, y^{(1)}) + (1 - \lambda)f(x, y^{(2)})$$

при любых постоянных $\lambda \in (0, 1)$ и всяких $y^{(j)} \in Y$, $j = 1, 2$, $y^{(1)} \neq y^{(2)}$.

Утверждение *a* — известный факт, имеющийся во многих учебных книгах, например, [19, с. 146], а справедливость утверждения *б* указана, например, в книге [20, с. 54].

Замечание 1. Из леммы утверждения *a* следует непрерывность на $X \times Y$ функции риска (1) (если только в задаче $\Gamma^{(1)}$ множества X, Y суть компакты, а $f(x, y)$ непрерывна на $X \times Y$).

2. ДВУХКРИТЕРИАЛЬНАЯ ЗАДАЧА, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ ЗАДАЧЕ $\Gamma^{(1)}$

Однокритериальной задаче

$$\Gamma^{(1)} = \langle X, Y, f(x, y) \rangle \quad (2)$$

поставим в соответствие двухкритериальную при неопределенности

$$\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle, \quad (3)$$

где двухкомпонентная вектор-функция

$$F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)), \quad F_1(x, y) = f(x, y), \quad F_2(x, y) = -\Phi(x, y). \quad (4)$$

В задаче (3) ИО выбором стратегии $x \in X$ стремится к возможно *большим* значениям обоих исходов $F_i(x, y)$, $i = 1, 2$, одновременно (именно для такого однообразия в выражении (4) функция риска по Сэвиджу фигурирует со знаком «минус»). При этом ИО учитывает возможную реализацию любой неопределенности $y \in Y$ (или $y(\cdot) \in Y^X$).

Приведем ряд сведений из теории многокритериальных задач вида $\Gamma^{(2)} = \langle X, F[x] \rangle$, где $x \in X$ (множеству стратегий x у ИО), вектор критериев $F[x] = (F_1[x], F_2[x])$ определен на X . Используем для двух векторов $F^{(j)} = (F_1^{(j)}, F_2^{(j)})$, $j = 1, 2$, отношения *строгого порядка*:

$$F^{(1)} < F^{(2)} \Leftrightarrow (F_i^{(1)} < F_i^{(2)}, i = 1, 2),$$

$$F^{(1)} \not< F^{(2)} \Leftrightarrow \neg (F^{(1)} < F^{(2)}),$$

и *нестрогого порядка*:

$$F^{(1)} = F^{(2)} \Leftrightarrow (F_i^{(1)} = F_i^{(2)}, i = 1, 2),$$

$$F^{(1)} \neq F^{(2)} \Leftrightarrow \neg (F^{(1)} = F^{(2)}),$$

$$F^{(1)} \geq F^{(2)} \Leftrightarrow (F_i^{(1)} \geq F_i^{(2)}, i = 1, 2),$$

$$F^{(1)} \not\geq F^{(2)} \Leftrightarrow \neg (F^{(1)} \geq F^{(2)} \wedge F^{(1)} \neq F^{(2)}).$$



Перейдем к формализации двух максимальных векторных оптимумов:

1) стратегия $x^S \in X$ называется *максимальной по Слейтеру* в $\Gamma^{(2)} = \langle X, F[x] \rangle$, если

$$F[x^S] \not\leq F[x] \quad \forall x \in X,$$

вектор $F[x^S]$ является *максимумом по Слейтеру* в $\Gamma^{(2)}$ (что эквивалентно: для каждой стратегии $x \in X$ найдется хотя бы один номер $j(x) = j \in \{1, 2\}$ такой, что $F_j(x) \leq F_j(x^S)$);

2) стратегия $x^P \in X$ называется *максимальной по Парето* в $\Gamma^{(2)}$, если

$$F[x^P] \not\leq F[x] \quad \forall x \in X,$$

а вектор $F[x^P] \in R^2$ есть *максимум по Парето* для $\Gamma^{(2)}$ (что эквивалентно любому из двух определений — для каждого $x \in X$:

а) либо $F[x^P] = F[x]$, либо $\exists j(x) = j \in \{1, 2\}$ такой, что $F_j[x] < F_j[x^P]$;

б) несовместна система неравенств $F_i[x] \geq F_i[x^P]$, $i = 1, 2$, из которых, по крайней мере, одно строгое).

Обозначим множество $x^S(x^P)$ через X^S (соответственно, X^P). Согласно определениям $X^P \subseteq X^S$, но они могут не совпадать. Факт максимальности в $\Gamma^{(2)}$ по Слейтеру (по Парето) обозначаем

$$F[x^S] = \text{MAX}_{x \in X}^S F[x] \quad (F[x^P] = \text{MAX}_{x \in X}^P F[x]).$$

Будем использовать и множества $F[X^S] = \{F[x] \mid x \in X^S\}$, $F[X^P] = \{F[x] \mid x \in X^P\}$. В теории многокритериальных задач [21, с. 158] установлены следующие факты:

Лемма 2 [21, с. 158]. Если в $\Gamma^{(2)} = \langle X, F[x] \rangle$ множество X есть непустой компакт, а компоненты вектора $F[x]$ непрерывны, то множество $X^P \neq \emptyset$ и стратегия $x^P \in X$, найденная из

$$\max_{x \in X} (\alpha_1 F_1[x] + \alpha_2 F_2[x]) = \alpha_1 F_1[x^P] + \alpha_2 F_2[x^P]$$

при каких-либо $\alpha_i = \text{const} > 0$, $i = 1, 2$, *максимальна по Парето* в $\Gamma^{(2)}$, множество X^P *внутренне P-устойчиво*, т. е. $\forall x^{(j)} \in X^P$ имеет место $F[x^{(1)}] \not\leq F[x^{(2)}]$, а также *внешне P-устойчиво*, т. е. $\forall x \in X$ и $x \notin X^P$ существует стратегия $x^P \in X^P$ такая, что $F[x] \leq F[x^P]$.

3. СТРОГО ГАРАНТИРОВАННОЕ ПО ИСХОДАМ И РИСКАМ РЕШЕНИЕ

3.1. Интерпретация максимина «с позиции» двухуровневой иерархической игры двух лиц

Максиминное решение (x^g, f^g) задачи (2) определяется цепочкой равенств

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} f(x^g, y) = f^g. \quad (5)$$

Используя «информированные неопределенности», выражение (5) можно представить как последовательное «действие» двух операций: *внутреннего минимума* — для игрока нижнего уровня — построение $y(x): X \rightarrow Y$ такого, что

$$\min_{y \in Y} f(x, y) = f(x, y(x)) = f[x] \quad \forall x \in X; \quad (6)$$

предполагая, что вектор-функция $y(x)$ единственна, переходим к операции *внешнего максимума* (для игрока верхнего уровня иерархии)

$$\max_{x \in X} f(x, y(x)) = f(x^g, y(x^g)) = f^g. \quad (7)$$

Тогда в иерархической двухуровневой игре с одним игроком на каждом уровне:

первый ход за ИО — игроком верхнего уровня: он передает на нижний уровень «свои» возможные стратегии $x \in X$;

второй ход за игроком нижнего уровня — он аналитически конструирует $y(x)$ согласно (6) и, если $y(x)$ единственно, передает $y(x)$ на верхний уровень;

третий ход за игроком верхнего уровня — он находит пару (x^g, f^g) согласно (7).

Приведенное «трехходовое понятие» укладывается *полностью* в определение гарантированного результата первого (ведущего) игрока в игре $\Gamma^{(1)}$ (по Гермейеру), если в работе [17, с. 104] заменить функцию выигрыша ведомого на $-f(x, y)$. Нетрудно видеть также, что находясь в рамках игры $\Gamma^{(1)}$, ведущий игрок, если знает *правило поведения ведомого*, может сам вычислить реакцию ведомого и сразу реализовать третий ход. Еще раз подчеркнем, что аналог и модификацию такого «трехходового понятия» удобно применять к построению гарантированного решения с учетом исходов и рисков для бескоалиционного и кооперативного вариантов конфликта.

Замечание 2. Максиминное решение определяется парой (x^g, f^g) по двум причинам:

а) каждой стратегии $x \in X$ (в результате операции *внутреннего минимума* (6)) ставится в соответствие гарантия $f[x]$, ибо

$$f[x] \leq f(x, y) \quad \forall y \in Y$$

(так как исход $f[x]$ «обеспечивает себе» ИО при любых $y \in Y$ благодаря применению стратегии x);

б) из таких гарантий ЛПР выбирает наибольшую (максимальную), ибо

$$f^g = f[x^g] \geq f[x] \quad \forall x \in X.$$

Итак, ЛПР предлагается применить в задаче (2) стратегию x^g , тем самым «обеспечивая себе» наибольшую (максимальную) гарантию $f[x^g] = f(x^g, y(x^g)) \leq f(x^g, y) \quad \forall y \in Y$. Этот же прием применим при формализации сильно гарантированного по исходам и рискам решения (СГР) задачи (3), (4).

3.2. Формализация

Определение 1. Пару $(x^P, F^g = F[x^P]) \in X \times R^2$ назовем *сильно гарантированным по исходам и рискам решением* однокритериальной задачи (2), если в задаче (3):

1°) существует для каждого $x \in X$ и $i = 1, 2$ «своя» гарантия

$$F_i[x] = \min_{y \in Y} F_i(x, y) \leq F_i(x, y) \quad \forall y \in Y;$$

2°) стратегия x^P максимальна по Парето ($x^P \in X^P$) в двухкритериальной «задаче гарантий» $\langle X, F[x] \rangle$.

Замечание 3. Отметим, что:

— в случае компактности X, Y , выпуклости Y , непрерывности $f(x, y)$ на $X \times Y$ и ее строгой выпуклости по y при каждом $x \in X$ такое гарантированное решение существует (что сразу следует из леммы 1, п. а и леммы 2), причем при использовании ИО стратегии $x \in X$ значение $F_i[x]$ будет гарантией по исходам ($F_1[x] \leq F_1(x, y) \quad \forall y \in Y$), а $F_2[x]$ — гарантией по рискам, ибо $F_2[x] \leq F_2(x, y) \quad \forall y \in Y$;

— п. 1° определения 1 связывает с каждой стратегией $x \in X$ векторную гарантию $F[x] \leq F(x, y) \quad \forall y \in Y$ (аналог операции внутреннего минимума в определении максимина);

— п. 2° предлагает лицу, принимающему решение, применять максимальную (по Парето) гарантию $F[x^P]$ (аналог операции внешнего максимума), ибо при $x \in X$ и $x \neq x^P$ увеличение одной из гарантий $F_j[x] > F_j[x^P]$ неизбежно влечет уменьшение другой $F_k[x] < F_k[x^P]$, $k \neq j \in \{1, 2\}$;

— вследствие внешней и внутренней Р-устойчивости множества X^P , выбор лицом, принимаю-

щим решение, стратегии $x^P \in X^P$ «обеспечивает» ему «самую большую» — неулучшаемую векторную гарантию $F[x^P]$ (конечно, в рамках максимальнойности по Парето);

— гарантия $F_1[x]$ ограничивает исходы $f(x, y)$ снизу, ибо $f(x, y) \geq F_1[x] \quad \forall y \in Y$, а риски $\Phi(x, y)$ — сверху, так как $\Phi(x, y) \leq -F_2[x] \quad \forall y \in Y$. Этот подход полностью соответствует желаниям рисконейтрала (см. Введение) увеличить исход и одновременно уменьшить риск.

3.3. «Иерархическая» интерпретация определения 1

Как и в п. 3.1, рассматриваем двухуровневую игру с одним игроком на каждом уровне (рис. 1).

Порядок построения СГР

Первый ход за игроком верхнего уровня: он, также как в понятии максимина, посылает на нижний уровень свои возможные стратегии $x \in X$.

Второй ход за игроком нижнего уровня; он аналитически конструирует две функции $F_i[x]$, $i = 1, 2$, согласно

$$F_i[x] = \min_{y \in Y} F_i(x, y) \quad \forall x \in X,$$

строая тем самым для каждой стратегии $x \in X$ векторную гарантию $F[x] = (F_1[x], F_2[x])$, и отправляет векторную гарантию $F[x]$ на верхний уровень иерархии.

Третий ход снова за игроком верхнего уровня: он находит максимальную по Парето стратегию x^P в двухкритериальной «задаче гарантий» $\langle X, F[x] \rangle$ и строит соответствующий вектор $F^g = (F_1[x^P], F_2[x^P])$. Тогда пара (x^P, F^g) и образует строго гарантированное по исходам и рискам решение задачи (2). «Двухкритериальный смысл» такого решения см. в замечании 3.

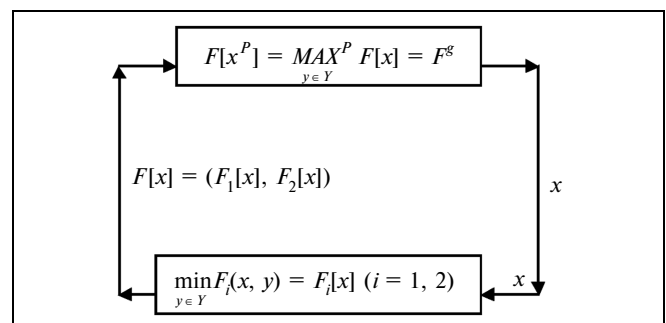


Рис. 1. Порядок построения СГР



3.4. Существование

Существование (x^P, F^g) устанавливает

Утверждение 1. Если в задаче (2) множества X и Y компактны (замкнуты и ограничены в соответствующих евклидовых пространствах), а критерий $f(x, y)$ непрерывен на $X \times Y$, то в однокритериальной задаче (2) существует сильно гарантированное по исходам и рискам решение.

Доказательство. Из непрерывности $f(x, y)$ и $\Phi(x, y) = \max_{z \in X} f(z, y) - f(x, y)$ на $X \times Y$, а также компактности X, Y и леммы 1, п. а следует существование непрерывных на X функций $F_i[x] = \min_{y \in Y} F_i(x, y)$, $i = 1, 2$. Поэтому линейная свертка $\Psi(x) = \alpha_1 F_1[x] + \alpha_2 F_2[x]$ при, например, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ также непрерывна на X . По теореме Вейерштрасса тогда найдется стратегия $x^P \in X$, для которой $\max_{x \in X} \Psi(x) = \Psi(x^P)$. По лемме 2 такая стратегия x^P максимальна по Парето в задаче (3) (безотносительно к конкретному виду $F_i[x]$, $i = 1, 2$). Затем по стратегии $x^P \in X$ построим вектор $F^g = (F_1[x^P], F_2[x^P]) \in R^2$. Пара (x^P, F^g) как раз и образует сильно гарантированное по исходам и рискам решение задачи (2).

Замечание 4. Для построения явного вида сильно гарантированного решения (x^P, F^g) определение 1 «диктует» следующие этапы.

Этап 1. Найти $\min_{y \in Y} f(x, y) = F_1[x] \quad \forall x \in X$.

Этап 2. Найти $\min_{y \in Y} [-\Phi(x, y)] = -\max_{y \in Y} \Phi(x, y) = F_2[x] \quad \forall x \in X$.

Этап 3. Определить максимизатор $x^P = \arg \max_{x \in X} (F_1[x] + F_2[x])$ и построить $F_i[x^P]$, $i = 1, 2$.

Тогда пара $(x^P, F^g = (F_1[x^P], F_2[x^P]))$ является сильно гарантированным по исходам и рискам решением задачи (2).

3.5. Линейно-квадратичный вариант задачи с ограниченной скалярной неопределенностью

Рассматриваем однокритериальную задачу

$$\Gamma_{\text{л}} = \langle X = R^n, Y = \{y \in R | y_1 \leq y \leq y_2\}, f(x, y) \rangle,$$

в которой линейно-квадратичный критерий

$$f(x, y) = x'Ax + 2x'by + Cy^2 + 2a'x + 2cy, \quad (8)$$

где $(n \times n)$ -матрица A постоянна и симметрична, также постоянны n -векторы-столбцы a и b ; C и c — числа. Далее $A < 0$ означает, что квадратичная форма $x'Ax$ определено отрицательна, а штрих сверху отвечает операции транспонирования (например,

x' — вектор-строка); E_n — единичная $n \times n$ -матрица, 0_n — нулевой n -вектор, $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Предполагаем (только для сокращения громоздких записей), что $y_2 = -y_1 = y^0 > 0$.

Условие $X = R^n$ не позволяет воспользоваться утверждением 1 для решения вопроса существования СГР в задаче $\Gamma_{\text{л}}$; поэтому найдем ограничения на постоянные параметры (в критерии (8)), достаточные для существования, и при этом построим явный вид сильно гарантированного по исходам и рискам решения.

Будем следовать этапам 1—3 из замечания 4.

Этап 1 (построение функции $F_1[x] = \min_{y \in [-y^0, y^0]} f(x, y)$, определенной на R^n).

Лемма 3. Если $C > 0$, то глобальный минимум (при каждом $x \in X$)

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \min_{y \in R} f(x, y) = \\ &= x' \left[A - \frac{\|b\|^2}{C} E_n \right] x + 2x' \left(a - b \frac{c}{C} \right) - \frac{c^2}{C}. \end{aligned} \quad (9)$$

Доказательство. Функция (8) строго выпукла по y для каждого $x \in R^n$, ибо $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2C > 0$.

Построим теперь «информированную неопределенность» $y(x): R^n \rightarrow R$ такую, что

$$\min_{y \in R} f(x, y) = f(x, y(x)) \quad \forall x \in R^n.$$

Достаточные условия выполнения этого тождества имеют вид

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{y=y(x)} = 2x'b + 2Cy(x) + 2c = 0 \quad \forall x \in R^n,$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 2C > 0.$$

Отсюда следуют при $\forall x \in R^n$, что

$$y(x) = -\frac{1}{C}(x'b + c)$$

и

$$2x'by + Cy^2(x) + 2cy = -Cy^2(x).$$

Поэтому

$$\min_{y \in R} f(x, y(x)) = x'Ax + 2a'x - \frac{1}{C}(x'b + c)(b'x + c)$$

и, наконец, перемножая, получаем справедливость выражения (9).

Лемма 4. Если $C > 0$, то для $x \in R^n$, удовлетворяющих ограничению

$$-Cy^0 - c \leq b'x \leq Cy^0 - c, \quad (10)$$

минимум функции $f(x, y)$ из выражения (9) совпадает с минимумом функции $f(x, y)$ на отрезке $[-y^0, y^0]$.

Доказательство. Для каждого $x \in R^n$ функция $f(x, y)$ из выражения (8) строго выпукла по y (ибо $C > 0$). Поэтому при $\forall x \in R^n$ частные производные

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{y=-y^0} &= 2x'b - 2Cy^0 + 2c < 0, \\ \left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{y=y^0} &= 2x'b + 2Cy^0 + 2c > 0 \end{aligned} \quad (11)$$

(т. е. функция $f(x, y)$ для каждого $x \in X$ убывает при возрастании $y \leq -y^0$ и возрастает при возрастании $y \geq y^0$).

Наконец, оба строгих неравенства (11) справедливы для тех и только тех $x \in R^n$, при которых выполнена цепочка неравенств (10).

Утверждение 2. При $C > 0$ искомая функция

$$\begin{aligned} F_1[x] &= \min_{y \in [-y^0, y^0]} f(x, y) = \\ &= \begin{cases} f(x, -y^0) & \text{при } b'x \geq Cy^0 - c, \\ \Psi(x) & \text{при } b'x \in (-Cy^0 - c, Cy^0 - c), \\ f(x, y^0) & \text{при } b'x \leq -Cy^0 - c, \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

где скалярная функция (см. (9))

$$\Psi(x) = x' \left[A - E_n \frac{\|b\|^2}{C} \right] x + 2x' \left(a - b \frac{c}{C} \right) - \frac{c^2}{C}. \quad \blacklozenge$$

Доказательство следует из леммы 4.

Замечание 5. Согласно выражению (12) функция $F_1[x]$ непрерывна на R^n . $\blacklozenge$

Этап 2 (построение функции $F_2[x] = \min_{y \in [-y^0, y^0]} [-\Phi(x, y)]$). Прежде всего, укажем явный

вид функции риска $\Phi(x, y) = \max_{z \in R^n} f(z, y) - f(x, y)$.

Лемма 5. Если в критерии (8) постоянная $(n \times n)$ -матрица $A < 0$, то

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= -x'Ax - 2x'by - b'A^{-1}by^2 - \\ &\quad - 2a'x - 2a'A^{-1}by - a'A^{-1}a = \\ &= -(x'A + b'y + a')A^{-1}(Ax + by + a). \quad \blacklozenge \end{aligned} \quad (13)$$

Доказательство этого факта см. в работе [2, с. 97–98].

Лемма 6. Если в задаче (2) матрица $A < 0$ и n -вектор $b \neq 0_n$, то функция $\Phi(x, y)$ строго выпукла по y и

$$\begin{aligned} F_2[x] &= \min_{-y^0 \leq y \leq y^0} [-\Phi(x, y)] = \\ &= -\max\{\Phi(x, -y^0), \Phi(x, y^0)\}. \end{aligned}$$

Доказательство. Справедлива цепочка импликаций

$$(A < 0) \Rightarrow (A^{-1} < 0) \Rightarrow (b'A^{-1}b < 0),$$

так как $b \neq 0_n$, а из выражения (13) получаем

$$\frac{\partial^2 [-\Phi(x, y)]}{\partial y^2} = b'A^{-1}b < 0.$$

Поэтому при каждом $x \in R^n$ и функция риска $\Phi(x, y)$ строго выпукла по $y \in [-y^0, y^0]$. $\blacklozenge$

Максимум строго выпуклой по y функции $\Phi(x, y)$ достигается на ее граничных точках. Поэтому

$$\begin{aligned} \min_{-y^0 \leq y \leq y^0} [-\Phi(x, y)] &= -\max_{-y^0 \leq y \leq y^0} \Phi(x, y) = \\ &= -\max\{\Phi(x, -y^0), \Phi(x, y^0)\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi(x, y_l) &= -x'Ax - 2x'by_l - b'A^{-1}b(y_l)^2 - \\ &\quad - 2a'x - 2a'A^{-1}by_l - a'A^{-1}a, \quad l = 1, 2, \end{aligned}$$

где $y_1 = -y^0$ и $y_2 = y^0$.

Лемма 7. При $A < 0$, $b \neq 0_n$

$$\Phi(x, -y^0) - \Phi(x, y^0) = 4y^0(b'x + b'A^{-1}a). \quad \blacklozenge \quad (15)$$

Доказательство см. в работе [2, с. 99].

Утверждение 3. Если в критерии (8) матрица $A < 0$ и n -вектор $b \neq 0_n$, то

$$\begin{aligned} F_2[x] &= \min_{-y^0 \leq y \leq y^0} [-\Phi(x, y)] = \\ &= \begin{cases} -\Phi(x, -y^0) & \text{при } b'x > -\alpha, \\ -\Phi(x, y^0) & \text{при } b'x \leq -\alpha, \end{cases} = \\ &= \begin{cases} x'Ax + 2x'(-by^0 + a) + (-b'y^0 + a')A^{-1}(-by^0 + a) \\ \text{при } b'x > -\alpha, \\ x'Ax + 2x'(by^0 + a) + (b'y^0 + a')A^{-1}(by^0 + a) \\ \text{при } b'x \leq -\alpha, \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

здесь $\alpha = b'A^{-1}a$.

Доказательство. Если в формуле (15) будет $b'x > -\alpha$, то $\Phi(x, -y^0) > \Phi(x, y^0) \Leftrightarrow -\Phi(x, -y^0) < -\Phi(x, y^0)$, и тогда из выражения (14) следует справедливость первой строки в выражении (16); аналогично устанавливается вторая строка.



Этап 3 (построение максимальной по Парето стратегии $x^P = \arg \max_{x \in R^n} (F_1[x] + F_2[x])$). Далее всюду до окончания п. 3.5, не оговаривая особо, будем считать выполненными

Условие 1. В задаче (2) постоянная симметричная $(n \times n)$ -матрица $A < 0$, постоянный n -вектор $b \neq 0_n$, число $C > 0$. ♦

Здесь выделяем три случая в зависимости от принадлежности точки $-\alpha$ одному из трех интервалов $(-\infty, -Cy^0 - c]$, $(-Cy^0 - c, Cy^0 - c)$, $[Cy^0 - c, +\infty)$. В каждом из этих случаев значения $b'x$ могут принадлежать одному из шести интервалов, на которые могут разбить множество R точки $-\alpha$, $-Cy^0 - c$ и $Cy^0 - c$.

Случай 1: $(-\alpha \in (-\infty, -Cy^0 - c])$

Утверждение 4. Пусть для задачи (2) выполняются условия 1, тогда при $-\infty < b'x \leq -\alpha \leq (-Cy^0 - c)$ гарантированное по исходам и рискам решение (x^P, f^P, Φ^P) имеет вид

$$\begin{aligned} x^P &= -A^{-1}(by^0 + a), \\ f^P &= f(x^P, y^0) = [-b'A^{-1}b + C](y^0)^2 + \\ &\quad + 2(-a'A^{-1}b + c)y^0 - a'A^{-1}a, \\ \Phi^P &= \Phi(x^P, y^0) = 0. \end{aligned}$$

Доказательство. В случае $b'x \leq -\alpha \leq (-Cy^0 - c)$, согласно утверждениям 2 и 3, найдем максимизатор x^P :

$$\begin{aligned} \max_{x \in R^n} (F_1[x] + F_2[x]) &= \max_{x \in R^n} [f(x, y^0) - \Phi(x, y^0)] = \\ &= f(x^P, y^0) - \Phi(x^P, y^0). \end{aligned} \quad (17)$$

Исходя из вида функции $f(x, y^0)$ в формуле (8) и $\Phi(x, y^0)$ из выражения (16), стратегия x^P удовлетворяет равенству (17), если

$$\max_{x \in R^n} \varphi_1(x) = \varphi_1(x^P),$$

где $\varphi_1(x) = 2x'Ax + 4x'(by^0 + a)$. Достаточные условия при этом будут иметь вид

$$\begin{aligned} \text{grad}_x \varphi_1(x) \Big|_{x^P} &= \frac{\partial \varphi_1(x)}{\partial x} \Big|_{x^P} = 4Ax^P + 4(by^0 + a) = 0_n, \\ \frac{\partial^2 \varphi_1(x)}{\partial x^2} &= 4A < 0. \end{aligned}$$

Из первого равенства получаем

$$x^P = -A^{-1}(by^0 + a),$$

откуда

$$\begin{aligned} f^P &= f(x^P, y^0) = F_1[x^P] = [-b'A^{-1}b + C](y^0)^2 + \\ &\quad + 2(-a'A^{-1}b + c)y^0 - a'A^{-1}a, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^P &= \Phi(x^P, y^0) = \\ &= -((x^P)'A + b'y^0 + a')A^{-1}(Ax^P + by^0 + a) = 0. \end{aligned}$$

Утверждение 5. Если выполнены условия 1 и $-\alpha \leq b'x \leq (-Cy^0 - c)$, то гарантированное по исходам и рискам решение (x^P, f^P, Φ^P) принимает вид

$$\begin{aligned} x^P &= -A^{-1}a, \\ f^P &= C(y^0)^2 + 2(-a'A^{-1}b + c)y^0 - a'A^{-1}a, \quad (18) \\ \Phi^P &= -b'A^{-1}b(y^0)^2. \end{aligned}$$

Доказательство. По утверждениям 2 и 3 стратегия x^P является максимизатором $F_1[x] + F_2[x]$, т. е.

$$x^P = \arg \max_{x \in R^n} (f(x, y^0) - \Phi(x, y^0)).$$

Согласно выражениям (12) и (16) тогда

$$\max_{x \in R^n} \varphi_2(x) = \varphi_2(x^P),$$

где $\varphi_2(x) = 2x'Ax + 4x'a$. Из достаточных условий

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_2(x)}{\partial x} \Big|_{x^P} &= 4Ax^P + 4a = 0_n, \\ \frac{\partial^2 \varphi_2(x)}{\partial x^2} &= 4A < 0 \end{aligned}$$

находим стратегию $x^P = -A^{-1}a$, подставляя которую в выражение (8), найдем

$$f^P = f(x^P, y^0) = (x^P)'Ax^P + 2(x^P)'(by^0 + a) + y^0(Cy^0 + 2c).$$

Аналогично для

$$\begin{aligned} \Phi^P &= -((x^P)'A - b'y^0 + a')A^{-1}(Ax^P - by^0 + a) = \\ &= -b'A^{-1}b(y^0)^2 > 0. \end{aligned}$$

Аналогично рассматриваются и остальные возможные случаи (результаты сведены в таблицу; предполагается, что в выражении (8) матрица $A < 0$, вектор $b \neq 0_n$, число $C > 0$).

Замечание 6. Почему тройка (x^P, f^P, Φ^P) является строго гарантированным по исходам и рискам решением задачи (2)? Напомним, что в задаче (2) ЛПР «выступает» как «рисконейтрал» (см. Введение): он выбирает стратегию $x \in X$ так, чтобы:

— его исход $f(x, y)$ стал возможно *большим* и одновременно соответствующий риск по Сэвиджу $\Phi(x, y)$ как можно *меньшим*, ориентируясь при этом на реализацию любой чистой неопределен-

ности $y \in Y$. Выбирая стратегию $x \in X$, ЛПР гарантирует себе исход, не меньший

$$F_1[x] = f[x] = \min_{-y^0 \leq y \leq y^0} f(x, y) \leq f(x, y) \quad \forall y \in Y,$$

и одновременно риск, не больший

$$-F_2[x] = \Phi[x] = \max_{-y^0 \leq y \leq y^0} \Phi(x, y) \geq \Phi(x, y) \quad \forall y \in Y;$$

— считая эти гарантии $(f[x], \Phi[x])$ «равноправными», ЛПР предпочитает использовать стратегию x^P , максимальную по Парето в двухкритериальной задаче $\langle X, \{f[x], -\Phi[x]\} \rangle$ (максимальную в $\langle X, f[x] - \Phi[x] \rangle$).

Из этой паретовости следует, что, прежде всего, при переходе ЛПР к стратегии $x \neq x^P$ увеличение гарантированного исхода $f[x] > f[x^P]$ неизбежно влечет увеличение гарантированного риска $\Phi[x] > \Phi[x^P]$, далее, уменьшение гарантированного риска $\Phi[x] < \Phi[x^P]$ приводит к уменьшению га-

рантированного исхода $f[x] < f[x^P]$. Таким образом, переход от двухкритериальной задачи при неопределенности

$$\langle X, Y, \{f(x, y), -\Phi(x, y)\} \rangle$$

к двухкритериальной «задаче гарантий без неопределенностей»

$$\langle X, \{ \min_{y \in Y} f(x, y) = f[x], -\max_{y \in Y} \Phi(x, y) = -\Phi[x] \} \rangle$$

с последующим использованием векторного максимума (по Парето) позволяет «выйти» на явный вид гарантированного решения с позиции «риско-нейтрала».

Однако недостатком предпринятого здесь подхода выступает ориентация на «самые плохие» (маленькие) исходы $\min_{y \in Y} f(x, y) = f[x]$ и на «самые большие» риски $\max_{y \in Y} \Phi(x, y) = \Phi[x]$. Ослабить этот недочет позволяет другой способ выбора гарантированного по исходам и рискам решения, ориен-

Явный вид гарантированного по исходам и рискам решения (x^P, f^P, Φ^P)

Случай 1: $-\alpha \leq (-Cy^0 - c)$	Случай 1а: $-\infty \leq b'x \leq -\alpha$	$x^P = -A^{-1}(by^0 + a),$ $f^P = [C - b'A^{-1}b](y^0)^2 + 2(c - a'A^{-1}b)y^0 - a'A^{-1}a,$ $\Phi^P = 0$
	Случай 1б: $-\alpha < b'x \leq (-Cy^0 - c)$	$x^P = -A^{-1}a,$ $f^P = C(y^0)^2 + 2(c - a'A^{-1}b)y^0 - a'A^{-1}a,$ $\Phi^P = -b'A^{-1}b(y^0)^2 > 0$
Случай 2: $(-Cy^0 - c) \leq -\alpha \leq Cy^0 - c$	Случай 2а: $(-Cy^0 - c) < b'x \leq -\alpha$	$x^P = -\left[2A - \frac{\ b\ ^2}{C}E_n\right]^{-1} \left(2a + b\left(y^0 - \frac{c}{C}\right)\right),$ $f^P = (x^P)' \left[A - \frac{\ b\ ^2}{C}E_n\right] x^P + 2(x^P)' \left(a - b\frac{c}{C}\right) - \frac{c^2}{C},$ $\Phi^P = -((x^P)'A + b'y^0 + a')A^{-1}(Ax^P + by^0 + a)$
	Случай 2б: $-\alpha < b'x < Cy^0 - c$	$x^P = -\left[2A - \frac{\ b\ ^2}{C}E_n\right]^{-1} \left(2a - b\left(y^0 + \frac{c}{C}\right)\right),$ $f^P = (x^P)' \left[A - \frac{\ b\ ^2}{C}E_n\right] x^P + 2(x^P)' \left(a - b\frac{c}{C}\right) - \frac{c^2}{C},$ $\Phi^P = -((x^P)'A - b'y^0 + a')A^{-1}(Ax^P - by^0 + a) > 0$
Случай 3: $-\alpha \geq Cy^0 - c$	Случай 3а: $(Cy^0 - c) \leq b'x \leq -\alpha$	$x^P = -A^{-1}a,$ $f^P = C(y^0)^2 - 2(c - a'A^{-1}b)y^0 - a'A^{-1}a,$ $\Phi^P = -b'A^{-1}b(y^0)^2 > 0$
	Случай 3б: $-\alpha < b'x < \infty$	$x^P = A^{-1}(by^0 - a),$ $f^P = [C - b'A^{-1}b](y^0)^2 - 2(c - a'A^{-1}b)y^0 - a'A^{-1}a,$ $\Phi^P = 0$



тированный на векторный максимин [22], разработка которого начата в 1990 г. одним из авторов в книге [23], близкой задаче посвящено уже значительное число публикаций, из которых особо отметим [24, 25].

4. МАКСИМИН ПО СЛЕЙТЕРУ

4.1. Формализация векторного максимина

Рассматриваем двухкритериальную задачу при неопределенности

$$\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)) \rangle, \quad (19)$$

ориентация здесь, в конце концов, на $F_1(x, y) = f(x, y)$, $F_2(x, y) = -\Phi(x, y)$, где $f(x, y)$ — критерий из задачи (2), а $\Phi(x, y)$ — функция риска по Сэвиджу (1). Так же, как в задаче (3), (4), в двухкритериальной задаче (19) стратегии ИО есть $x \in X \subseteq R^n$, чистые неопределенности $y \in Y \subseteq R^m$, наряду с чистыми будем использовать «информированные неопределенности» — m -мерные вектор-функции $y(x): X \rightarrow Y$, в этом случае определенный на $X \times Y$ векторный критерий

$$F(x, y) = (F_1(x, y(x)), F_2(x, y(x))) = F(x, y(x)) = F[x] = (F_1[x], F_2[x]).$$

Пусть в критерии (19) «заморожена» стратегия $x \in X$, т. е. получаем $\Gamma(x) = \langle x, Y, F(x, y) \rangle$. Используем бинарные отношения строгого порядка ($>$) и ($\nless$) из § 2.

Неопределенность $y_S(x)$ называется *минимальной по Слейтеру* в задаче $\Gamma(x)$, если $F(x, y_S(x)) \nless F(x, y) \forall y \in Y$; множество таких $y_S(x)$ обозначим $Y_S(x)$. Далее используем обозначение $F(x, y_S(x)) = \min_{y \in Y} F(x, y)$.

Определение 2. Стратегия $x^S \in X$ называется *максиминной по Слейтеру* в задаче (19), если существует «информированная неопределенность» $\hat{y}_S(x) \in Y_S(x) \forall x \in X$, для которой

$$F(x^S, \hat{y}_S(x^S)) \nless F(x, y_S(x))$$

при всех $x \in X$ и $y_S(x) \in Y_S(x)$. ♦

При этом n -вектор x^S называют *максиминной по Слейтеру* стратегией в задаче (19), сам вектор $F(x^S, \hat{y}_S(x^S))$ — *максимином по Слейтеру*, а пару $(x^S, F(x^S, \hat{y}_S(x^S)))$ назовем *максиминным по Слейтеру решением задачи* Γ .

Если воспользоваться обозначениями из § 2 и

$$\min_{y \in Y} F(x, y) = F(x, y_S(x)) = F[x] \quad \forall x \in X, \quad (20)$$

$$\max_{x \in X, y_S(x) \in Y_S(x)} F(x, y_S(x)) = F(x^S, \hat{y}_S(x^S)), \quad (21)$$

то аналогом понятия максимина из п. 3.1 будет

$$F(x^S, \hat{y}_S(x^S)) = \max_{x \in X} \min_{y = y_S(x) \in Y_S(x)} F(x, y) = \min_{y \in Y} F(x^S, y).$$

Операция (20) соответствует нахождению внутреннего минимума (из п. 3.1), а операция (21) — операции внешнего максимума.

Замечание 7. Вектор $F[x] = F(x, y_S(x))$ является *векторной гарантией* для каждой стратегии $x \in X$. Действительно, из выражения (20) имеем

$$F[x] = \min_{y \in Y} F(x, y),$$

и поэтому $F[x] \nless F(x, y) \forall y \in Y$, т. е. при использовании любой стратегии $x \in X$ все компоненты $F_i(x, y)$ вектора $F(x, y)$ не могут стать одновременно меньшими $F_i[x]$, $i = 1, 2$, ни при каких $y \in Y$. Таким образом, $F[x]$ ограничивает убывание $F(x, y)$ одновременно по двум компонентам. Однако для одних и тех же стратегий $x \in X$

$$\min_{y \in Y} F_i(x, y) \leq F_i(x, y) \quad \forall y \in Y,$$

и тогда

$$\min_{y \in Y} F_i(x, y) \leq F_i(x, y_S(x)) \quad \forall x \in X, \quad i = 1, 2.$$

В этом смысле гарантии в строго гарантированном по исходам и рискам решении (см. определение 1) покомпонентно не больше, чем векторные гарантии $F[x]$ из определения 2. Как раз этим обстоятельством и вызван термин «*сильно*» (гарантированное решение). ♦

Затем, согласно выражению (21), из всех таких векторных гарантий выбрана в качестве максиминного по Слейтеру решения наибольшая в «векторном смысле» (максимальная по Слейтеру) по отношению ко всем компонентам $F[x]$, ибо $F[x] \nless F[x^S]$.

4.2. Геометрическая интерпретация

Пусть x^S — максиминная по Слейтеру стратегия в двухкритериальной задаче (19), а $\hat{y}_S(x^S)$ — соответствующее значение неопределенности. Согласно определению минимума по Слейтеру каждому

$x \in X$ ставится в соответствие множество минимальных по Слейтеру значений $F(x, Y_S(x))$ векторного критерия $F(x, y)$, т. е.

$$F(x, y) \not\prec F(x, y_S(x)). \quad (22)$$

Таким образом,

$$F(x, y_S(x)) = \cup_{y \in Y_S(x)} \text{MIN}^S f(x, y).$$

Тогда из условия (22) следует, что при каждом $x \in X$ и $y_S(x) \in Y_S(x)$ точки множества $F(x, Y) = \{F(x, y) | y \in Y\}$ не могут попасть внутрь прямого угла $G(x, y_S(x))$ с вершиной в точке $F(x, y_S(x))$ (для всех $y_S(x) \in Y_S(x)$). На рис. 2 указаны три таких прямых угла $G(x, y_S^{(k)}(x))$, $k = 1, 2, 3$, ограничивающих изменение $F(x, Y)$ в юго-западном направлении. В частности, таким свойством обладают максиминная стратегия x^S и соответствующая неопределенность $\hat{y}_S(x^S)$ (рис. 3).

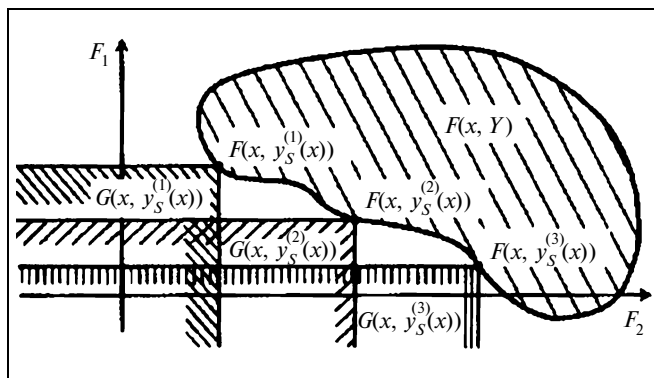


Рис. 2. Интерпретация множества $Y_S(x)$ при фиксированном x

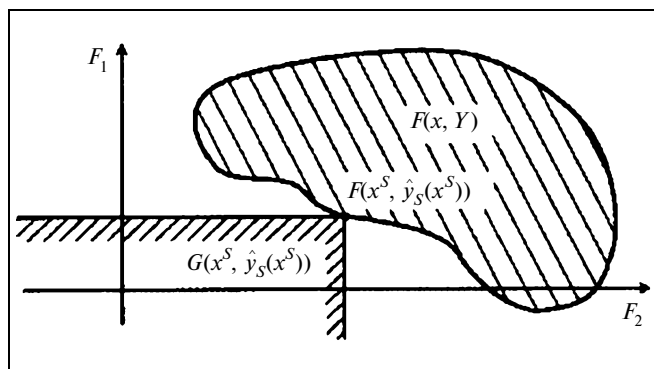


Рис. 3. Интерпретация эффекта векторной минимизации для максиминной стратегии x^S

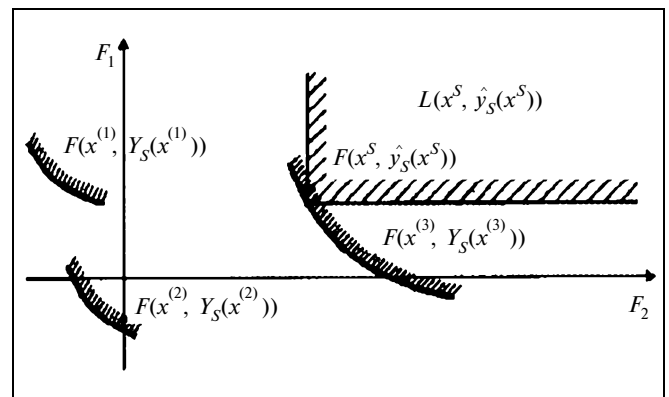


Рис. 4. Интерпретация эффекта векторной максимизации для x^S

С другой стороны, в условии (22) значение векторного критерия $F(x^S, \hat{y}_S(x^S))$ сравнивается с множествами $F(x, Y_S(x))$ при каждом фиксированном $x \in X$. Эти множества суть минимальные по Слейтеру значения векторного критерия $F(x, y)$ при данном x . Тогда условие (22) означает, что точки $F(x, Y_S(x))$ при всех $x \in X$ и $y_S(x) \in Y_S(x)$ не попадают внутрь прямого угла $L(x^S, \hat{y}_S(x^S))$ с вершиной в той же самой точке $F(x^S, \hat{y}_S(x^S))$, но направленного противоположно углам G . На рис. 4 указаны расположения трех множеств $F(x^{(k)}, Y_S(x^{(k)}))$, $k = 1, 2, 3$, относительно точки $F(x^S, \hat{y}_S(x^S))$.

Таким образом, максимин по Слейтеру $F(x^S, \hat{y}_S(x^S))$ ограничивает углом $L(x^S, \hat{y}_S(x^S))$ распространение (в северо-восточном направлении) минимальных по Слейтеру значений $F(x, Y_S(x)) \forall x \in X$.

4.3. Существование

Утверждение 6. Если в однокритериальной задаче при неопределенности $\Gamma^{(1)} = \langle X, Y, f(x, y) \rangle$ множества $X \in \text{comp} R^n$, $Y \in \text{comp} R^m$, а критерий $f(x, y)$ непрерывен на $X \times Y$, то для двухкритериальной задачи при неопределенности

$$\Gamma^{(1)} = \langle X, Y, F(x, y) = (F_1(x, y) = f(x, y), F_2(x, y) = -\Phi(x, y)) \rangle$$

существует максиминное по Слейтеру решение $(x^S, F(x^S, \hat{y}_S(x^S))) \in X \times R^2$.

Доказательство. Функция риска по Сэвиджу $\Phi(x, y)$ непрерывна на $X \times Y$ (замечание 1). Тогда из компактности X, Y и непрерывности компонент $F(x, y)$



на $X \times Y$, а также из работы [23, с. 17–21] сразу следует существование максиминного по Слейтеру решения $(x^S, F(x^S, \hat{y}_S(x^S)))$ задачи $\Gamma^{(1)}$.

4.4. Задача с «разделенными» критериями

Согласно определению 2, при «разделенном» (по стратегиям и неопределенностям) векторном критерии $F(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$, $F, \varphi, \psi \in R^2$ задачу построения максиминного по Слейтеру решения $(x^S, F(x^S, \hat{y}_S(x^S)))$ можно свести к следующим четырём этапам.

Этап 1. Для двухкритериальной задачи

$$\Gamma_\varphi = \langle X, \varphi(x) \rangle$$

найти *все* множество X^S максимальных по Слейтеру стратегий x^S , т. е.

$$\varphi(x^S) \not\leq \varphi(x) \quad \forall x \in X, \quad x^S \in X^S,$$

затем построить множество $\varphi(X^S) = \{\varphi(x) | x \in X^S\}$ максимумов по Слейтеру для задачи Γ_φ .

Этап 2. Для двухкритериальной задачи $\Gamma_\psi = \langle Y, \psi(y) \rangle$ найти *все* множество Y_S минимальных по Слейтеру неопределенностей y_S и $\psi(Y_S) = \{\psi(y) | y \in Y_S\}$, т. е.

$$\psi(y) \not\leq \psi(y_S) \quad \forall y \in Y, \quad y_S \in Y_S.$$

Этап 3. Сложить множества $\varphi(X^S) + \psi(Y_S)$, например, по правилу $\varphi(X^S) + \psi(Y_S) = \{\psi(y_S) + \varphi | \varphi \in \varphi(X^S)\}$.

Этап 4. Построить множество максимумов по Слейтеру $\mathcal{F}^S$ для $\varphi(X^S) + \psi(Y_S)$ и уже для точки $F^S \in \mathcal{F}^S$ найти пару $\varphi^S \in \varphi(X^S)$ и $\psi^S \in \psi(Y_S)$ таких, что $\varphi^S + \psi^S = F^S$. Затем определить по φ^S и ψ^S точки x^S и y_S соответственно: $\varphi^S = \varphi(x^S)$, $\psi^S = \psi(y_S)$. Тогда максиминным по Слейтеру решением будет $(x^S, \varphi(x^S) + \psi(y_S))$.

Пример. Пусть в задаче $\Gamma = \langle X, Y, F(x, y) \rangle$ двухкомпонентный критерий $F(x, y) = x + y$, множества $X = \{x = (x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 \leq c^2\}$ (рис. 5), $Y = \{y = (y_1, y_2) | -c \leq y_i \leq c, i = 1, 2\}$, где $c = \text{const} > 0$ (рис. 6).

Далее следуем по указанным четырём этапам.

Этап 1. Построим множество X^S максимальных по Слейтеру стратегий x^S двухкритериальной задачи $\Gamma_\varphi = \langle X, \varphi(x) = x \rangle$. На рис. 5 множество $X^S = \varphi(X^S)$

обведено жирной чертой (дуга AB), равенство имеет место благодаря специальному виду критерия

$$\varphi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) = x = (x_1, x_2).$$

Этап 2. Найдем множество Y_S минимальных по Слейтеру неопределенностей в двухкритериальной задаче $\Gamma_\psi = \langle Y, \psi(y) = y \rangle$, множество $Y_S = \psi(Y_S)$ выделено жирной чертой на рис. 6 (ломаная CDG). Опять-таки равенство вызвано видом критерия $\psi(y) = y$.

Этап 3. Построим множество $X^S + Y_S$, добавив к каждой точке $y_S \in Y_S$ выделенную четверть окружности AB . Множество $X^S + Y_S$ заштриховано на рис. 7.

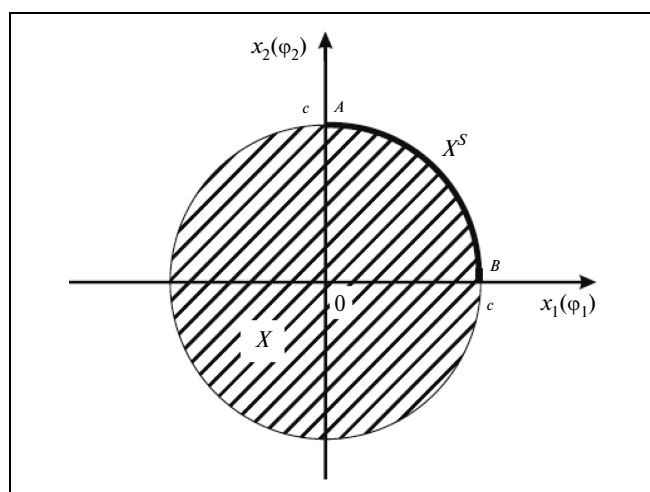


Рис. 5. Множество X^S

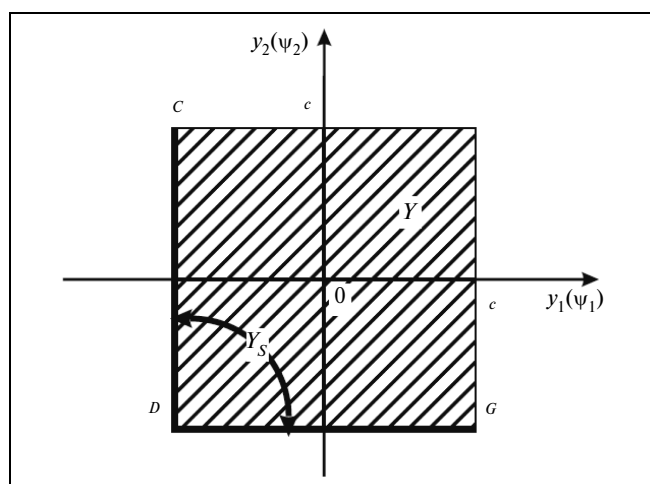


Рис. 6. Множество Y_S

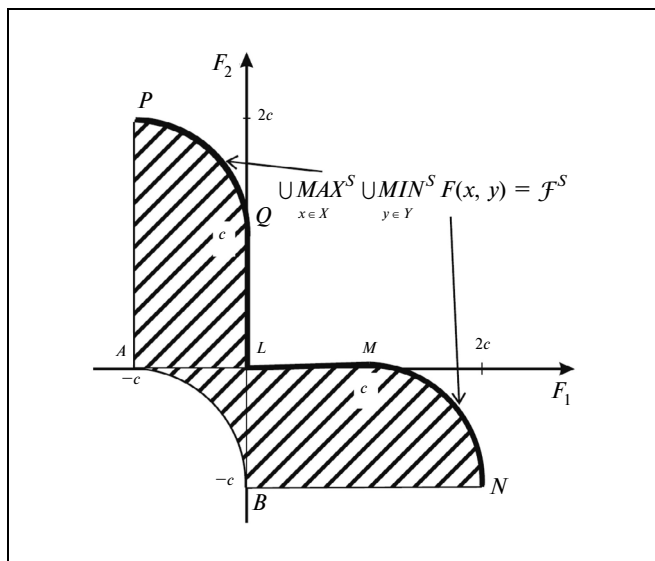


Рис. 7. Множество $X^S + Y_S$

Этап 4. Множество максимумов по Слейтеру для $X^S + Y_S$ образуют точки жирной линии $PQLMN$ (см. рис. 7). Например, точке M отвечает максиминное по Слейтеру решение $(x^S, F(x^S, y_S))$, где $x^S = (0, c)$, $y_S = (c, -c)$, $F(x^S, y_S) = x^S + y_S = (c, 0) = M$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложено два подхода к принятию решения в однокритериальной задаче при неопределенности, о неопределенностях известны лишь границы изменения. В обоих подходах ЛПР стремится не только увеличить исход, но и одновременно понизить риск. Первый подход базируется на подходящей модификации максимина и на принятии решения в иерархической двухуровневой игре, второй — на векторном максимине. Найден явный вид первого решения при линейно-квадратичном критерии.

Авторы благодарят рецензентов за замечания, большинство из которых учтено при подготовке рукописи к печати.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черемных Ю.Н. Микроэкономика. Продвинутый уровень. — М.: ИНФРА, 2008. — 843 с.
2. Жуковский В.И. Риски при конфликтных ситуациях. — М.: URSS, Ленанд, 2011. — 328 с.

3. Сиразетдинов Т. К., Сиразетдинов Р.Т. Проблема риска и его моделирование // Проблемы человеческого риска. — 2007. — № 1. — С. 31—43.
4. Шахов В.В. Введение в страхование. Экономический аспект. — М.: Финансы и статистика, 1994. — 188 с.
5. Цветкова Е.В., Арлюкова И.О. Риски в экономической деятельности. — СПб.: ИВЭСЭП, 2002. — 64 с.
6. Savage L.Y. The theory of statistical decision // J. American Statistic Association. — 1951. — N 46. — P. 55—67.
7. Wald A. Contribution to the theory of statistical estimation and testing hypothesis // Annals Math. Statist. — 1939. — Vol. 10. — P. 299—326.
8. Фишер С., Дорнбуш Р., Шмалензи Р. Экономика. — М.: Дело, 1998. — 829 с.
9. Жуковский В.И. Введение в дифференциальные игры при неопределенности. — М.: МНИИПУ, 1997. — 459 с.
10. Zhukovskiy V.I. Lyapunov Functions in Differential Games. — London; N.-Y.: Taylor & Francis, 2003. — 282 с.
11. Жуковский В.И., Чикрий А.А. Линейно-квадратичные дифференциальные игры. — Киев: Наукова думка. — 1994. — 320 с.
12. Жуковский В.И., Жуковская Л.В. Риск в многокритериальных и конфликтных системах при неопределенности. — М.: Эдиториал УРСС. — 2004. — 272 с.
13. Гермейер Ю.Б. Игры с противоположными интересами. — М.: Наука, 1978. — 328 с.
14. Ватель И.А., Ерешко Ф.И. Игра с иерархической структурой // Математическая энциклопедия. — М., 1979. — Т. 2.
15. Кукушкин Н.С., Морозов В.В. Теория неантагонистических игр. — М.: МГУ, 1984. — 104 с.
16. Ватель И.А., Ерешко Ф.И. Математика конфликта и сотрудничества. — М.: Знание, 1974. — С. 478—481.
17. Морозов В.В. Основы теории игр. — М.: Изд. отдел фак-та ВМиК МГУ, 2002. — 150 с.
18. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — 456 с.
19. Дмитрук А.В. Выпуклый анализ. Элементарный вводный курс. — М.: ВМиК МГУ, 2012. — 172 с.
20. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. — М.: Высшая школа, 1968. — 286 с.
21. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. — М.: Наука, 1982. — 254 с.
22. Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. The Vector-Valued Maximin. — N.-Y.: Academic Press, 1994. — 282 p.
23. Жуковский В.И., Молоствов В.С. Многокритериальная оптимизация систем в условиях неполной информации. — М.: МНИИПУ, 1990. — 112 с.
24. Поспелова И.И. Классификация задач векторной оптимизации с неопределенными факторами // Журнал выч. математики и мат. физики. — 2000. — Т. 40, № 6. — С. 860—876.
25. Новикова Н.М., Малащенко Ю.Е. Модели неопределенности в многопользовательских сетях. — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 160 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. РАН Д.А. Новиковым.

Жуковский Владислав Иосифович — д-р физ.-мат. наук, профессор, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, zhkvlad@yandex.ru,

Солдатова Наталья Геннадьевна — ст. преподаватель, Московский государственный областной гуманитарный институт, г. Орехово-Зуево, solnata@pochta.ru.