УДК 517.977

О КОАЛИЦИОННОЙ РАЦИОНАЛЬНОСТИ В ИГРЕ ТРЕХ ЛИЦ

В. И. Жуковский*, Л. В. Жуковская**, Л. В. Смирнова***, М. И. Высокос****

*Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,
**ФГБУН Центральный экономико-математический институт Российской академии наук, г. Москва,
,*ГОУ ВО МО Государственный гуманитарно-технологический университет, г. Орехово-Зуево

*✉ zhkvlad@yandex.ru, **✉ zhukovskaylv@mail.ru, ***✉ smirnovalidiya@rambler.ru, ****✉ mvysokos@mail.ru

Аннотация. В математической теории игр для определения решения любой игры требуется установить, какое поведение игроков следует считать оптимальным. В бескоалиционных играх понятие оптимальности связано, например, с концепциями равновесия по Нэшу и равновесия по Бержу. Для оптимальности в теории кооперативных игр характерны условия индивидуальной и коллективной рациональности. В работе рассматривается кооперативная игра трех лиц в нормальной форме. Для этой игры вводится понятие коалиционной рациональности, которое сочетает в себе, кроме условий индивидуальной и коллективной рациональности, определенное объединение концепций равновесия по Нэшу и равновесия по Бержу. Для предложенного коалиционного равновесия игры устанавливаются достаточные условия существования. Кроме того, доказано существование такого решения в смешанных стратегиях при непрерывных функциях выигрыша и компактности множества стратегий.

Ключевые слова: максимин, максимум по Парето, максимум по Слейтеру, коалиционная рациональность, гермейеровская свертка, смешанные стратегии.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается игра трех лиц, математическая модель которой задается упорядоченной тройкой:

$$\Gamma = \left\langle \{1,\ 2,\ 3\},\ \{X_i\}_{i=1,2,3},\ \{f_i(x)\}_{i=1,2,3} \right\rangle.$$

В игре Γ $\{1, 2, 3\}$ – множество порядковых номеров игроков, каждый из которых выбирает свою *стратегию* $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{n_i}$ $(i = 1, 2, 3)$, в результате чего образуются *ситуации* $x = (x_1, x_2, x_3) \in X = \prod_{i=1}^{3} X_i \subset \mathbb{R}^n$, $n = \sum_{i=1}^{3} n_i$. На множестве ситуаций X определены *функции выигрыша* $f_i(x)$ каждого из игроков $(i = 1, 2, 3)$, значение которых называется *выигрышем* игрока i. Количество игроков в данной игре ограничено тремя лицами, поскольку для того, чтобы проиллюстрировать основную идею вводимого в дальнейшем понятия решения этой игры, такого числа игроков достаточно. Кроме того, рассмотрение игры четырех и более лиц приводит к большому многообразию коалиционных структур и, как следствие, к более громоздким выкладкам.

Изучение конфликтов, математическая модель которых представлена, в частности, игрой трех лиц вида Γ обычно проводится с нормативной точки зрения, устанавливающей, какое поведение игроков следует считать оптимальным (разумным, целесообразным). Основными содержательными чертами оптимальности в математической теории игр считаются [1, *с. 13*] интуитивные представления *о выгодности, устойчивости и справедливости*. На свойстве устойчивости основана «царствующая» в бескоалиционных играх концепция равновесности по Нэшу (РН) [2, 3], а также появившиеся под ее непосредственным влиянием [4] равновесность по Бержу (РБ), активное равновесие, равновесие угроз и контругроз. Эти и некоторые другие понятия оптимальности [5] бытуют в теории бескоалиционных игр. В них каждый игрок обычно преследует свои индивидуальные цели; кроме того, он не имеет возможности объединиться с другими игроками в коалицию для совместного выбора своих стратегий. Антиподом этому случаю являются кооперативные игры [6], где допускаются любые объединения игроков с целью «борьбы» за общие для этой коалиции интересы, а также возможность неограниченных переговоров между игроками, результатом которых будет выбор и использование совместной ситуации; при этом, конечно, предполагается, что договоры будут соблюдаться. Для оптимальности в теории кооперативных игр характерны условия *индивидуальной* [6, *с. 117*] и *коллективной* [6, *с. 125*] *рациональности*. Индивидуальная рациональность означает, что выигрыш каждого игрока не меньше его гарантированного выигрыша, который игрок может себе «обеспечить», действуя самостоятельно (применяя свою максиминную стратегию). Коллективная рациональность обеспечивается одним из векторных максимумов (по Слейтеру, Парето, Джоффриону, Борвейну и т. д.), возникающих при объединении всех игроков в одну общую коалицию.

Важным в настоящей статье является понятие *коалиционной структуры* игры (разбиение игроков на попарно непересекающиеся подмножества). Для игры Γ трех лиц таких коалиционных структур может быть пять: $\mathfrak{P}_1=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, $\mathfrak{P}_2=\{\{1,2\},\{3\}\}$, $\mathfrak{P}_3=\{\{1,3\},\{2\}\}$, $\mathfrak{P}_4=\{\{1\},\{2,3\}\}$, $\mathfrak{P}_5=\{\{1,2,3\}\}$. Здесь структура $\mathfrak{P}_1$ отвечает бескоалиционному «характеру» игры, а $\mathfrak{P}_5$ – кооперативному. Упомянутые условия индивидуальной рациональности сформулируем для коалиционной структуры $\mathfrak{P}_1$. При этом используем следующее обозначение: $\forall i\in\{1,2,3\}$ считаем $-i=\{\{1,2,3\}\setminus\{i\}\}$.

Тогда условие индивидуальной рациональности для ситуации $x^*=(x_1^*,x_2^*,x_3^*)\in X$ означает

$$f_i^0=\max_{x_i\in X_i}\min_{x_{-i}\in X_{-i}} f_i(x_i,x_{-i})= \\ =\min_{x_{-i}\in X_{-i}} f_i(x_i^0,x_{-i})\le f_i(x^*),\ i=1,2,3, \quad (1)$$

т. е. при применении максиминной стратегии x_i^0 имеют место неравенства

$$f_i^0\le f_i(x^*),\ i=1,2,3. \quad (2)$$

Для коалиционной структуры $\mathfrak{P}_5$ в игре Γ условие коллективной рациональности будет обеспечено максимумом по Парето. Именно, на множестве ситуаций $X^*\subset X$ ситуация $x^*\in X^*\subset X$ *максимальна по Парето* в трехкритериальной задаче $\Gamma_{X^*}=\langle X^*,\{f_i(x)\}_{i=1,2,3}\rangle$, если $\forall x\in X^*$ несовместна система неравенств $f_i(x)\ge f_i(x^*)$, $i=1,2,3$, причем хотя бы одно неравенство строгое. Согласно лемме Карлина [7, *с.71*], если

$$\sum_{i=1}^{3} f_i(x)\le\sum_{i=1}^{3} f_i(x^*)\ \ \forall x\in X^*, \quad (3)$$

то ситуация x^* максимальна по Парето в задаче Γ_{X^*}.

1. УСЛОВИЕ КОАЛИЦИОННОЙ РАЦИОНАЛЬНОСТИ

Это условие формализуем для коалиционных структур $\mathfrak{P}_2,\mathfrak{P}_3$ и $\mathfrak{P}_4$, основываться будем на подходящем объединении концепции РН и РБ.

Для коалиционной структуры $\mathfrak{P}_2$ условие коалиционного равновесия означает выполнение четырех неравенств

$$f_1(x_1^*,x_2^*,x_3)\le f_1(x^*)\ \forall x_3\in X_3, \quad (4)$$

$$f_2(x_1^*,x_2^*,x_3)\le f_2(x^*)\ \forall x_3\in X_3, \quad (5)$$

$$f_1(x_1,x_2,x_3^*)\le f_1(x^*)\ \forall x_j\in X_j,\ j=1,2, \quad (6)$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3^*)\le f_2(x^*)\ \forall x_j\in X_j,\ j=1,2, \quad (7)$$

для структуры $\mathfrak{P}_3$ это условие означает

$$f_1(x_1^*,x_2,x_3^*)\le f_1(x^*)\ \forall x_2\in X_2, \quad (8)$$

$$f_3(x_1^*,x_2,x_3^*)\le f_3(x^*)\ \forall x_2\in X_2, \quad (9)$$

$$f_1(x_1,x_2^*,x_3)\le f_1(x^*)\ \forall x_k\in X_k,\ k=1,3, \quad (10)$$

$$f_3(x_1,x_2^*,x_3)\le f_3(x^*)\ \forall x_k\in X_k,\ k=1,3, \quad (11)$$

и, наконец, для структуры $\mathfrak{P}_4$ оно означает

$$f_2(x_1,x_2^*,x_3^*)\le f_2(x^*)\ \forall x_1\in X_1, \quad (12)$$

$$f_3(x_1,x_2^*,x_3^*)\le f_3(x^*)\ \forall x_1\in X_1, \quad (13)$$

$$f_2(x_1^*,x_2,x_3)\le f_2(x^*)\ \forall x_l\in X_l,\ l=2,3, \quad (14)$$

$$f_3(x_1^*,x_2,x_3)\le f_3(x^*)\ \forall x_l\in X_l,\ l=2,3. \quad (15)$$

Ситуацию $x^*\in X$, для которой выполняются все эти 12 ограничений, назовем *коалиционно рациональной* для игры Γ. Множество таких ситуаций обозначим через X^*; очевидно, $X^*\subset X$.

При определении оптимального решения игры Γ будем использовать не все 16 неравенств – три неравенства (2), одно (3) и двенадцать неравенств (4)–(15) – а лишь семь из них, ибо они являются импликацией остальных (см. следующие две леммы).

Лемма 1. *Если выполнены неравенства* (6), (14) *и* (15)*, то из них следуют соответственно*

$$f_i(x^*) \geq f_i^0 = \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i(x_i, x_{-i}) =$$
$$= \min_{x_{-i} \in X_{-i}} f_i(x_i^0, x_{-i}), \; i = 1, 2, 3.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, согласно неравенству (6) имеем $f_1(x_1, x_2, x_3^*) \leq f_1(x^*) \;\; \forall x_j \in X_j$, $j = 1, 2.$ При стратегии первого игрока $x_1 = x_1^0$ из предыдущего неравенства получаем

$$f_1(x^*) \geq f_1(x_1^0, x_2, x_3^*) \geq \min_{x_2, x_3} f_1(x_1^0, x_2, x_3) =$$
$$= \max_{x_1} \min_{x_2, x_3} f_1(x_1, x_2, x_3) = f_1^0.$$

Аналогичные утверждения доказываются для $i = 2, 3$ из неравенств (14) и (15). ♦

Лемма 2. *Верны очевидные импликации* (10)→(4), (14)→(5), (6)→(8), (15)→(9), (7)→(12), (11)→(13).

Замечание 1. Из лемм 1 и 2 сразу следует, что в определении оптимального решения игры Γ, базирующегося на условиях индивидуальной, коллективной и коалиционной рациональностей, достаточно вместо 16-ти требований (2)–(15) использовать лишь семь из них, а именно (3), (6), (7), (10), (11), (14) и (15). ♦

Таким образом, приходим к следующему понятию оптимального решения игры Γ. Далее $f = (f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{R}^3$.

Определение. Пару $(x^*, f(x^*)) \in X \times \mathbb{R}^3$ назовем коалиционно равновесной для игры Γ, если:

– имеют место следующие шесть равенств:

$$\begin{aligned} &\max_{x_1, x_2} f_j(x_1, x_2, x_3^*) = f_j(x^*), \; j = 1, 2, \\ &\max_{x_1, x_3} f_k(x_1, x_2^*, x_3) = f_k(x^*), \; k = 1, 3, \\ &\max_{x_2, x_3} f_l(x_1^*, x_2, x_3) = f_l(x^*), \; l = 2, 3, \end{aligned} \qquad (16)$$

– ситуация $x^* \in X$ максимальна по Парето на множестве всех коалиционно равновесных ситуаций X^* игры Γ.

Замечание 2. В качестве оптимального решения игры Γ взята пара: ситуация x^* и соответствующий вектор выигрышей $f(x^*) = (f_1(x^*), f_2(x^*), f_3(x^*))$, ибо наличие пары $(x^*, f(x^*))$ сразу отвечает на два вопроса, возникающих в математической теории игр:

– Что делать игрокам в Γ?

– Что они в результате «получат»?

Ответ: следовать своим стратегиям x_i^* из ситуации $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$.

Замечание 3. Перечислим достоинства предлагаемого коалиционно равновесного решения игры Γ.

- Согласно лемме 1 применение x^* обеспечит выполнение условий индивидуальной рациональности.
- Ситуация x^* «выводит» всех игроков на «самые большие» выигрыши (максимальные по Парето относительно остальных коалиционно равновесных ситуаций игры Γ). Этот факт представляется авторам аналогом условия коллективной рациональности из математической теории кооперативных игр.
- Выполнение требований (4)–(15) означает, например, для первого игрока двухцелевое распределение его ресурсов, именно не забывая о своих интересах:

– игрок 1 стремится оказать максимальную помощь игроку 2 в союзе (коалиции) $\{1, 2\}$ как участник коалиционной структуры $\mathfrak{P}_2$ (требования (6) и (7));

– игрок 1 помогает игроку 3 как участник союза $\{1, 3\}$ коалиционной структуры $\mathfrak{P}_3$ (требования (10) и (11)).

Формализация этих двух требований в первой и второй строках из формулы (16) представляется авторам модификацией идеи концепции РН на случай двухкритериальной функции выигрыша игроков; третью строку из формулы (16) уже можно понимать как реализацию идеи РБ для того же двухкритериального варианта. Аналогично для второго и третьего игроков.

Наконец, в основу свойства коалиционного равновесия положен также *принцип устойчивости*, ибо благодаря условию (16) отклонение от x^* любых коалиций (из одного или двух игроков) не может привести в игре Γ к «улучшению» выигрыша участников отклонившейся коалиции (по сравнению с $f_i(x^*)$, $i = 1, 2, 3$).

Замечание 4. После того, как определено оптимальное решение, математическая теория игр рекомендует ответить на два вопроса:

– Существует ли такое решение?

– Как его найти? ♦

Ответы на эти вопросы будут даны в следующем разделе.

2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Перейдем к результату, который, по мнению авторов, является важнейшим в настоящей статье. Будем использовать два n-вектора $x = (x_1, x_2, x_3) \in X \subset \mathbb{R}^n$, $n = \sum_{i=1}^{3} n_i$, и $z = (z_1, z_2, z_3) \in X$, а также следующие семь скалярных функций

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x, z) &= f_1(x_1, x_2, z_3) - f_1(z),\\
\varphi_2(x, z) &= f_2(x_1, x_2, z_3) - f_2(z),\\
\varphi_3(x, z) &= f_1(x_1, z_2, x_3) - f_1(z),\\
\varphi_4(x, z) &= f_3(x_1, z_2, x_3) - f_3(z),\\
\varphi_5(x, z) &= f_2(z_1, x_2, x_3) - f_2(z),\\
\varphi_6(x, z) &= f_3(z_1, x_2, x_3) - f_3(z),\\
\varphi_7(x, z) &= \sum_{i=1}^{3} f_i(x) - \sum_{i=1}^{3} f_i(z).
\end{aligned} \tag{17}$$

По функциям выигрыша игроков в игре Γ построим гермейеровскую свертку этих семи функций:

$$\varphi(x, z) = \max_{k=1,\ldots,7} \varphi_k(x, z), \tag{18}$$

заданную на множестве $X \times (Z = X) \subset \mathbb{R}^{2n}$, где $X = \prod_{i=1}^{3} X_i$ – множество ситуаций в игре Γ.

Седловая точка $(\bar{x}, z^*) \in X \times Z$ скалярной функции $\varphi(x, z)$ (из формул (17), (18)) в антагонистической игре

$$\Gamma^\alpha = \langle X, Z = X, \varphi(x, z) \rangle \tag{19}$$

определяется цепочкой неравенств

$$\varphi(x, z^*) \le \varphi(\bar{x}, z^*) \le \varphi(\bar{x}, z) \;\forall x, z \in X, \tag{20}$$

причем $z^* \in X^*$ является минимаксной стратегией, т. е. $\min_{z\in X} \max_{x\in X} \varphi(x, z) = \max_{x\in X} \varphi(x, z^*)$.

Утверждение. *Если в игре Γ^α существует седловая точка $(\bar{x}, z^*)$, то минимаксная стратегия $z^* \in X$ из игры Γ^α является ситуацией КР исходной игры Γ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положив в неравенствах (20) ситуацию $z = \bar{x}$, получим из формулы (17), что $\varphi(\bar{x}, \bar{x}) = 0,\ k = 1,\ldots, 7$, ибо все $\varphi_k(\bar{x}, \bar{x}) = 0,\ k = 1,\ldots, 7$. Тогда согласно неравенствам (20) (по свойству транзитивности)

$$\begin{gathered}
\varphi(x, z^*) = \max\{f_1(x_1, x_2, z_3^*) - f_1(z^*),\\
f_2(x_1, x_2, z_3^*) - f_2(z^*),\ f_1(x_1, z_2^*, x_3) - f_1(z^*),\\
f_3(x_1, z_2^*, x_3) - f_3(z^*),\ f_2(z_1^*, x_2, x_3) - f_2(z^*),\\
f_3(z_1^*, x_2, x_3) - f_3(z^*),\ \sum_{i=1}^{3} f_i(x) - \sum_{i=1}^{3} f_i(z^*)\} \le 0\\
\forall x_i \in X_i,\ i = 1, 2, 3.
\end{gathered}$$

Отсюда следует справедливость семи неравенств:

$$\begin{aligned}
&f_j\left(x_1, x_2, z_3^*\right) \le f_j(z^*) \quad \forall x_j,\ j = 1, 2,\\
&f_k\left(x_1, z_2^*, x_3\right) \le f_k(z^*) \quad \forall x_k,\ k = 1, 3,\\
&f_l\left(z_1^*, x_2, x_3\right) \le f_l(z^*) \quad \forall x_l,\ l = 2, 3,\\
&\sum_{r=1}^{3} f_r(x) \le \sum_{r=1}^{3} f_r(z^*) \quad \forall x \in X^* \subset X.
\end{aligned} \tag{21}$$

Первые три неравенства (21) означают, что ситуация $z^* \in X$ является (в силу равенств (16)) коалиционно рациональной в игре Γ. Последнее из неравенств (21) и включение $X^* \subset X$ «обеспечит» [7, *с. 71*] максимальность по Парето ситуации x^* в трехкритериальной задаче $\Gamma_{X^*} = \left\langle X^*, \{f_i(x)\}_{i=1,2,3} \right\rangle$. ♦

Замечание 5. Из приведенного выше утверждения получаем следующий конструктивный способ построения коалиционного равновесного решения игры Γ:

– построить по формулам (17) и (18) функцию $\varphi(x, z)$;

– найти седловую точку $(\bar{x}, z)$ функции $\varphi(x, z)$ (удовлетворяет цепочке неравенств (20)) [8];

– найти значения трех функций $f_i(z^*)$, $i = 1, 2, 3$.

Тогда пара $(z^*, f(z^*) = (f_1(z^*), f_2(z^*), f_3(z^*))) \in X \times \mathbb{R}^3$ как раз и образует коалиционное равновесие игры Γ.

Замечание 6. Если N+1 скалярных функций $\varphi_j(x, z)$, $j = 1,\ldots,7$, непрерывны на множестве $X \times Z$, а множества $X, Z \in \operatorname{comp} \mathbb{R}^n$, то и функция $\varphi(x, z) = \min_{j=1,\ldots,N+1} \varphi_j(z, z)$ также непрерывна на множестве $X \times Z$.

Доказательство даже более общего результата имеется во многих учебных пособиях по исследованию операций (см., например, книгу [9, *с. 54*]), оно появилось даже в учебниках по выпуклому анализу [10, *с. 146*]. ♦

Наконец, крайне важной в данной статье является следующая теорема.

Теорема (существование в смешанных стратегиях). *Если в игре* Γ *множества* $X_i \in \mathrm{comp}\,\mathbb{R}^{n_i}$ *и* $f_i(\cdot) \in C(X)$, $i = 1, 2, 3$, *то в этой игре существует коалиционно равновесная ситуация в смешанных стратегиях.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В первую очередь отметим *новые в теории кооперативных игр* результаты, полученные в настоящей статье.

• Формализовано понятие коалиционного равновесия (КР), учитывающее интересы любой коалиции в игре Γ.

• Установлен конструктивный способ нахождения КР, сводящийся к отысканию минимаксной стратегии для специальной гермейеровской свертки, эффективно строящейся по функциям выигрыша игроков.

• Доказано существование КР в смешанных стратегиях при «привычных» для математического программирования условиях (непрерывность функции выигрыша и компактность множества стратегий игроков).

По мнению авторов, важны и *новые качественные результаты*, следующие из настоящей статьи:

– результаты распространяются на кооперативные игры с любым конечным числом участников (больше трех), в них РН (РБ) соответственно равновесие по Нэшу (по Бержу);

– КР «обеспечивает» устойчивость коалиционной структуры к отклонению от КР любых коалиций;

– КР применимо, если даже в течение игры меняются коалиционные структуры или даже если все коалиции остаются в наличии;

– КР можно использовать при создании устойчивых союзов (альянсов) игроков.

Причем это далеко не все достоинства КР.

Но есть еще одно позитивное свойство, которое считаем нужным отметить. До сих пор в теории кооперативных игр акцентировались условия индивидуальной и коллективной рациональности. Но индивидуальным интересам игроков отвечает концепция РН с ее «эгоистическим» характером; коллективной рациональности больше соответствует концепция РБ с ее «альтруизмом». Однако такая «забывчивость» несвойственна человеческой сущности игроков. Эти недостатки обеих концепций нивелирует коалиционная рациональность. В самом деле, в условиях коалиционной рациональности первый игрок, не забывая о себе и являясь участником коалиции $\{1, 2\}$ коалиционной структуры $\mathfrak{P}_2$, помогает второму, а являясь участником коалиции $\{1, 3\}$ структуры $\mathfrak{P}_3$, поддерживает третьего, но напоминаем, «не забывая о себе». Аналогично действуют и остальные игроки. Таким образом, КР заполняет пробел между РН и РБ, прибавляя к РН «заботу о других», а к РБ «заботу о себе».

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воробьев Н.Н.* Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 272 с. [*Vorob'ev, N.N.* Teoriya igr dlya ehkonomistov-kibernetikov. – M.: Nauka, Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi li-teratury, 1985. – 272 s. (In Russian)]
2. *Nash, J.* Non-cooperative Games // The Annals of Mathematics – 1951. – Vol. 54, iss. 2. – P. 286–295.
3. *Nash, J.* Equilibrium Points in N-person Games // Proc. Nat. Acad. Sci. – 1950. – Vol. 36. – P. 48–49.
4. *Жуковский В.И., Чикрий А.А.* Линейно-квадратичные дифференциальные игры. – Киев: Наукова Думка, 1994. – 320 с. [*Zhukovskii, V.I., Chikrii, A.A.* Lineino-kvadratichnye differentsial'nye igry. – Kiev: Naukova Dumka, 1994. – 320 s. (In Russian)]
5. *Viale, R.* Routledge Handbook of Bounded Rationality. – London–New York: Routledge Taylor & Francis Group, 2021. – 680 p.
6. *Жуковский В.И.* Кооперативные игры при неопределенности и их приложения. – М.: Едиториал УРСС, 2009. – 336 с. [*Zhukovskii, V.I.* Kooperativnye igry pri neopredelennosti i ikh prilozheniya. – M.: Editorial URSS, 2009. – 336 s. (In Russian)]
7. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Физматлит, 2007. – 256 с. [*Podinovskii, V.V., Nogin, V.D.* Pareto-optimal'nye resheniya mnogokriterial'nykh zadach. – M.: Fizmatlit, 2007. – 256 s. (In Russian)]
8. *Воробьев Н.Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. – М.: Наука, 1984. – 496 с. [*Vorob'ev, N.N.* Osnovy teorii igr. Beskoalitsionnye igry. – M.: Nauka, 1984. – 496 s. (In Russian)]
9. *Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В.* Исследование операций в задачах и упражнениях. – М.: Высшая школа, 1968. – 286 с. [*Morozov, V.V., Sukharev, A.G., Fedorov, V.V.* Issledovanie operatsii v zadachakh i uprazhneniyakh. - M.: Vysshaya shkola, 1968. – 286 s. (In Russian)]
10. *Дмитрук А.В.* Выпуклый анализ. Элементарный вводный курс. – М.: МАКС-ПРЕСС, 2012. – 172 с. [*Dmitruk, A.V.* Vypuklyi analiz. Ehlementarnyi vvodnyi kurs. – M.: MAKS-PRESS, 2012. – 172 s. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии академиком РАН Д.А. Новиковым.

Поступила в редакцию 28.10.2024,
после доработки 09.02.2025.
Принята к публикации 27.02.2025.

Жуковский Владислав Иосифович – д-р физ.-мат. наук, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва,
✉ zhkvlad@yandex.ru
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-2345-9474

Жуковская Лидия Владиславовна – д-р. экон. наук, ФГБУН Центральный экономико-математический институт Российской академии наук, г. Москва,
✉ zhukovskaylv@mail.ru
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-4152-3161

Смирнова Лидия Викторовна – канд. физ.-мат. наук, ГОУ ВО МО Государственный гуманитарно-технологический университет, г. Орехово-Зуево,
✉ smirnovalidiya@rambler.ru
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-8366-4675

Высокос Мария Ивановна – канд. физ.-мат. наук, ГОУ ВО МО Государственный гуманитарно-технологический университет, г. Орехово-Зуево,
✉ mvysokos@mail.ru
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-9892-5735

ON COALITIONAL RATIONALITY IN A THREE-PERSON GAME

V. I. Zhukovskiy*, L. V. Zhukovskaya**, L. V. Smirnova***, and M. I. Vysokos****

* Moscow State University, Moscow, Russia
**Central Economics and Mathematics Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
,*State University of Humanities and Technology, Orekhovo-Zuyevo, Russia

*✉ zhkvlad@yandex.ru, **✉ zhukovskaylv@mail.ru, ***✉ smirnovalidiya@rambler.ru, ****✉ mvysokos@mail.ru

Abstract. To determine the solution of any game in mathematical game theory, it is necessary to establish what behavior of the players should be considered optimal. In noncooperative games (games without coalitions), the concept of optimality is related, e.g., to the concepts of Nash and Berge equilibria. Optimality in the theory of cooperative games is characterized by the conditions of individual and collective rationality. This paper considers a three-person cooperative game in normal form. For this game, the concept of coalitional rationality is introduced by embracing the conditions of individual and collective rationality with some combination of the concepts of Nash and Berge equilibria. Sufficient conditions are established under which the game has a coalitional equilibrium of this type. In addition, the existence of such a solution in mixed strategies is proved in the case of continuous payoff functions and compact strategy sets of players.

Keywords: maximin, Pareto maximum, Slater maximum, coalitional rationality, Germeier convolution, mixed strategies.