УДК 62-501.52

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ГРУБОСТИ НЕАВТОНОМНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СМЫСЛЕ СОХРАНЕНИЯ ХАРАКТЕРА УСТОЙЧИВОСТИ

В.П. Жуков

Рассмотрены условия, при которых характер устойчивости состояния равновесия неавтономной нелинейной динамической системы произвольного порядка ляпуновского типа не изменяется при достаточно малых линейных и нелинейных возмущениях ее правой части (грубость в смысле сохранения характера устойчивости). Нелинейные члены правых частей уравнений невозмущенной системы и нелинейные возмущения этих правых частей считаются принадлежащими широкому классу нелинейных функций, зависящих в общем случае не только от фазовых переменных, но и от времени; этот класс включает в себя как аналитические (по фазовым переменным), так и различных типов неаналитические функции. Приведены достаточные условия указанной грубости.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, грубость в смысле сохранения характера устойчивости.

ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Впервые определение грубости (в смысле структурной устойчивости) для автономных нелинейных динамических систем было дано в работе [1]. Достаточные и необходимые условия такой грубости для автономных систем второго порядка при аналитичности правых частей этих систем и аналитичности возмущающих функций приведены в работах [1—3]. Подробно вопросы структурной устойчивости рассмотрены в работе [4]. Иной смысл имеет определение грубости свойств динамических систем, данное в работе [5]. Определения и условия структурной устойчивости систем [1, 4, 6, 7] связаны с требованием существования гомеоморфизма (взаимно однозначного и взаимно непрерывного преобразования), обеспечивающего топологическую эквивалентность [8] фазовых портретов невозмущенной и возмущенной систем в некоторой окрестности состояния равновесия. Это требование существенно осложняет нахождение и применение условий структурной устойчивости.

Если состояние равновесия невозмущенной динамической системы имеет один из возможных характеров устойчивости (асимптотическая устойчивость, неасимптотическая устойчивость, неустойчивость) и нас интересуют лишь условия, при которых состояние равновесия возмущенной системы будет иметь такой же характер устойчивости при достаточно малых возмущениях, то возникает понятие грубости динамической системы в смысле сохранения характера устойчивости. Определение такой грубости для рассматриваемых в данной работе классов неавтономных нелинейных динамических систем и классов возмущающих функций дано далее в § 1.

Условие грубости в смысле сохранения характера устойчивости представляет для практических целей исследования динамических систем, в частности, систем управления, пожалуй, больший интерес, чем условия грубости в смысле структурной устойчивости, обеспечивающие сохранение топологического типа фазового портрета. Кроме того, первое из этих условий грубости проще в применении, так как в отличие от второго условия не требует существования гомеоморфизма, обусловливающего топологическую эквивалентность фазовых портретов невозмущенной и возмущенной систем.

Условия грубости в смысле сохранения характера устойчивости для автономных нелинейных динамических систем $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, при предположении, что компоненты нелинейных функций $\varphi(\mathbf{x})$ и нелинейных возмущений $\varphi_1(\mathbf{x})$ правой части этих систем являются аналитическими функциями, рассматривались в работе [9].

Цель данной статьи заключается в получении условий указанной грубости для *неавтономных* нелинейных динамических систем $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, при предположении, что компоненты нелинейных по $\mathbf{x}$ функций $\varphi(\mathbf{x}, t)$ и нелинейных по x возмущений $\varphi_1(\mathbf{x}, t)$ правой части этих систем принадлежат не только к аналитическим по $\mathbf{x}$ функциям (при фиксированных значениях $t \geqslant 0$); т. е. условия грубости рассматриваются для более широкого класса нелинейных возмущений и более широкого класса исходных (невозмущенных) нелинейных систем.

1. УСЛОВИЯ ГРУБОСТИ НЕАВТОНОМНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Условия грубости будем рассматривать для класса неавтономных нелинейных систем ляпуновского типа

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

или

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + \varphi_i(x_1, ..., x_n, t), \quad i = 1, ..., n,$$

где a_{ij}, $i, j = 1, ..., n$ — постоянные элементы квадратной матрицы $\mathbf{A}$, $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$, $\varphi_i(0, t) = 0$, $i = 1, ..., n$ — компоненты нелинейной (по $\mathbf{x}$) векторной функции $\varphi(\mathbf{x}, t)$, непрерывно зависящей от t и обеспечивающей в некоторой компактной окрестности ε точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ системы (1) существование и единственность максимально продолженного решения этой системы.

Пусть функции $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяют в окрестности ε ограничительным условиям следующего вида:

$$|\varphi_i(\mathbf{x}, t)| \leqslant w(\mathbf{x}), \quad i = 1, ..., n, \quad t \geqslant 0, \quad \mathbf{x} \in \varepsilon \subset \mathbf{R}^n, \tag{2}$$

где $w(\mathbf{x}) \in \mathbf{C}^1_{\mathbf{x}}$ — некоторая скалярная непрерывно дифференцируемая определенно положительная функция ($w(0) = 0$, $w(\mathbf{x}) > 0$) при $\mathbf{x} \in \varepsilon$, например, определенно положительная квадратичная форма. Условия (2) означают равномерную ограниченность по t функций $|\varphi_i(\mathbf{x}, t)|$.

Из соотношений (2) следуют соотношения

$$\lim_{\mathbf{x} \to \infty} \frac{|\varphi_i(\mathbf{x}, t)|}{|\mathbf{x}|} = 0, \quad i = 1, ..., n, \quad t \geqslant 0, \quad \mathbf{x} \in \varepsilon \subset \mathbf{R}^n. \tag{3}$$

Действительно, так как функция $w(\mathbf{x})$ непрерывно дифференцируема ($w(\mathbf{x}) \in \mathbf{C}^1_{\mathbf{x}}$), то ее приращение $\Delta w(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) - w(0) = w(\mathbf{x})$ при переходе из точки $(\mathbf{x} = 0) \in \varepsilon$ в точку $(\mathbf{x} \neq 0) \in \varepsilon$ можно представить [10, 11] в виде

$$\Delta w(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left.\frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}=0} + o(\mathbf{x}), \quad \lim_{\mathbf{x} \to \infty} \frac{o(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} = 0. \tag{4}$$

Непрерывно дифференцируемая функция $w(\mathbf{x})$ является определенно положительной ($w(0) = 0$, $w(\mathbf{x}) > 0$ при $(\mathbf{x} \in \varepsilon) \neq 0$) и, следовательно, в точке $\mathbf{x} = 0$ имеет минимум, вследствие чего

$$\left.\frac{\partial w(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right|_{\mathbf{x}=0} = 0, \quad j = 1, ..., n. \tag{5}$$

Учитывая равенства (5), из соотношения (4) имеем $w(\mathbf{x}) = o(\mathbf{x})$, $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \infty} \frac{o(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} = 0$ или

$$\lim_{\mathbf{x} \to \infty} \frac{w(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} = 0. \tag{6}$$

Из соотношения (6), учитывая условия (2), следуют, наконец, соотношения (3), справедливые в множестве $\varepsilon \times [0, \infty)$ при любом пути, обеспечивающем стремление $\mathbf{x}$ к нулю. Эти соотношения (3) означают, что рассматриваемые функции $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$, $i = 1, ..., n$ при любом фиксированном $t \geqslant 0$ являются нелинейными по $\mathbf{x}$ функциями, не содержащими линейных по $\mathbf{x}$ составляющих.

Условиям (2) так же, как и следующим из них условиям (3), удовлетворяет широкий класс нелинейных по $\mathbf{x}$ функций $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$, содержащий как аналитические по $\mathbf{x}$, так и различного типа неаналитические функции: непрерывно дифференцируемые любое конечное число раз, непрерывные.

При исследовании грубости возмущение правой части исходной (невозмущенной) нелинейной системы (1) будем рассматривать в виде суммы линейного $\mathbf{A}'\mathbf{x}$ и нелинейного $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$ возмущений. Возмущенная система соответственно будет иметь вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x}, t) + \mathbf{A}'\mathbf{x} + \varphi^1(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \tag{7}$$

где квадратная матрица $\mathbf{A}'$ имеет постоянные элементы a'_{ij} $(i, j = 1, ..., n)$, которые при исследовании условий грубости нелинейных систем (1) будем считать достаточно малыми. Пусть векторная функция $\varphi^1(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет в окрестности ε ограничительным условиям, которые аналогичны условиям (2):

$$|\varphi_i^1(\mathbf{x}, t)| \leqslant w_{\text{в}}(\mathbf{x}), \quad i = 1, ..., n, \quad t \geqslant 0, \quad \mathbf{x} \in \varepsilon \subset \mathbf{R}^n, \tag{8}$$

где $w_{\text{в}}(\mathbf{x}) \in \mathbf{C}^1_{\mathbf{x}}$ — некоторая скалярная непрерывно дифференцируемая определенно положительная функция ($w_{\text{в}}(0) = 0$, $w_{\text{в}}(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \in \varepsilon$). Поэтому для функций $\varphi_i^1(\mathbf{x}, t)$ можно получить соотношения, аналогичные соотношениям (3):

$$\lim_{\mathbf{x} \to \infty} \frac{|\varphi_i^1(\mathbf{x}, t)|}{\mathbf{x}} = 0, \quad i = 1, ..., n, \quad t \geqslant 0, \quad \mathbf{x} \in \varepsilon \subset \mathbf{R}^n. \tag{9}$$

Из условий (8) и соответственно из условий (9), очевидно, следует, что рассматривается широкий класс нелинейных возмущений $\varphi_i^1(\mathbf{x}, t)$, аналогичных классу нелинейных функций $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$; при $w_{\text{в}}(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x})$ эти классы совпадают. Малость возмущений $\varphi_i^1(\mathbf{x}, t)$ в окрестности ε в данной статье при рассмотрении условий грубости достаточно рассматривать в C-метрике, что видно из доказательства приводимой ниже теоремы.

При исследовании условий грубости нелинейных систем (1) будем исходить из следующего определения.

Определение. Нелинейная неавтономная система (1), удовлетворяющая условиям (2) является грубой (в смысле сохранения характера устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ этой системы) по отношению к рассматриваемому классу возмущений $\mathbf{A}'\mathbf{x} + \varphi^1(\mathbf{x}, t)$, характеризующихся тем, что нелинейные возмущения $\varphi^1(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяют условиям (8), а линейные возмущения $\mathbf{A}'\mathbf{x}$ имеют достаточно малые коэффициенты матрицы $\mathbf{A}'$, если при любых указанных возмущениях характер устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ возмущенной системы (7) остается таким же, как у точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ невозмущенной системы (1). ♦

Имеет место следующая теорема, дающая достаточные условия грубости нелинейных неавтономных систем (1) в смысле данного определения.

Теорема. *Нелинейная неавтономная система* (1)*, у которой нелинейные функции* $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$ *удовлетворяют условиям* (2)*, является по отношению к рассматриваемому классу возмущений* $\mathbf{A}'\mathbf{x} + \varphi^1(\mathbf{x}, t)$ *грубой в смысле сохранения характера устойчивости ее точки равновесия* $\mathbf{x} = 0$*, если либо все корни характеристического многочлена матрицы* $\mathbf{A}$ *расположены левее мнимой оси комплексной плоскости, либо хотя бы один корень расположен правее этой оси при любом расположении остальных корней. В первом случае грубой является асимптотически устойчивая нелинейная система* (1)*, во втором случае груба неустойчивая система* (1). ♦

Доказательство теоремы приведено в Приложении.

Таким образом, из теоремы следует, что асимптотически устойчивая нелинейная система (1) груба по отношению к рассматриваемым возмущениям $\mathbf{A}'\mathbf{x} + \varphi^1(\mathbf{x}, t)$, если ее линеаризованная система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathrm{A}\mathrm{x} \; (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n) \tag{10}$$

асимптотически устойчива, а неустойчивая система (1) груба по отношению к указанным возмущениям, если ее линеаризованная система (10) неустойчива из-за наличия правых корней (т. е. корней с положительной действительной частью) характеристического многочлена матрицы $\mathbf{A}$. Расположение корней вне мнимой оси является достаточным условием грубости нелинейной системы (1).

Теорема распространяется, конечно, и на частный случай, когда в уравнении (1) $\varphi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x})$; в этом случае условия (2), очевидно, имеют вид: $\varphi_i(\mathbf{x}) \leqslant w(\mathbf{x})$, $i = 1, ..., n$, где $w(\mathbf{x})$ по-прежнему является некоторой непрерывно дифференцируемой определенно положительной функцией.

При доказательстве теоремы используется следующая лемма, аналогичная теоремам первого метода Ляпунова, но соответствующая случаю, когда в уравнении (1) $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x}, t)$ $(\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n)$ нелинейная функция $\varphi(\mathbf{x}, t)$ принадлежит классу функций, удовлетворяющих условиям (2), который существенно шире класса аналитических функций, рассматриваемых в первом методе.

Лемма. *Пусть скалярные нелинейные функции* $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$*,* $i = 1, ..., n$*, являющиеся компонентами векторной функции* $\varphi(\mathbf{x}, t)$*, входящей в правую часть нелинейной системы* (1)*, удовлетворяют условиям* (2) *и, следовательно, условиям* (3)*. Тогда достаточным условием асимптотической устойчивости точки равновесия* $\mathbf{x} = 0$ *неавтономной нелинейной системы* (1) *при любых функциях* $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$ *из рассматриваемого класса является отрицательность вещественных частей всех корней характеристического полинома матрицы* $\mathbf{A}$*, а достаточным условием неустойчивости точки равновесия* $\mathbf{x} = 0$ *этой системы при любых* *функциях* $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$ *из того же класса является положительность вещественной части хотя бы одного корня характеристического полинома матрицы* **A**.

Доказательство леммы приведено в Приложении.

Рассмотрим пример применения теоремы. Исследуем на грубость в смысле сохранения характера устойчивости следующую нелинейную неавтономную систему

$$\dot{x}_1 = x_2 + x_3^2(2 - e^{-t}),$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2^3,$$

$$\dot{x}_3 = x_3 + x_1^5 \frac{1}{1 + e^{-t}}. \qquad (11)$$

Точка $\mathbf{x} = 0$ является точкой равновесия этой системы. Докажем вначале, что существует такая непрерывно дифференцируемая определенно положительная функция $w(\mathbf{x})$, при которой нелинейные функции

$$\varphi_1(\mathbf{x}, t) = x_3^2(2 - e^{-t}), \quad \varphi_2(\mathbf{x}, t) = x_2^3,$$
$$\varphi_3(\mathbf{x}, t) = x_1^5 \frac{1}{1 + e^{-t}}$$

удовлетворяют условиям (2), определяющим возможность применения теоремы. Такой функцией является функция $w(\mathbf{x}) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, ибо в шаровой окрестности $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \leqslant 1$ точки $\mathbf{x} = 0$ для системы (11) выполняется условие (2):

$$|\varphi_1(\mathbf{x}, t)| = x_3^2(2 - e^{-t}) \leqslant w(\mathbf{x}),$$

$$|\varphi_2(\mathbf{x}, t)| = |x_2^3| \leqslant w(\mathbf{x}),$$

$$|\varphi_3(\mathbf{x}, t)| = |x_1^5| \frac{1}{1 + e^{-t}} \leqslant w(\mathbf{x}),$$

где $w(\mathbf{x}) = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$. Следовательно, теорема применима для исследования грубости системы (11). Так как точка равновесия $\mathbf{x} = 0$ линейной системы $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1$, $\dot{x}_3 = x_3$, полученной линеаризацией нелинейной системы (11), неустойчива (ибо этой линеаризованной системе соответствует один корень справа от мнимой оси), то, согласно теореме, точка равновесия $\mathbf{x} = 0$ нелинейной системы (11) будет грубой в смысле сохранения характера устойчивости по отношению к классу возмущений $\mathbf{A}'\mathbf{x} + \varphi^1(\mathbf{x}, t)$, где матрица $\mathbf{A}'$ имеет достаточно малые элементы, а нелинейное возмущение $\varphi^1(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет условиям (8). Это означает, что, так как согласно лемме система (11) неустойчива, то неустойчивой будет и система, полученная возмущением системы (11).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы. Покажем сначала, что отрицательность вещественных частей всех корней характеристического полинома матрицы **A** является достаточным условием асимптотической устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ нелинейной системы (1) при любых функциях $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющим условиям (2), и, следовательно, условиям (3). Известно, что если все указанные корни имеют отрицательную вещественную часть, то уравнение в частных производных

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_i} = |\mathbf{x}|^2, \quad |\mathbf{x}|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2, \qquad (\text{П.1})$$

имеет своим решением определенно отрицательную квадратичную форму V переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ [12]. Левая часть уравнения (П.1) представляет собой производную в силу линейной системы (10) $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ от неизвестной функции $V(\mathbf{x})$. Производная в силу нелинейной системы (1) от определенно отрицательной квадратичной формы V будет, очевидно, иметь вид:

$$\frac{dV}{dt} = |\mathbf{x}|^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\varphi_i(\mathbf{x}, t). \qquad (\text{П.2})$$

Эта производная в точке $\mathbf{x} = 0$ равна нулю.

Преобразуем правую часть соотношения (П.2) так, чтобы доказательство достаточности условий леммы оказалось возможным не только для аналитических функций $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$, которые рассматривал Ляпунов, но и для всяких функций $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющих условиям (2) и, следовательно, условиям (3), т. е. также для непрерывных и непрерывно дифференцируемых конечное число раз функций. Для этого, вынося $|\mathbf{x}|^2$ в правой части соотношения (П.2) за скобку в виде множителя и используя тождество $1 = (1 - \alpha) + \alpha$, где α — любое положительное число меньшее единицы ($0 < \alpha < 1$), преобразуем соотношение (П.2) к виду

$$\frac{dV}{dt} = (1 - \alpha)|\mathbf{x}|^2 + \left[\alpha + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{1}{|\mathbf{x}|}\frac{\varphi_i(\mathbf{x}, t)}{|\mathbf{x}|}\right]|\mathbf{x}|^2. \qquad (\text{П.3})$$

Используя соотношение (П.3), покажем, что производная dV/dt как функция аргументов $\mathbf{x}$ и t является в некоторой окрестности точки $\mathbf{x} = 0$ определенно положительной, так как она удовлетворяет в этой окрестности условию [5]:

$$\frac{dV}{dt} \geqslant q(\mathbf{x}), \qquad (\text{П.4})$$

где $q(\mathbf{x})$ — некоторая определенно положительная функция ($q(0) = 0$, $q(\mathbf{x}) > 0$ при $\mathbf{x} \neq 0$). В качестве функции $q(\mathbf{x})$ можно принять определенно положительную функцию $q(\mathbf{x}) = (1 - \alpha)|\mathbf{x}|^2$. Это следует из того, что в каждой точке некоторой достаточно малой окрестности $\varepsilon_1 \subset \varepsilon$ точки $\mathbf{x} = 0$ модуль

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{\varphi_i(\mathbf{x}, t)}{|\mathbf{x}|}\right| \qquad (\Pi.5)$$

второго слагаемого в квадратной скобке соотношения (П.3) меньше первого слагаемого $\alpha > 0$ (тогда сумма обоих слагаемых в каждой из указанных точек окрестности ε_1 положительна и, следовательно, как видно из соотношения (П.3), при $q(\mathbf{x}) = (1 - \alpha)|\mathbf{x}|^2$ выполняется соотношение (П.4)). Действительно, так как функция $V(\mathbf{x})$ является определенно отрицательной квадратичной формой, то каждая из производных $\partial V/\partial x_i$, $i = 1, ..., n$, является линейной однородной функцией и поэтому модуль значения каждого из выражений $(\partial V/\partial x_i)(1/|\mathbf{x}|)$, $i = 1, ..., n$ ограничен в любой окрестности точки $\mathbf{x} = 0$ одним и тем же числом. Но в силу условий (3) окрестность ε_1 точки $\mathbf{x} = 0$ можно выбрать так, чтобы значения функций $\varphi_i(\mathbf{x}, t)/|\mathbf{x}|$, $i = 1, ..., n$ были в точках этой окрестности столь малы, что при этом модуль (П.5) второго слагаемого в квадратной скобке соотношения (П.3) становится в этих точках меньше первого слагаемого $\alpha > 0$.

Малость модуля (П.5) по сравнению с числом $\alpha > 0$ можно также доказать, применяя следующую цепочку неравенств, в которых используются, в частности, ограничительные условия (2):

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{\varphi_i(\mathbf{x}, t)}{|\mathbf{x}|}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right| \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{|\varphi_i(\mathbf{x}, t)|}{|\mathbf{x}|} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right| \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{w(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|}.$$

Так как, согласно соотношению, (6) $\lim\limits_{\mathbf{x} \to \infty} (w(\mathbf{x})/|\mathbf{x}|) = 0$, то окрестность $\varepsilon_1 \subset \varepsilon$ можно выбрать такой, чтобы правая часть

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial V}{\partial x_i}\right| \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{w(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|}$$

цепочки неравенств была в каждой точке окрестности ε_1 меньше числа α. Но тогда, очевидно,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{w(\mathbf{x})}{|\mathbf{x}|}\right| < \alpha.$$

Итак, сказанное позволяет утверждать, что в некоторой окрестности точки $\mathbf{x} = 0$ при $q(\mathbf{x}) = (1 - \alpha)|\mathbf{x}|^2$ выполнено соотношение (П.4) и, следовательно, производная dV/dt является в этой окрестности при любых функциях $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющих условиям (2), определенно положительной. А так как к тому же функция $V(\mathbf{x})$ является определенно отрицательной и имеет бесконечно малый высший предел (ибо не зависит от t), то согласно теореме второго метода Ляпунова об асимптотической устойчивости, точка равновесия $\mathbf{x} = 0$ нелинейной системы (1) будет асимптотически устойчивой при любых функциях $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющих условиям (2).

Пусть теперь вещественная часть некоторых корней характеристического полинома матрицы $\mathbf{A}$ положительна. Покажем, что это является достаточным условием неустойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ нелинейной системы (1) при любых функциях $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющих условиям (2). В случае наличия указанных корней для уравнения в частных производных

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n)\frac{\partial V}{\partial x_i} = |\mathbf{x}|^2 + \lambda V,$$

как известно [12, 13], найдутся квадратичная форма $V(\mathbf{x})$ и положительное число λ, которые удовлетворяют этому уравнению, причем форма $V(\mathbf{x})$ в сколь угодно малой окрестности точки $\mathbf{x} = 0$ имеет положительные значения. Взяв производную от этой формы по времени в силу нелинейной системы (1), получим

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V + W(\mathbf{x}, t), \qquad (\Pi.6)$$

где

$$W(\mathbf{x}, t) = |\mathbf{x}|^2 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \varphi_i(\mathbf{x}, t) = |\mathbf{x}|^2\left[1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \frac{\varphi_i(\mathbf{x}, t)}{|\mathbf{x}|}\right].$$

Функция $W(\mathbf{x}, t)$ совпадает с правой частью соотношения (П.2) и соответственно может быть представлена так же, как правая часть соотношения (П.3), которая как функция аргументов $\mathbf{x}$, t является, как показано выше, определенно положительной функцией при любых функциях $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющих условиям (2). Но тогда форма $V(\mathbf{x})$, производная которой в силу системы (1) приводится к виду (П.6), будет удовлетворять условиям второй теоремы о неустойчивости прямого метода Ляпунова [12]. Поэтому точка равновесия $\mathbf{x} = 0$ нелинейной системы (1) будет неустойчивой при любых функциях, удовлетворяющих условиям (2).

Таким образом, достаточным условием того, что при любых функциях $\varphi_i(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющих условиям (2), характер устойчивости нелинейной системы (1) совпадает с характером устойчивости линейной системы (10), является то, что либо все корни характеристического полинома матрицы $\mathbf{A}$ расположены левее мнимой оси, либо некоторые из них располагаются правее этой оси. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Надо доказать, что при условии теоремы, налагаемом на расположение корней характеристического многочлена матрицы $\mathbf{A}$, характер устойчивости точки равновесия $\mathbf{x} = 0$ систем (1) и (7) одинаков при любых рассматриваемых (см. определение) возмущениях $\mathbf{A}'\mathbf{x}$, $\varphi^1(\mathbf{x}, t)$.

По условию теоремы либо все указанные корни лежат левее мнимой оси (тогда линейная система (10) асимптотически устойчива), либо среди этих корней имеются корни, лежащие правее этой оси (точка 0 системы (10) неустойчива). При изменении элементов матрицы $\mathbf{A}$ соответствующие ей корни изменяются непрерывно [14]. Поэтому если корни, соответствующие матрице **A**, все лежат левее мнимой оси, то при достаточно малых элементах матрицы **A**′ корни, соответствующие матрице **A** + **A**′, также все будут лежать левее мнимой оси. Следовательно, точка равновесия **x** = 0 линейных систем (10) и

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{A}')\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \qquad (\text{П.7})$$

будут асимптотически устойчивыми. Но тогда, согласно лемме, асимптотически устойчивыми будут точки равновесия **x** = 0 нелинейных систем (1) и (7), так как соответствующие этим системам нелинейные функции $\varphi(\mathbf{x}, t)$ и $\psi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t) + \varphi^1(\mathbf{x}, t)$ не изменяют характер устойчивости точки равновесия **x** = 0. Заметим, что компоненты $\psi_i(\mathbf{x}, t) = \varphi_i(\mathbf{x}, t) + \varphi_i^1(\mathbf{x}, t)$, $i = 1, ..., n$, функции $\psi(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяют требуемому условию типа условия (2)

$$|\psi_i(\mathbf{x}, t)| \leqslant w_\Sigma(\mathbf{x}), \quad i = 1, ..., n, \quad t \geqslant 0, \quad \mathbf{x} \in \varepsilon. \qquad (\text{П.8})$$

Действительно, $|\psi_i(\mathbf{x}, t)| = |\varphi_i(\mathbf{x}, t) + \varphi_i^1(\mathbf{x}, t)| \leqslant \leqslant |\varphi_i(\mathbf{x}, t)| + |\varphi_i^1(\mathbf{x}, t)|$, но так как согласно условиям (2) и (8) имеем $|\varphi_i(\mathbf{x}, t)| \leqslant w(\mathbf{x})$ и $|\varphi_i^1(\mathbf{x}, t)| \leqslant w_B(\mathbf{x})$, $t \geqslant 0$, $\mathbf{x} \in \varepsilon$, то $|\psi_i(\mathbf{x}, t)| \leqslant |\varphi_i(\mathbf{x}, t)| + |\varphi_i^1(\mathbf{x}, t)| \leqslant w(\mathbf{x}) + w_B(\mathbf{x}) = w_\Sigma(\mathbf{x})$, где $w_\Sigma(\mathbf{x})$ — скалярная непрерывно дифференцируемая определенно положительная функция, ибо согласно условиям (2) и (8) скалярные функции $w(\mathbf{x})$, $w_B(\mathbf{x})$ непрерывно дифференцируемы и определенно положительны. Из условия (П.8), очевидно, следует, что функции $\psi_i(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяют условию

$$\lim_{\mathbf{x} \to \infty} \frac{|\psi_i(\mathbf{x}, t)|}{|\mathbf{x}|} = 0,$$

аналогичному условию (3).

Если же среди корней, соответствующих матрице **A**, имеются корни, лежащие правее мнимой оси, то при достаточно малых элементах матрицы **A**′ число правых корней, соответствующих матрице **A** + **A**′, останется прежним в силу непрерывной зависимости корней от элементов матрицы. Поэтому точки равновесия **x** = 0 линейных систем (10) и (П.7) будут неустойчивыми. Но тогда на основании леммы будут неустойчивыми точки равновесия **x** = 0 нелинейных систем (1) и (7), ибо нелинейные функции $\varphi(\mathbf{x}, t)$ и $\psi(\mathbf{x}, t) = \varphi(\mathbf{x}, t) + \varphi^1(\mathbf{x}, t)$ не могут изменить характер устойчивости точки равновесия **x** = 0.

Таким образом, при условиях теоремы характер устойчивости нелинейных систем (1) и (7) при рассматриваемых возмущениях $\mathbf{A}'\mathbf{x}$, $\varphi^1(\mathbf{x}, t)$ остается одинаковым. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андронов А.А., Понтрягин Л.С.* Грубые системы // Доклады АН СССР. — 1937. — Т. — 14, № 5. — С. 247.
2. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959. — С. 427.
3. *Андронов А. А.* Собрание трудов Андронова А.А. — М.: Изд. Ан СССР. — 1956. — С. 183.
4. *Арнольд И.В.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — С. 84.
5. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959.
6. *Математическая* энциклопедия. — М.: Сов. Энциклопедия, 1984. — Т. 3. — С. 422.
7. *Математическая* энциклопедия. — Там же, 1977. — Т. 1. — С. 1134.
8. *Арнольд И.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1971. — С. 129.
9. *Жуков В.П.* О достаточных и необходимых условиях грубости нелинейных динамических систем в смысле сохранения характера устойчивости // Автоматика и телемеханика. — 2008. — № 1. — С. 30—38.
10. *Фихтенгольц Г.М.* Основы математического анализа. — М.: Наука, 1968. — Т. 1.
11. *Шилов Г.Е.* Математический анализ (функции нескольких вещественных переменных). — М.: Наука, 1972.
12. *Ляпунов А.Н.* Общая задача об устойчивости движения. — М.; Л.: ОНТИ, 1935.
13. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. — М.: Наука, 1966.
14. *Ланкастер П.* Теория матриц. — М.: Наука, 1978. — С. 208.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Жуков Виктор Павлович — д-р техн. наук, зав. лабораторией, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ☎(495) 334-89-61, ✉ vpzhukov@ipu.ru.