

ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ НАБЛЮДАТЕЛЕЙ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ¹

А.Н. Жирабок, А.В. Зуев, Ч.И. Ким

Аннотация. Рассматривается задача построения интервальных наблюдателей для систем, описываемых дискретными линейными моделями, при наличии неопределенностей в виде внешних возмущений и шумов измерений, которые представляют собой неизвестные ограниченные функции. Для построения такого наблюдателя используется модель исходной системы минимальной размерности, нечувствительная к возмущениям, матрица динамики которой ищется в идентификационной канонической форме. Приводятся соотношения, позволяющие построить интервальный наблюдатель минимальной сложности, который оценивает множество допустимых значений заданной линейной функции вектора состояния системы. Для случая, когда невозможно построить наблюдатель, нечувствительный к возмущениям, на основе сингулярного разложения матриц, описывающих систему, предложен способ построения наблюдателя, минимально чувствительного к возмущениям. Теоретические результаты иллюстрируются примером построения интервального наблюдателя для электропривода.

Ключевые слова: линейные системы, неопределенности, модели, интервальные наблюдатели.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая статья логически продолжает работу [1], в которой рассматривалась задача построения интервальных наблюдателей для систем, описываемых линейными моделями с непрерывным временем.

Задаче построения интервальных наблюдателей в последние годы посвящены многочисленные работы, обзор которых приводится в статьях [2, 3]; решение этой задачи для различных классов систем, а также практические приложения содержатся в публикациях [4–10]. В этих работах, как правило, определяется оценка множества допустимых значений полного вектора состояния, в то время как интерес может представлять определенная оценка только для заданной линейной функции этого вектора. Соответствующий интервальный наблюдатель может оказаться существенно проще наблюдателя полной размерности, а класс систем, для которых такой наблюдатель может быть построен, расширится. Кроме того, при оценке за-

данной линейной функции динамика наблюдателя может быть представлена в канонической форме, что упрощает процесс решения задачи и дополнительно расширяет класс систем с возможностью построения для них интервального наблюдателя.

В работе ставится и решается задача построения интервальных наблюдателей для стационарных систем, описываемых дискретными линейными динамическими моделями, работающими в условиях действия внешних возмущений и шумов измерений и оценивающих множество допустимых значений заданной линейной функции вектора состояния системы. Этим настоящая статья отличается от работ [2–10], где интервальные наблюдатели строятся для оценки полного вектора состояния.

1. ОСНОВНЫЕ МОДЕЛИ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим систему, описанную дискретной линейной моделью

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) + Lp(t), \\y(t) &= Hx(t) + v(t),\end{aligned}\tag{1}$$

¹ Работа поддержана Российским научным фондом, проект № 23-29-000191.

где $x(t) \in R^n$, $u(t) \in R^m$ и $y(t) \in R^l$ – векторы состояния, управления и выхода соответственно; F , G и H – постоянные матрицы размеров $n \times n$, $n \times m$ и $l \times n$ соответственно; L – известная матрица размера $n \times q$; $\rho(t) \in R^q$ – неизвестная ограниченная функция времени, описывающая действующие на систему возмущения, $\|\rho(t)\| \leq \rho_*$ для всех $t \geq 0$; $v(t) \in R^l$ – неизвестная ограниченная функция времени, описывающая шумы измерений, $\|v(t)\| \leq v_*$ для всех $t \geq 0$, где $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

Как следует из системы (1) и ее описания, неопределенности в задаче представлены в виде шума измерений $v(t)$ и возмущающего входного сигнала $\rho(t)$ с верхними границами амплитуд v_* и ρ_* соответственно для всех $t \geq 0$.

Требуется построить интервальный наблюдатель минимальной размерности, формирующий нижнюю $\underline{z}(t)$ и верхнюю $\bar{z}(t)$ границы известной линейной функции вектора состояния, заданной матрицей M в виде $z(t) = Mx(t) \in R^p$, для которых при всех $t \geq 0$ справедливо неравенство $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$, понимаемое покомпонентно.

В статье [1] показано, что для непрерывных систем интервальный наблюдатель может быть построен на основе модели минимальной размерности двумя методами. В первом из них описывающие эту модель матрицы ищутся в идентификационной канонической форме (ИКФ), с помощью обратной связи обеспечивается устойчивость наблюдателя, который затем преобразуется к каноническому виду Жордана для обеспечения свойства метцлеровости матрицы, отражающей его динамику. Во втором методе эта матрица сразу ищется в жордановой форме, что существенно упрощает задачу, поскольку устойчивость и метцлеровость теперь прямо следуют из жордановой формы.

В дискретном случае свойство метцлеровости не требуется, необходимо, чтобы рассматриваемая матрица была устойчивой и неотрицательной, поэтому предпочтительной здесь является ИКФ, которая удовлетворяет этим двум требованиям. При этом для обеспечения устойчивости наблюдателя обратная связь может не использоваться, поскольку ИКФ имеет нулевые собственные числа, гарантирующие устойчивость в дискретном случае.

Решение задачи основывается на модели минимальной размерности, нечувствительной к возмущению и оценивающей переменную $z(t)$:

$$\begin{aligned} x_*(t+1) &= F_*x_*(t) + J_*Hx(t) + G_*u(t), \\ z(t) &= H_zx_*(t) + Qy_0(t), \end{aligned} \quad (2)$$

где $x_* \in R^k$ – вектор состояния наблюдателя, k – размерность модели, F_* , J_* , G_* , H_z и Q – матрицы, подлежащие определению, $y_0(t) = N_2y(t)$ для некоторой матрицы N_2 , определяемой ниже. Предполагается, что вектор $x(t)$ и неизвестный вектор $x_*(t)$ связаны матрицей Φ , подлежащей определению:

$$x_*(t) = \Phi x(t).$$

Вид слагаемого $J_*Hx(t)$ в формуле (2) объясняется следующим. Модель (2) является редуцированной частью системы (1), поэтому в нее не входит вектор выхода $y(t)$, который появляется в виде слагаемого $J_*y(t)$ в наблюдателе (12). Это позволяет учесть шумы измерений.

Наилучшим с точки зрения величины интервала $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$ является решение уравнения (2), нечувствительное к возмущению $\rho(t)$, которое, как известно, удовлетворяет условию $\Phi L = 0$ [11]. Кроме того, чтобы оцениваемая переменная $z(t)$ в модели (2) была также нечувствительной к возмущению, переменная $y_0(t)$, входящая в это уравнение, должна формироваться следующим образом.

Введем матрицу L_0 максимального ранга такую, что $L_0L = 0$, тогда $\Phi = NL_0$ для некоторой матрицы N . Поскольку вектор $x'(t) = L_0x(t)$ нечувствителен к возмущению, то $y_0(t) = N_1x'(t)$ для некоторой матрицы N_1 . С другой стороны, $y_0(t)$ представляет собой часть вектора выхода $y(t)$, т. е. $y_0(t) = N_2y(t)$ для некоторой матрицы N_2 . Тогда для матриц N_1 и N_2 получаем уравнение $N_1L_0 = N_2H$, которое имеет ненулевое решение, если

$$\text{rank} \begin{pmatrix} H \\ L_0 \end{pmatrix} < \text{rank}(L_0) + \text{rank}(H).$$

Если это условие выполняется, матрицы N_1 и N_2 определяются из уравнения

$$(N_1 \vdots -N_2) \begin{pmatrix} L_0 \\ H \end{pmatrix} = 0, \quad (3)$$

где символ \vdots служит в качестве разделителя двух матриц. В противном случае вместо $y_0(t)$ в модели (2) следует использовать $y(t)$, что приведет к расширению интервала $(\underline{z}(t), \bar{z}(t))$.



Известно [11, 12], что матрицы, описывающие модель, удовлетворяют уравнениям

$$\Phi F = F_* \Phi + J_* H, \quad G_* = \Phi G, \quad \Phi L = 0. \quad (4)$$

Дополнительное условие связано со вторым уравнением в модели (2), которое вместе с $z(t) = Mx(t)$ представим в виде

$$Mx(t) = H_z \Phi x(t) + QN_2 Hx(t),$$

откуда следует уравнение

$$M = H_z \Phi + QN_2 H = (H_z \quad Q) \begin{pmatrix} \Phi \\ N_2 H \end{pmatrix}, \quad (5)$$

имеющее решение, если

$$\text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ N_2 H \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \Phi \\ N_2 H \\ M \end{pmatrix}. \quad (6)$$

На основе уравнений (4) и (5) можно получить соотношения, которые в ряде случаев позволяют предварительно оценить возможность существования такого решения. Первое из таких условий имеет вид [11]

$$\text{rank} \begin{pmatrix} L_0 F \\ H \\ L_0 \end{pmatrix} < \text{rank} \begin{pmatrix} H \\ L_0 \end{pmatrix} + \text{rank}(L_0 F). \quad (7)$$

Для получения второго заменим в уравнении (5) матрицу Φ на NL_0 и преобразуем:

$$M = (H_z N \quad Q) \begin{pmatrix} L_0 \\ N_2 H \end{pmatrix}.$$

Условием разрешимости полученного уравнения является равенство

$$\text{rank} \begin{pmatrix} L_0 \\ N_2 H \\ M \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} L_0 \\ N_2 H \\ M \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Последовательность проверки приведенных условий изложим в виде алгоритма:

1. Определить матрицу L_0 и из уравнения (3) найти матрицу N_2 .
2. Проверить условия (7) и (8). При их выполнении из уравнения (5) найти матрицы H_z и Q и перейти к построению модели и наблюдателя, нечувствительных к возмущению.
3. При невыполнении одного условия (8) необходимо проанализировать каждую строку M_i , $i = 1, 2, \dots, p$, матрицы M путем замены в условии (8) M на M_i . Из строк, удовлетворяющих этому

условию, сформировать матрицу M_0 и для переменной $z_0(t) = M_0 x(t)$ построить интервальный наблюдатель, оценивающий эту переменную, нечувствительный к возмущению. Для остальных строк матрицы M , объединенных в матрицу M_* , следует искать робастное решение, описанное в § 4, и построить второй наблюдатель, оценивающий переменную $z_*(t) = M_* x(t)$, который будет минимально чувствителен к возмущению.

4. При невыполнении одного условия (7) возможно только робастное решение, которое следует искать методами, описанными в § 4. Интервальный наблюдатель в этом случае будет минимально чувствителен к возмущению.

5. При невыполнении условий (7) и (8) также возможно только робастное решение, описанное в § 4. Если для найденной там матрицы Φ выполняется условие (6), то переменную $y_0(t)$, т. е. невозмущенную шумами измерений часть вектора $y(t)$, можно найти. В противном случае это невозможно, и интервал $(\underline{z}(t), \bar{z}(t))$ дополнительно расширяется за счет искажаемого возмущениями слагаемого $Qy(t)$.

2. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

Матрица F_* ищется в ИКФ:

$$F_* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Известно, что для обеспечения устойчивости модели собственные числа матрицы F_* по модулю не должны превосходить единицу; для используемой ИКФ они равны нулю.

Решение задачи осуществляется на основе уравнения [11]

$$(\Phi_1 \quad -J_{*1} \quad \dots \quad -J_{*k})(V^{(k)} \quad L^{(k)}) = 0, \quad (9)$$

где

$$V^{(k)} = \begin{pmatrix} F^k \\ HF^{k-1} \\ \vdots \\ H \end{pmatrix},$$

$$L^{(k)} = \begin{pmatrix} L & FL & \dots & F^{k-1}L \\ 0 & HL & \dots & HF^{k-2}L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

Φ_i и J_{*i} – строки матриц Φ и J_* соответственно.

Отметим, что матрица $V^{(k)}$ обеспечивает построение модели (2), $L^{(k)}$ – нечувствительность ее к возмущениям. Уравнение (9) имеет нетривиальное решение, если

$$\text{rank}(V^{(k)} : L^{(k)}) < lk + n. \quad (10)$$

Для построения модели из неравенства (10) определяется минимальное k и из уравнения (9) – строка $(\Phi_1 : -J_{*1} : \dots : -J_{*k})$, затем на основе соотношений

$$\Phi_i F = \Phi_{i+1} + J_{*i} H, \quad i = \overline{1, k-1}, \quad \Phi_k F = J_{*k} H, \quad (11)$$

полученных из уравнений (4) и ИКФ [11], строится матрица Φ . Далее проверяется условие (6), выполнение которого означает, что матрица M может быть выражена через $(\Phi^T H^T)^T$ и построенная линейная модель будет оценивать заданную переменную $z(t) = Mx(t)$; матрицы H_z и Q определяются из алгебраического уравнения (5), G_* – из уравнений (4). Если условие (6) не выполняется, следует найти другое решение уравнения (9) при прежней или увеличенной размерности модели. Если оно не выполняется при всех $k \leq n$, необходимо использовать робастное решение, описанное в § 4.

3. ПОСТРОЕНИЕ ИНТЕРВАЛЬНОГО НАБЛЮДАТЕЛЯ

Наблюдатель ищется в виде

$$\underline{x}_*(t+1) = F_* \underline{x}_*(t) + J_* y(t) + G_* u(t) - |J_*| E_k v_*,$$

$$\bar{x}_*(t+1) = F_* \bar{x}_*(t) + J_* y(t) + G_* u(t) + |J_*| E_k v_*,$$

$$\underline{z}(t) = H_z \underline{x}_*(t) + Q y_0(t), \quad (12)$$

$$\bar{z}(t) = H_z \bar{x}_*(t) + Q y_0(t),$$

$$\underline{x}_*(0) = \underline{x}_{*0}, \quad \bar{x}_*(0) = \bar{x}_{*0},$$

где E_k – $k \times 1$ -матрица, составленная из единиц; матрица $|J_*|$ составляется из абсолютных значений соответствующих элементов матрицы J_* ; по предположению $x_*(0) \in [\underline{x}_{*0}, \bar{x}_{*0}]$ для некоторых известных векторов $\underline{x}_{*0}, \bar{x}_{*0} \in R^k$.

Теорема. Пусть $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$, тогда для интервального наблюдателя (12) и всех $t \geq 0$ выполняются соотношения

$$\underline{x}_*(t) \leq x_*(t) \leq \bar{x}_*(t), \quad \underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t),$$

где

$$\begin{aligned} \underline{z}(t) &= H_z \underline{x}_*(t) + Q y_0(t), \\ \bar{z}(t) &= H_z \bar{x}_*(t) + Q y_0(t) \end{aligned} \quad (13)$$

при $H_z \geq 0$ и

$$\begin{aligned} \underline{z}(t) &= H_z \bar{x}_*(t) + Q y_0(t), \\ \bar{z}(t) &= H_z \underline{x}_*(t) + Q y_0(t) \end{aligned} \quad (14)$$

при $H_z \leq 0$.

Доказательство. По аналогии с работой [2] введем ошибки оценивания

$$\begin{aligned} \underline{e}_*(t) &= x_*(t) - \underline{x}_*(t), \quad \bar{e}_*(t) = \bar{x}_*(t) - x_*(t), \\ \underline{e}_z(t) &= z(t) - \underline{z}(t), \quad \bar{e}_z(t) = \bar{z}(t) - z(t). \end{aligned} \quad (15)$$

С учетом выражений (2) и (12) можно получить разностные уравнения

$$\begin{aligned} \underline{e}_*(t+1) &= \\ &= F_* \underline{e}_*(t) + J_* (Hx(t) - y(t)) + |J_*| E_k v_* = \\ &= F_* \underline{e}_*(t) - J_* v(t) + |J_*| E_k v_*, \\ \bar{e}_*(t+1) &= \\ &= F_* \bar{e}_*(t) + J_* (y(t) - Hx(t)) + |J_*| E_k v_* = \\ &= F_* \bar{e}_*(t) + J_* v(t) + |J_*| E_k v_*. \end{aligned} \quad (16)$$

Так как по условию $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$, то из формулы (15) следует $\underline{e}_*(0) \geq 0$, $\bar{e}_*(0) \geq 0$. Отметим, что в системе (16) $|J_*| E_k v_* \pm J_* v(t) \geq 0$ при всех $t \geq 0$ и $F_* \geq 0$. Ее решения при $\underline{e}_*(0) \geq 0$, $\bar{e}_*(0) \geq 0$ будут поэлементно неотрицательными, т. е. $\underline{e}_*(t) \geq 0$, $\bar{e}_*(t) \geq 0$ для всех $t \geq 0$ [2]. Так как $z(t) = H_z x_*(t) + Q y_0(t)$, то при $H_z \geq 0$ из выражений (13) и (15) имеем

$$\begin{aligned} \underline{e}_z(t) &= z(t) - \underline{z}(t) = \\ &= H_z x_*(t) + Q y_0(t) - (H_z \underline{x}_*(t) + Q y_0(t)) = H_z \underline{e}_*(t), \\ \bar{e}_z(t) &= \bar{z}(t) - z(t) = \\ &= H_z \bar{x}_*(t) + Q y_0(t) - (H_z x_*(t) + Q y_0(t)) = H_z \bar{e}_*(t), \end{aligned}$$

откуда с учетом неравенств $\underline{e}_*(t) \geq 0$, $\bar{e}_*(t) \geq 0$ и $H_z \geq 0$ получаем $\underline{e}_z(t) \geq 0$, $\bar{e}_z(t) \geq 0$, что эквивалентно $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$. В случае $H_z \leq 0$ из выражений (14) и (15) следует

$$\begin{aligned} \underline{e}_z(t) &= z(t) - \underline{z}(t) = \\ &= H_z x_*(t) + Q y_0(t) - (H_z \bar{x}_*(t) + Q y_0(t)) = -H_z \bar{e}_*(t), \\ \bar{e}_z(t) &= \bar{z}(t) - z(t) = \\ &= H_z \underline{x}_*(t) + Q y_0(t) - (H_z x_*(t) + Q y_0(t)) = -H_z \underline{e}_*(t), \end{aligned}$$

откуда с учетом неравенств $\underline{e}_*(t) \geq 0$, $\bar{e}_*(t) \geq 0$ и



$H_z \leq 0$ также получаем $\underline{e}_z(t) \geq 0, \bar{e}_z(t) \geq 0$. Теорема доказана. ♦

Замечание 1. Если матрица H_z является знакопеременной, конечный результат остается прежним, но формулы для расчета верхних и нижних границ усложняются. Рассмотрим два случая.

- Пусть H_z – строка; без ограничения степени общности будем полагать, что ее первые p элементов положительны, а остальные отрицательны: $H_z = (H_z^+; H_z^-)$. Примем

$$\underline{z}(t) = H_z^+ \underline{x}_{*(p)}(t) + H_z^- \bar{x}_*^{(k-p)}(t) + Qy_0(t),$$

где $\underline{x}_{*(p)}$ и $\bar{x}_*^{(k-p)}$ – подвекторы векторов состояния \underline{x}_* и \bar{x}_* , содержащие первые p и последние $k-p$ элементов соответственно. Тогда нетрудно получить следующее:

$$\begin{aligned} \underline{e}_z &= z - \underline{z} = \\ &= H_z^+ x_{*(p)} + H_z^- \bar{x}_*^{(k-p)} + Qy_0 - \\ &- (H_z^+ \underline{x}_{*(p)} + H_z^- \bar{x}_*^{(k-p)} + Qy_0) = \\ &= H_z^+ \underline{e}_{*(p)} - H_z^- \bar{e}_*^{(k-p)}, \end{aligned}$$

а поскольку $H_z^+ \geq 0$ и $H_z^- \leq 0$, то $\underline{e}_z(t) \geq 0$. Аналогично показывается, что $\bar{e}_z(t) \geq 0$, если

$$\bar{z}(t) = H_z^+ \bar{x}_{*(p)}(t) + H_z^- \underline{x}_*^{(k-p)}(t) + Qy_0(t).$$

- Пусть матрица H_z содержит несколько строк: $H_z = \begin{pmatrix} H_z^+ \\ H_z^- \end{pmatrix}$, где H_z^+ и H_z^- – такие подматрицы, что $H_z^+ \geq 0$ и $H_z^- \leq 0$. Примем

$$\underline{z}(t) = \begin{pmatrix} H_z^+ \underline{x}_*(t) \\ H_z^- \bar{x}_*(t) \end{pmatrix} + Qy_0(t),$$

тогда, как нетрудно видеть,

$$\begin{aligned} \underline{e}_z &= \begin{pmatrix} H_z^+ \\ H_z^- \end{pmatrix} x_* + Qy_0 - \left(\begin{pmatrix} H_z^+ \underline{x}_* \\ H_z^- \bar{x}_* \end{pmatrix} + Qy_0 \right) = \\ &= \begin{pmatrix} H_z^+ \underline{e}_* \\ -H_z^- \bar{e}_* \end{pmatrix} \geq 0. \end{aligned}$$

Более сложный вариант, когда H_z содержит несколько строк, каждая из которых имеет структуру вида $(H_z^+; H_z^-)$, сводится к комбинации двух рассмотренных случаев.

Замечание 2. Одним из главных в теореме является условие $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$, которое для положительной системы (14) дает $\underline{e}_*(t) \geq 0, \bar{e}_*(t) \geq 0$ для всех $t \geq 0$. Отсутствие обратных связей в наблюдателе и устойчивость матрицы F_* позволяют утверждать, что указанные неравенства будут выполняться для некоторого $t > 0$ и при невыполнении условия $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$, поскольку начальные условия «забываются» при $t \geq k$.

Действительно, обозначим $v_0(t) = |J_*| E_k v_* - J_* v(t) \geq 0$ и рассмотрим первое уравнение в системе (14); известно [12], что его решение может быть представлено в виде

$$\underline{e}_*(t) = F_*^t \underline{e}_*(0) + \sum_{i=0}^{t-1} F_*^{t-i-1} v_0(i). \quad (17)$$

Легко проверить, что $F_*^k = 0$, тогда при $t \geq k$ значение $\underline{e}_*(t)$ будет определяться вторым слагаемым в правой части равенства (17), которое по построению неотрицательно, поэтому $\underline{e}_*(t) \geq 0$ для всех $t \geq k$. Аналогично можно показать, что и $\bar{e}_*(t) \geq 0$ для всех $t \geq k$.

4. РОБАСТНОЕ РЕШЕНИЕ

Если условие (10) не выполняется при всех $k < n$, необходимо искать робастное решение, минимизирующее вклад возмущения в модель. Оно практически полностью совпадает с решением, предложенным в работе [1], за исключением того, что минимизируется норма $\|(\Phi_1; -J_1; \dots; -J_k)L^{(k)}\|_F$ при выполнении условия

$$(\Phi_1; -J_1; -J_2; \dots; -J_k)V^{(k)} = 0, \quad (18)$$

т. е. матрица R_* из статьи [1] заменяется на Φ_1 . Можно сказать, что задача состоит в определении такого решения $(\Phi_1; -J_1; \dots; -J_k)$, которое «максимально ортогонально» столбцам матрицы $L^{(k)}$.

Как и в работе [1], на основе всех линейно независимых решений уравнения (18) для некоторой фиксированной размерности k строится матрица

$$W = \begin{pmatrix} \Phi_1^{(1)} & -J_1^{(1)} & -J_2^{(1)} & \dots & -J_k^{(1)} \\ \Phi_1^{(N)} & -J_1^{(N)} & -J_2^{(N)} & \dots & -J_k^{(N)} \end{pmatrix},$$

находится сингулярное разложение $WL^{(k)} = U_L \Sigma_L V_L$, первый транспонированный столбец матрицы U_L выбирается в качестве вектора весовых коэффициентов $w = (w_1, \dots, w_N)$ и принимается $(\Phi_1 \vdots -J_1 \vdots \dots \vdots -J_k) = wW$. Определением строк матрицы Φ из формулы (11) и матриц $G_* = \Phi G$ и $L_* = \Phi L$ завершается синтез модели (2), минимально чувствительной к возмущениям.

Из-за появления слагаемого $L_* \rho(t)$ в модели (2) динамика интервального наблюдателя при $v \neq 0$ корректируется следующим образом:

$$\begin{aligned} \underline{x}_*^+ &= F_* \underline{x}_* + J_* y + G_* u - |J_*| E_k v_* - |L_*| E_k \rho_*, \\ \bar{x}_*^+ &= F_* \bar{x}_* + J_* y + G_* u + |J_*| E_k v_* + |L_*| E_k \rho_*. \end{aligned}$$

Выражения (14) для ошибок оценивания также корректируются:

$$\begin{aligned} \underline{e}_*^+ &= F_* \underline{e}_* - J_* v + |J_*| E_k v_* + L_* \rho + |L_*| E_k \rho_*, \\ \bar{e}_*^+ &= F_* \bar{e}_* + J_* v + |J_*| E_k v_* - L_* \rho + |L_*| E_k \rho_*. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что искомым результатом следует из доказательства теоремы и очевидного дополнительного неравенства $|L_*| E_k \rho_* \pm L_* \rho(t) \geq 0$.

5. ИНТЕРВАЛЬНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПОЛНОГО ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ

Предложенный подход к получению интервальной оценки заданной переменной $z(t) = Mx(t)$ в ряде случаев может быть применен к аналогичной оценке полного вектора состояния $x(t)$ следующим образом. Не уменьшая степени общности, примем, что матрица H имеет максимальный ранг и

$$\begin{aligned} H &= (H_0 \ 0), \quad y(t) = H_0 x^{(1)}(t) + v(t), \\ x(t) &= \begin{pmatrix} x^{(1)}(t) \\ x^{(2)}(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где H_0 – невырожденная матрица. Определим

$$\begin{aligned} \underline{y}(t) &= y(t) - E_l v_*, \quad \bar{y}(t) = y(t) + E_l v_*, \\ \underline{x}^{(1)}(t) &= H_0^{-1} \underline{y}(t), \quad \bar{x}^{(1)}(t) = H_0^{-1} \bar{y}(t). \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \underline{e}^{(1)}(t) &= x^{(1)}(t) - \underline{x}^{(1)}(t) = \\ &= H_0^{-1}(y(t) - v(t)) - H_0^{-1} \underline{y}(t) = H_0^{-1}(E_l v_* - v(t)), \\ \bar{e}^{(1)}(t) &= \bar{x}^{(1)}(t) - x^{(1)}(t) = \\ &= H_0^{-1} \bar{y}(t) - H_0^{-1}(y(t) - v(t)) = H_0^{-1}(E_l v_* + v(t)). \end{aligned}$$

Полагая, что $H_0^{-1} \geq 0$, из $E_l v_* \pm v(t) \geq 0$ получаем $\underline{e}^{(1)}(t) \geq 0$ и $\bar{e}^{(1)}(t) \geq 0$, откуда следует $\underline{x}^{(1)}(t) \leq x^{(1)}(t) \leq \bar{x}^{(1)}(t)$. Таким образом, переменная $x^{(1)}(t)$ при условии $H_0^{-1} \geq 0$ оценивается на основе выражения (19), при этом возмущение $\rho(t)$ на эту оценку влияния не оказывает.

Замечание 3. Условие $H_0^{-1} \geq 0$ с очевидностью выполняется в практически важных случаях, когда компоненты вектора $x^{(1)}(t)$ измеряются отдельными датчиками и $H_0 = H_0^{-1} = I_l$.

Переменная $x^{(2)}(t)$ может быть интервально оценена наблюдателем вида (12). Полагая $z(t) = x^{(2)}(t) = M^{(2)}x(t)$ для некоторой матрицы $M^{(2)}$, с помощью критерия (7) с заменой в нем матрицы M на $M^{(2)}$ можно оценить возможность построения наблюдателя, не чувствительного к возмущению. Далее в зависимости от результатов проверки строить наблюдатель вида (12) или робастный.

Замечание 4. Условие $\underline{x}_*(0) \leq x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$ теоремы следует из $\underline{x}(0) \leq x(0) \leq \bar{x}(0)$ только в том случае, когда $\Phi \geq 0$. Действительно, при $\Phi \geq 0$ и $x(0) - \underline{x}(0) \geq 0$ получаем $\Phi(x(0) - \underline{x}(0)) \geq 0$, откуда $x_*(0) = \Phi x(0) \geq \Phi \underline{x}(0) = \underline{x}_*(0)$; аналогично доказывается, что $x_*(0) \leq \bar{x}_*(0)$. Как показано в замечании 1, это, однако, не является критичным, так как соотношение $\underline{z}(t) \leq z(t) \leq \bar{z}(t)$ будет обязательно выполняться при $t \geq k$.

6. ПРИМЕР

Рассмотрим дискретизованную модель электропривода

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= k_1 x_2(t) + x_1(t), \\ x_2(t+1) &= k_2 x_3(t) + x_2(t) + \rho(t), \\ x_3(t+1) &= k_3 x_2(t) + k_4 x_3(t) + k_5 u(t), \\ y_1(t) &= x_1(t) + v_1(t), \quad y_2(t) = x_3(t) + v_2(t), \end{aligned} \quad (20)$$

где коэффициенты $k_1 \div k_5$ представляют параметры электропривода и интервал дискретизации; возмущение $\rho(t)$ обусловлено наличием внешнего нагрузочного момента, приведенного к валу двигателя. Рассматриваемая модель описывается матрицами

$$F = \begin{pmatrix} 1 & k_1 & 0 \\ 0 & 1 & k_2 \\ 0 & k_3 & k_4 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_5 \end{pmatrix},$$



$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Постоянный интервальный наблюдатель, оценивающий переменную $x_2(t)$, приняв $M = (0 \ 1 \ 0)$. Поскольку возмущение входит в уравнение для этой переменной, модель будет чувствительна к нему, поэтому ее можно строить, приняв $L = 0$. Рассмотрим уравнение (9) с $L^{(k)} = 0$ при $k = 1$:

$$(\Phi - J_*) \begin{pmatrix} 1 & k_1 & 0 \\ 0 & 1 & k_2 \\ 0 & k_3 & k_4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Его решение дает $\Phi = (1/k_1 \ -1 \ 0)$ и $J_* = (1/k_1 \ -k_2)$, откуда $G_* = 0$, $L_* = -1$. Нетрудно проверить, что условие (5) выполняется и $H_z = -1$, $Q = (1/k_1 \ 0)$. Искомая модель имеет вид

$$\begin{aligned} x_*(t+1) &= (1/k_1)H_1x(t) - k_2H_2x(t) - \rho(t), \\ z(t) &= -x_*(t) + (1/k_1)y_1(t). \end{aligned}$$

На основе этой модели с учетом $H_z = -1$ строится интервальный наблюдатель, оценивающий переменную $z(t) = x_2(t)$:

$$\begin{aligned} \underline{x}_*(t+1) &= (1/k_1)y_1(t) - k_2y_2(t) - \\ &\quad -(1/k_1)v_{*1} - k_2v_{*2} - \rho_*, \\ \bar{x}_*(t+1) &= (1/k_1)y_1(t) - k_2y_2(t) + \\ &\quad + (1/k_1)v_{*1} + k_2v_{*2} + \rho_*, \\ \underline{z}(t) &= -\bar{x}_*(t) + (1/k_1)y_1(t), \\ \bar{z}(t) &= -\underline{x}_*(t) + (1/k_1)y_1(t). \end{aligned} \tag{21}$$

Переменные $x_1(t)$ и $x_3(t)$ могут быть оценены согласно выражению (19):

$$\begin{aligned} \underline{x}_1(t) &= y_1(t) - v_{*1}, \quad \underline{x}_3(t) = y_2(t) - v_{*2}, \\ \bar{x}_1(t) &= y_1(t) + v_{*1}, \quad \bar{x}_3(t) = y_2(t) + v_{*2}. \end{aligned}$$

Сравнивая полученные оценки с оценками, которые строятся на основе методов, рассмотренных в работе [2] и аналогичных работах, можно сделать вывод о том, что предложенный подход дает более простой наблюдатель и интервалы меньших размеров, поскольку, в частности, интервалы для переменных $x_1(t)$ и $x_3(t)$ не содержат возмущение $\rho(t)$.

Для моделирования рассмотрим систему (20) и наблюдатель (21) с $u(t) = 0,2\sin(t/100)$; шумы $v_1(t)$, $v_2(t)$ и $\rho(t)$ представляют собой случайные процессы с дисперсией, равной 0,5. Для простоты примем $k_1 = k_2 = k_5 = 1$, $k_3 = k_4 = -1$. Результаты моделирования приведены на рис. 1 и 2, где для $v_{1*} = v_{2*} = \rho_* = 0,01$ показано поведение переменной

$x_2(t)$ и ее нижней и верхней оценок $\underline{x}_*(t)$ и $\bar{x}_*(t)$ для начальных условий $x(0) = 0$, $\underline{x}(0) = -0,05$, $\bar{x}(0) = 0,05$ и $x(0) = 0$, $\underline{x}(0) = 0,05$, $\bar{x}(0) = -0,05$ соответственно. Как и отмечено в замечании 1, начальные условия влияют только на оценки в начальных тактах.

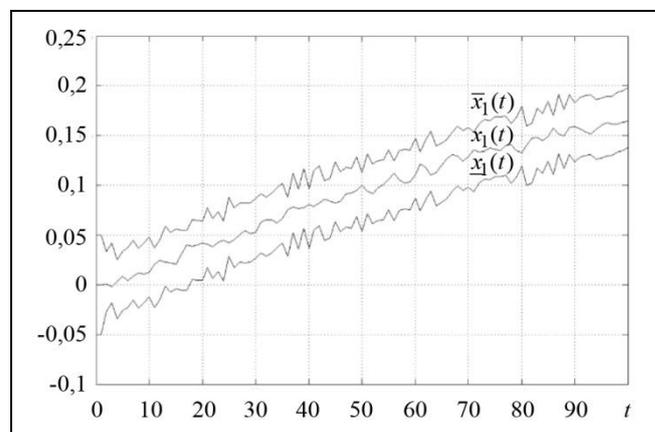


Рис. 1. Поведение переменной $x_1(t)$ и ее оценок $\underline{x}_1(t)$ и $\bar{x}_1(t)$ для начальных условий $x(0) = 0$, $\underline{x}(0) = -0,05$, $\bar{x}(0) = 0,05$

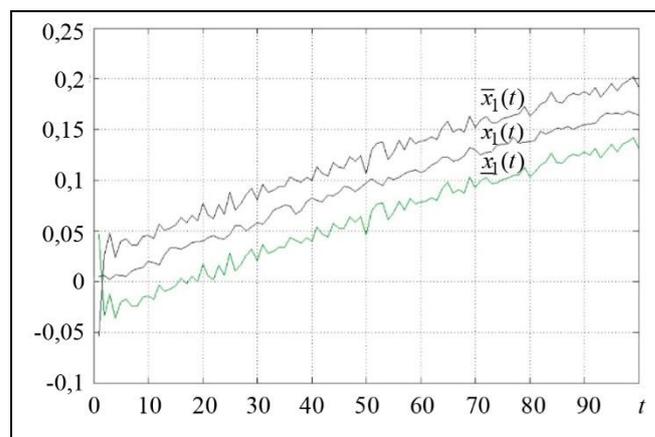


Рис. 2. Поведение переменной $x_1(t)$ и ее оценок $\underline{x}_1(t)$ и $\bar{x}_1(t)$ для начальных условий $x(0) = 0$, $\underline{x}(0) = 0,05$, $\bar{x}(0) = -0,05$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе была поставлена и решена задача построения интервальных наблюдателей для линейных динамических систем, описываемых моделями с дискретным временем, при наличии внешних возмущений и шумов измерений. На основе идентификационной канонической формы получены соотношения, позволяющие строить интервальный наблюдатель минимальной размерности, оценивающий множество допустимых значений заданной

линейной функции вектора состояния системы. Рассмотрен робастный подход к решению задачи; показано, как на основе предложенного решения может быть произведена оценка полного вектора состояния. Изложенное иллюстрируется практическим примером.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жиравок А.Н., Зуев А.В., Ким Чхун Ир.* Метод построения интервальных наблюдателей для стационарных линейных систем // Изв. РАН. ТИСУ. – 2022. – № 5. – С. 3–13. [Zhirabok, A., Zuev, A., Kim Chung Il Method to Design Interval Observers for Linear Time-Invariant Systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2022. – Vol. 61, no. 5. – P.485–495.]
2. *Ефимов Д.В., Раисси Т.* Построение интервальных наблюдателей для динамических систем с неопределенностями // Автоматика и телемеханика. – 2016. – № 2. – С. 5–49. [Efimov, D., Raissi, T. Interval Observer Design for Dynamic Systems with Uncertainties // Automation and Remote Control. – 2016. – Vol. 77, iss. 2. – P. 191–225.]
3. *Khan, A., Xie, W., Zhang, L., Liu, L.* Design and Applications of Interval Observers for Uncertain Dynamical Systems // IET Circuits Devices Syst. – 2020. – Vol. 14. – P. 721–740.
4. *Kolesov, N., Gruzlikov, A., Lukoyanov, E.* Using Fuzzy Interacting Observers for Fault Diagnosis in Systems with Parametric Uncertainty // Proc. XII-th Inter. Sympos. «Intelligent Systems», INTELS'16. – Moscow, Russia, 2016. – P. 499–504.
5. *Кремлев А.С., Чеботарев С.Г.* Синтез интервального наблюдателя для линейной системы с переменными параметрами // Изв. вузов. Приборостроение. – 2013. – Т. 56, № 4. – С. 42–46. [Kremlev, A., Chebotarev, S. Interval Observer Synthesis for Linear LPV System // Izv. Vuzov. Priborostroenie. – 2013. – Vol. 56, no. 4. – P. 42–46 (In Russian)]
6. *Chebotarev, S., Efimov, D., Raissi, T., Zolghadri, A.* Interval Observers for Continuous-Time LPV Systems with L_1/L_2 Performance // Automatica. – 2015. – Vol. 51. – P. 82–89.
7. *Mazenc, F., Bernard, O.* Asymptotically Stable Interval Observers for Planar Systems with Complex Poles // IEEE Trans. Automatic Control. – 2010. – Vol. 55, no. 2. – P. 523–527.
8. *Blesa, J., Puig, V., Bolea, Y.* Fault Detection Using Interval LPV Models in an Open-Flow Canal // Control Engineering Practice. – 2010. – Vol. 18. – P. 460–470.
9. *Zheng, G., Efimov, D., Perruquetti, W.* Interval State Estimation for Uncertain Nonlinear Systems // Proc. IFAC Ncolcos. – Toulouse, France, 2013.
10. *Zhang, K., Jiang, B., Yan, X., Edwards, C.* Interval Sliding Mode Based Fault Accommodation for Non-minimal Phase LPV Systems with Online Control Application // Intern. J. Control. – 2020. – Vol. 93, no. 11 – P. 2675–2689. – DOI: 10.1080/00207179.2019.1687932.
11. *Жиравок А.Н., Зуев А.В., Шумский А.Е.* Методы идентификации и локализации дефектов в линейных системах на основе скользящих наблюдателей // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2019. – № 6. – С. 73–89. [Zhirabok, A., Zuev, A., Shumsky, A.E. Methods of Diagnosis in Linear Systems Based on Sliding Mode Observers. Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2019. – Vol. 58, no. 6. – P. 898–914.]
12. *Квакернаак Х., Сиван П.* Линейные оптимальные системы управления. – М.: Мир, 1977. [Kwarernaak, C., Sivan, R. Linear Optimal Control Systems. – N.-Y.: Wiley, 1972.]

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.А. Красновой.

Поступила в редакцию 22.01.2023,
после доработки 14.03.2023.
Принята к публикации 14.03.2023.

Алексей Нилович Жиравок – д-р техн. наук, Дальневосточный федеральный университет, Институт проблем морских технологий ДВО РАН, г. Владивосток, ✉ zhirabok@mail.ru,

Александр Валерьевич Зуев – канд. техн. наук, Институт проблем морских технологий ДВО РАН, Дальневосточный федеральный университет, Владивосток, ✉ alvzuev@yandex.ru,

Ким Чхун Ир – аспирант, Дальневосточный федеральный университет, ✉ kim.ci@dvfu.ru.



INTERVAL OBSERVER DESIGN FOR DISCRETE LINEAR TIME-INVARIANT SYSTEMS WITH UNCERTAINTIES

A.N. Zhirabok¹, A.V. Zuev², and C.I. Kim³

^{1,2} Institute of Marine Technology Problems, Russian Academy of Sciences, Far Eastern Branch, Vladivostok, Russia
^{1,3} Far Eastern Federal University, Vladivostok, Russia

¹✉ zhirabok@mail.ru, ²✉ alvzuev@yandex.ru, ³✉ kim.ci@dvfu.ru

Abstract. This paper considers the problem of constructing an interval observer for systems described by discrete-time linear models under uncertainties in the form of exogenous disturbances and measurement noise (unknown bounded functions). Such an observer is designed using the minimal-dimension model of the original system invariant with respect to the disturbances. The dynamic matrix of this model is defined in the identification canonical form. We present relations to design an interval observer of minimal complexity for estimating the set of admissible values of a given linear function of the state vector. If the observer invariant with respect to the disturbances does not exist, we suggest a method to construct an observer with minimal sensitivity to them based on the singular value decomposition of system matrices. Theoretical results are illustrated by an example.

Keywords: linear systems, uncertainties, models, interval observers.

Funding. This work was supported by the Russian Science Foundation, project no. 23-29-000191, <https://rscf.ru/project/23-19-00191/>.