УДК 519.857

УПРАВЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫМИ СОСТОЯНИЯМИ В ПОГЛОЩАЮЩИХ РЕСУРСНЫХ СЕТЯХ[1]

Л.Ю. Жилякова

Исследованы свойства ресурсных сетей со стоковыми вершинами, названных поглощающими ресурсными сетями. При наличии более одного стока распределение ресурса в предельном состоянии зависит от начального состояния сети. Предложены две задачи управления в таких сетях. Стоки рассматриваются как целевые вершины. Управляющие вершины — некоторое подмножество вершин переходной компоненты.

Ключевые слова: ресурсная сеть, управление, стохастическая матрица, стоки, неоднородная цепь Маркова.

ВВЕДЕНИЕ

Ресурсная сеть — динамическая параллельная пороговая модель, предложенная в работе [1] и получившая развитие в работах [2—5]. Она представляет собой ориентированный взвешенный граф, в котором вершины обмениваются ресурсами в дискретном времени. В отличие от классической потоковой модели Форда—Фалкерсона [6] и ее динамических модификаций [7], в ресурсной сети не существует направления движения ресурса от источников к стокам; кроме того, распространение ресурса происходит по всем путям, а не только по некоторым выделенным и удовлетворяющим заданным условиям. В этом смысле модель ближе к процессам рассеяния на графах [8, 9], названных «интегральными по путям» [9]. В работе [9] дан большой обзор этих моделей. Еще один класс моделей, с которыми ресурсная сеть имеет сходство, — это пороговые модели «игра выстреливания фишек» [10, 11] и «абелева куча песка» [12, 13], находящие применение в различных областях, в том числе, при моделировании «самоорганизующейся критичности» [14—16].

Ресурсная сеть, как и указанные модели, является пороговой, однако принцип ее функционирования принципиально иной. Все ребра сети обладают ограниченными пропускными способностями. Суммарная пропускная способность выходящих ребер каждой вершины служит для нее тем пороговым значением, по разные стороны которого она функционирует по разным правилам. Ресурс является бесконечно делимым, благодаря этой особенности разнообразные переходные процессы сходятся к предельным состояниям, которые в целочисленных пороговых моделях существуют не всегда. Кроме локальных пороговых значений для вершин, в сети имеется генеральная характеристика: *пороговое значение T суммарного ресурса*, такое, что при ресурсе, не превосходящем это значение, все вершины сети за конечное число шагов оказываются функционирующими по одному и тому же правилу. В этом случае переходные процессы в сети описываются однородной цепью Маркова. Если суммарный ресурс сети больше T, в ней появится хотя бы одна вершина, суммарный ресурс которой превзойдет ее выходную пропускную способность. В этом случае вершина переходит на другое правило функционирования, отличное от того, по которому отдают ресурс остальные вершины. Цепь Маркова, описывающая такую сеть, уже не является однородной. В эйлеровых сетях [5], в которых каждая вершина имеет одинаковые суммарные входную и выходную способности, значение T совпадает с суммой пропускных способностей всех ребер сети. В регулярных несимметричных сетях [3, 4] значение T строго меньше этой суммы.

Все сети, исследованные в работах [1—5], имеют регулярные стохастические матрицы (термин «регулярные» соответствует здесь определению, данному в работе [17], и отличается от его использования в работах [18, 19]), начиная с некоторого натурального k, все степени таких матриц строго положительны. Сети, описанные в настоящей работе, в этом смысле регулярными не являются. Поглощающие сети — это сети со стоковыми вер-

[1] Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-00771.

шинами, т. е. вершинами без исходящих ребер. Будет показано, что если сеть имеет более одного стока, при некоторых дополнительных условиях ее предельное состояние зависит от начального, а значит, варьируя распределение ресурса по вершинам в начальном состоянии, можно получать желаемые предельные состояния или приближаться к ним наилучшим образом.

1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Ресурсная сеть представляет собой ориентированный взвешенный граф $G = (V, E)$, $|V| = n$, веса ребер которого r_{ij} обозначают их *пропускные способности*. Матрица пропускных способностей — неотрицательная матрица $R = (r_{ij})_{n \times n}$.

Вершинам v_i приписаны неотрицательные числа $q_i(t)$, называемые *ресурсами* и изменяющиеся в дискретном времени t.

Состоянием $Q(t)$ сети в момент t называется вектор $Q(t) = (q_1(t), ..., q_n(t))$.

Состояние $Q^* = (q_1^*, ..., q_n^*)$ будем называть *предельным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует t_ε такое, что для всех $t > t_\varepsilon$ $|q_i^* - q_i(t)| < \varepsilon$, $i = 1, 2, ..., n$.

Суммарной пропускной способностью сети называется сумма пропускных способностей всех ее ребер:

$$r_{sum} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} r_{ij}.$$

Суммарную пропускную способность входных ребер вершины будем называть ее *входной пропускной способностью* и обозначать через $r_i^{in} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}$; суммарную пропускную способность выходных ребер, соответственно, назовем *выходной пропускной способностью* и обозначим через $r_i^{out} = \sum_{j=1}^{n} r_{ij}$. Пропускная способность петли (если она существует) входит в обе суммы. Эти величины являются обобщением полустепеней захода и исхода вершин в не взвешенном ориентированном графе.

Суммарный ресурс, находящийся во всех вершинах, обозначим через W. В сети выполняется *закон сохранения*: при ее функционировании ресурс остается постоянным — не поступает извне и не расходуется.

Распределение ресурса в сети происходит по одному из двух правил, выбор которых зависит от значения ресурса в вершинах. В момент $t + 1$ вершина v_i в ребро, соединяющее ее с вершиной v_k, отдаст:

$$r_{ik} \text{ единиц ресурса, если } q_i(t) > r_i^{out} \text{ (правило 1);}$$

$$\frac{r_{ik}}{r_i^{out}} q_i(t), \text{ если } q_i(t) \geqslant r_i^{out} \text{ (правило 2).}$$

Стохастическая матрица, соответствующая матрице пропускной способности R, задается формулой:

$$R' = \begin{pmatrix} \frac{r_{11}}{r_1^{out}} & \cdots & \frac{r_{1n}}{r_1^{out}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{r_{n1}}{r_n^{out}} & \cdots & \frac{r_{nn}}{r_n^{out}} \end{pmatrix}.$$

Если все вершины сети функционируют по правилу 2, для вектора состояния выполняется: $Q(t + 1) = Q(t)R'$.

Множество вершин, для которых $q_i(t) \leqslant r_i^{out}$, называется зоной $Z^-(t)$. Вершины из $Z^-(t)$ функционируют по правилу 2. $Z^+(t)$ — множество вершин, ресурс которых больше их выходной пропускной способности, они функционируют по правилу 1.

T — пороговое значение ресурса, такое, что при $W \leqslant T$ все вершины, начиная с некоторого t', переходят в зону $Z^-(t)$; при $W > T$ зона $Z^+(t)$ не пуста, начиная с некоторого t''.

Вершина, не имеющая исходящих ребер, является *стоком*: ресурс, попавший в нее, уже ее не покидает. Ресурсные сети со стоковыми вершинами будем называть *поглощающими ресурсными сетями*.

2. ПОГЛОЩАЮЩИЕ РЕСУРСНЫЕ СЕТИ

2.1. Свойства поглощающих сетей

Пусть поглощающая сеть имеет l стоков с номерами от 1 до l. Ее матрицу пропускных способностей можно представить в блочном виде:

$$R = \left(\begin{array}{c|c} D & O_1 \\ \hline R_1 & R_2 \end{array} \right), \qquad (1)$$

где D — диагональная матрица размера $l \times l$ с произвольными неотрицательными диагональными элементами, равными пропускным способностям петель в стоках, O_1 — нулевая матрица размера $l \times (n - l)$, R_1 — матрица размера $(n - l) \times l$ и R_2 — квадратная матрица $(n - l) \times (n - l)$. Матрица R_1 состоит из пропускных способностей ребер, ведущих из переходной компоненты в стоки, матрица R_2 — из пропускных способностей ребер, соединяющих вершины внутри переходной компоненты.

Стохастическая матрица R', соответствующая такой матрице R, будет иметь вид

$$R' = \left(\begin{array}{c|c} E_1 & O_1 \\ \hline R_1 & R_2 \end{array}\right). \qquad (2)$$

Причем, даже если матрица D имеет на диагонали нулевые элементы (т. е. одна или несколько стоковых вершин не имеют петель), тем не менее, блок матрицы R', соответствующий матрице D, будет единичной матрицей. С формальной точки зрения, это поддерживает стохастические свойства матрицы R', а фактически матрица E_1 отвечает за то, что весь ресурс в стоках остается в них, независимо от наличия петель.

Перечислим свойства поглощающих сетей, вытекающие непосредственно из их топологии.

Свойство 1. Предельное состояние в поглощающих сетях существует. Координаты вектора предельного состояния, соответствующие переходной компоненте, равны нулю. Предельный поток состоит из потока в петлях стоковых вершин. ♦

Из этого свойства следует, что если сеть не имеет петель, предельный поток в ней равен нулю, т. е. функционирование останавливается, чего в регулярных сетях не происходит никогда. Если в стоках имеются петли, ресурс циркулирует только по ним; поток в остальных ребрах стремится к нулю при $t \to \infty$.

Свойство 2. Наличие или отсутствие петель в стоках не влияет на количество ресурса в стоках в предельном состоянии. ♦

Справедлив и гораздо более сильный результат.

Свойство 3. Наличие или отсутствие петель в переходных вершинах никак не влияет на количество ресурса в стоках в предельном состоянии. ♦

Свойства 2 и 3 вытекают из теорем 3 и 4, доказанных далее. Хотя их доказательство нетривиально, физический смысл нагляден. Петли в стоках не влияют на функционирование сети, поскольку из стоковых вершин ресурс не выходит. Петли в переходных вершинах задерживают распределение ресурса, но не нарушают пропорции, в которой он распределяется в исходящие ребра. Таким образом, предельное состояние достигается за конечное время при отсутствии петель или асимптотически при их наличии, но координаты предельного вектора, соответствующие стоковым вершинам, остаются неизменными.

Свойство 4. Если в сети имеется один сток, он в предельном состоянии соберет весь суммарный ресурс W.

Свойство 5. В поглощающей сети с несколькими стоками и произвольными пропускными способностями ребер в общем случае предельное состояние зависит от начального при любом суммарном ресурсе. ♦

Этим свойством поглощающие сети отличаются от всех остальных. Ни при каких ресурсах в отличие от регулярных сетей они не имеют единственного предельного состояния. Однако есть частные случаи поглощающих сетей с несколькими стоками, в которых предельное состояние не зависит от начального.

2.2. Поглощающие сети с единственным предельным состоянием

Рассмотрим поглощающую сеть, матрица пропускных способностей которой имеет вид:

$$R = \left(\begin{array}{c|c} D & O_1 \\ \hline H & R_2 \end{array}\right). \qquad (3)$$

Ее отличие от матрицы (1) заключается в блоке H — он имеет ранг, равный единице: $\mathrm{rank}H = 1$. Это означает, что пропускные способности ребер, ведущих из переходной компоненты в стоки, пропорциональны.

Теорема 1. *В поглощающей сети с матрицей* (3), *в которой* $\mathrm{rank}\ H = 1$, *для любого начального состояния* $Q(0) = (q_1(0), ..., q_l(0), q_{l+1}(0), ..., q_n(0))$ *предельное состояние определяется формулой*:

$$Q^* = \left(q_1(0) + \frac{h_1^{in}}{h_{sum}} W^-, ..., q_l(0) + \right.$$
$$\left. + \frac{h_l^{in}}{h_{sum}} W^-, 0, ..., 0\right), \qquad (4)$$

где $W^- = \sum\limits_{i=l+1}^{n} q_i(0)$, $h_j^{in} = \sum\limits_{k=1}^{n-l} h_{kj}$, $h_{sum} = \sum\limits_{k=1}^{n-l}\sum\limits_{j=1}^{l} h_{kj}$.

Доказательство. 1. Вклады в предельный ресурс $q_1(0), ..., q_l(0)$ очевидны, так как ресурс из стока выйти не может.

2. Если ранг матрицы равен 1, то все ее строки и столбцы пропорциональны. Матрицу H можно записать в виде:

$$H = \begin{pmatrix} h_1 & \alpha_2 h_1 & ... & \alpha_l h_1 \\ h_2 & \alpha_2 h_2 & ... & \alpha_l h_2 \\ ... & ... & ... & ... \\ h_{n-l} & \alpha_2 h_{n-l} & ... & \alpha_l h_{n-l} \end{pmatrix}.$$

Если некоторая вершина v_j из переходной компоненты функционирует по правилу 1, она будет отдавать в стоки ресурс, равный пропускным способностям ребер: $h_j, \alpha_2 h_j, ..., \alpha_l h_j$; т. е. в каждый сток он попадет в пропорции $1 : \alpha_2 : ... : \alpha_l$. Если вершина функционирует по правилу 2, она отдает в стоки ресурс, равный $\left(\frac{h_j}{h_j^{out}} q_j(t), \frac{h_j\alpha_2}{h_j^{out}} q_j(t), ..., \frac{h_j\alpha_l}{h_j^{out}} q_j(t)\right)$, и стоки получат ресурс в той же пропорции $1 : \alpha_2 : ... : \alpha_l$. Тогда суммарный входящий ресурс в стоках на каждом такте также делится в соотношении $1 : \alpha_2 : ... : \alpha_l$. Соответственно, в такой же пропорции он распределится между стоками в предельном состоянии. Таким образом, ресурс, пришедший в стоки из переходной компоненты, будет равен

$$\frac{1}{1+\alpha_2+...+\alpha_l} W^-, \ \frac{\alpha_2}{1+\alpha_2+...+\alpha_l} W^-, ..., \ \frac{\alpha_l}{1+\alpha_2+...+\alpha_l} W^-.$$

Входные пропускные способности стоков равны соответственно:

$$h_1^{in} = h_1 + h_2 + ... + h_{n-l},$$

$$h_k^{in} = \alpha_k(h_1 + h_2 + ... + h_{n-l}), \quad k = 2, ..., l.$$

Суммарная пропускная способность матрицы H:

$$h_{sum} = (h_1 + h_2 +...+ h_{n-l})(1 + \alpha_2 + ... + \alpha_l),$$

$$\frac{h_1^{in}}{h_{sum}} = \frac{1}{1+\alpha_2+...+\alpha_l}, \ \frac{h_k^{in}}{h_{sum}} = \frac{\alpha_k}{1+\alpha_2+...+\alpha_l}, ..., \ \frac{h_l^{in}}{h_{sum}} = \frac{\alpha_l}{1+\alpha_2+...+\alpha_l},$$

откуда и вытекает формула (4). ♦

Следствие 1. Если в начальном состоянии весь ресурс находится в переходной компоненте, то предельное состояние единственно и не зависит от начального распределения ресурса по вершинам.

Следствие 2. Из формулы предельного состояния видно, что матрица R_2 в сети с rank$H = 1$ может быть любой. Перетоки ресурса внутри переходной компоненты никак не влияют на предельное состояние.

2.3. Поглощающие сети общего вида. Пороговое значение *T*

Будем рассматривать произвольные поглощающие сети, наложив на них единственное ограничение: переходная компонента должна быть регулярной, т. е. существует такое $k \geqslant 1$, что матрица $R_2'^k$ строго положительна.

Если матрица R_1 имеет ранг больше единицы, распределение ресурса в предельном состоянии всегда зависит от начального. При этом элементы матрицы R_2 тоже начинают играть роль в формировании предельного состояния. При изменении хотя бы одного из недиагональных элементов матрицы R_2 предельное состояние тоже изменяется. Таким образом, в поглощающей сети с rank$R_1 > 1$ предельное состояние всегда зависит от начального.

Из сказанного вытекает еще одно основное отличие поглощающих ресурсных сетей от регулярных и эргодических — они не имеют порогового значения T.

Теорема 2. *В поглощающей сети порогового значения T ресурса не существует.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению пороговое значение T — это такое количество ресурса, что при $W > T$ для некоторого момента времени t' и некоторой вершины v_i выполняется: $\forall\, t > t'\ v_i \in Z^+(t)$. В поглощающих сетях такими вершинами могут быть только стоки. Но принадлежность вершины зоне $Z^+(t)$ означает, что ее ресурс превосходит ее выходную пропускную способность r_i^{out}. Однако стоки не имеют исходящих ребер, кроме, возможно, петли, наличие или отсутствие которой не влияет на функционирование сети. Добавляя и убирая петли в стоки и изменяя их пропускные способности, можно получить сети с разным значением T, при котором хотя бы один сток перейдет на правило 1, но с одинаковым функционированием при любом суммарном ресурсе. Это и означает отсутствие порога в таких сетях. ♦

2.3. Предельные состояния в поглощающих сетях

Найдем предельную матрицу произвольной поглощающей сети R'^{∞} и опишем ее свойства.

Лемма 1. *Пусть поглощающая сеть с l стоками представлена матрицей* (1). *Тогда R'^{∞} — предел степеней стохастической матрицы R' — определяется по формуле*:

$$R'^{\infty} = \left(\begin{array}{c|c} E_1 & O_1 \\ \hline (E_2 - R_2')^{-1}R_1' & O_2 \end{array}\right), \qquad (5)$$

где E_2 — единичная матрица размера $(n - l) \times (n - l)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Степени матрицы R' имеют вид:

$$R'^k = \left(\begin{array}{c|c} E_1 & O_1 \\ \hline R_1' + R_2'R_1' + (R_2')^2R_1' + ... + (R_2')^{k-1}R_1' & (R_2')^k \end{array}\right).$$

Для цепи Маркова $(R_2')^k \to O_2$ при $k \to \infty$, где O_2 — нулевая матрица размера $(n - l) \times (n - l)$; $\sum_{k=0}^{\infty} (R_2')^k = (E_2 - R_2')^{-1}$, причем, матрица $(E_2 - R_2')^{-1}$ существует [17, *теоремы 3.1.1 и 3.2.1*)].

Тогда $R_1' + R_2'R_1' + (R_2')^2R_1' + ... + (R_2')^kR_1' + ... = (E_2 - R_2')^{-1}R_1'$, и матрица R'^{∞} имеет вид:

$$R'^{\infty} = \left(\begin{array}{c|c} E_1 & O_1 \\ \hline (E_2 - R_2')^{-1}R_1' & O_2 \end{array}\right). \ ♦$$

Теорема 3. *В поглощающей сети с l стоками матрица R'^{∞} остается неизменной при любых изменениях диагональных элементов.*

Доказательство. Матрице R, заданной формулой (3), соответствует стохастическая матрица

$$R' = \left(\begin{array}{c|c} E & O_1 \\ \hline R'_1 & R'_2 \end{array}\right).$$

1. Для изменения диагональных элементов матрицы D доказательство очевидно.

2. Докажем это утверждение для диагональных элементов матрицы R_2.

Пусть $R_{2new} = R_2 - D(\Delta r_{ii})$, где $D(\Delta r_{ii})$ — диагональная матрица размера $(n - l) \times (n - l)$, элементы которой характеризуют изменение пропускных способностей петель. Будем предполагать, что $0 \leqslant \Delta r_{ii} \leqslant r_{ii}$ и хотя бы для одной вершины выполнится строгое неравенство $\Delta r_{kk} > 0$. Если для некоторой вершины v_k выполняется равенство $\Delta r_{kk} = r_{kk}$, петля этой вершины исчезает вообще.

Тогда новая матрица пропускных способностей сети

$$R_{new} = \left(\begin{array}{c|c} D & O_1 \\ \hline R_1 & R_2 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} O_3 & O_1 \\ \hline O_4 & D(\Delta r_{ii}) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} D & O_1 \\ \hline R_1 & R_{2new} \end{array}\right).$$

Стохастическая матрица, соответствующая матрице R_{new}, будет отлична от R'.

Зависимость между матрицами R'_1 и R'_2 и матрицами R'_{1new} и R'_{2new}:

$$R'_{1new} = D(r_i^{out}/(r_i^{out} - \Delta r_{ii}))\,R'_1,$$

$$R'_{2new} = D(r_i^{out}/(r_i^{out} - \Delta r_{ii}))(R'_2 - D(\Delta r_{ii}/r_i^{out})), \quad (6)$$

где $D(r_i^{out}/(r_i^{out} - \Delta r_{ii}))$ — диагональная матрица размера $(n - l) \times (n - l)$ с элементами $(r_i^{out}/(r_i^{out} - \Delta r_{ii}))$. Именно в такой пропорции пересчитываются элементы двух нижних блоков матрицы R'. Обозначим ее через D'; $D(\Delta r_{ii}/r_i^{out})$ — диагональная матрица, соответствующая изменению матрицы R'_2 после изменения пропускных способностей петель. Обозначим ее через D_Δ.

Тогда равенства (6) можно переписать в более компактном виде:

$$R'_{1new} = D'R'_1, \quad R'_{2new} = D'(R'_2 - D_\Delta).$$

Новая матрица $R'_{1new} = \left(\begin{array}{c|c} E & O_1 \\ \hline R'_{1new} & R'_{2new} \end{array}\right)$ по-прежнему остается стохастической, и поэтому предел ее степеней существует и равен

$$R'^{\infty}_{new} = \left(\begin{array}{c|c} E & O_1 \\ \hline (E_2 - R'_{2new})^{-1}R'_{1new} & O_2 \end{array}\right).$$

Выразим $(E_2 - R'_{2new})^{-1}R'_{1new}$ через исходные матрицы:

$$(E_2 - R'_{2new})^{-1}R'_{1new} = (E_2 - (D'(R'_2 - D_\Delta))^{-1}D'R'_1. \quad (7)$$

Все диагональные элементы матрицы D' отличны от 0. Это означает, что матрица D'^{-1} существует. Тогда в первом множителе правой части равенства (7) D' можно внести в скобку:

$$\begin{aligned}(E_2 - (D'(R'_2 - D_\Delta))^{-1}D'R'_1 &= \\ = (D'^{-1}E_2 - D'^{-1}D'(R'_2 - D_\Delta))^{-1} &= \\ = (D'^{-1} - (R'_2 - D_\Delta))^{-1}R'_1 = (D'^{-1} + D_\Delta - R'_2)^{-1}R'_1&.\end{aligned}$$

Вычислим сумму $D'^{-1} + D_\Delta$.

Это две диагональные матрицы. Элементы матрицы D' равны $r_i^{out}/(r_i^{out} - \Delta r_{ii})$, тогда соответствующие элементы D'^{-1} равны $\dfrac{r_i^{out} - \Delta r_{ii}}{r_i^{out}}$. Элементы матрицы D_Δ равны $\Delta r_{ii}/r_i^{out}$.

Для каждого i выполнится:

$$(r_i^{out} - \Delta r_{ii})/r_i^{out} + \Delta r_{ii}/r_i^{out} = 1.$$

Отсюда

$$(D'^{-1} + D_\Delta - R'_2))^{-1}R'_1 = (E_2 - R'_2)^{-1}R'_1,$$

а это означает, что

$$(E_2 - R'_{2new})^{-1}R'_{1new} = (E_2 - R'_2)^{-1}R'_1,$$

и соответственно,

$$R'^{\infty}_{new} = \left(\begin{array}{c|c} E & O_1 \\ \hline (E_2 - R'_2)^{-1}R'_1 & O_2 \end{array}\right) = R'^{\infty}.$$

Таким образом, при любых изменениях диагональных элементов матрицы R пределы степеней соответствующих стохастических матриц совпадают, хотя сами стохастические матрицы различны. ♦

Теорема 4. *Пусть поглощающая сеть с l стоками представлена матрицей* (1). *Тогда для любого ресурса W и любого начального состояния $Q(0) = (q_1(0), ..., q_n(0))$ предельное состояние рассчитывается по формуле*:

$$Q^* = Q(0)R'^{\infty}, \quad (8)$$

где R'^{∞} — предельная матрица, определяемая по формуле (5).

Доказательство 1. Если начальное состояние таково, что все вершины из переходной компоненты функционируют по правилу 2, доказательство теоремы очевидно. Для каждого t выполнится: $Q(t) = Q(0)R'^{t}$. Совершив предельный переход, получим искомое равенство (8).

2. Пусть вершины из переходной компоненты некоторое число тактов функционируют по правилу 1 (поскольку ресурс безвозвратно уходит в стоки, то такое количество тактов конечно при любом начальном ресурсе).

На каждом такте t построим новую матрицу пропускной способности $R(t)$, отличающуюся от матрицы R только диагональными элементами тех нестоковых вершин, которые функционируют по правилу 1, т. е.

$$r_{ii}(t) = \begin{cases} r_{ii}, \text{ если } q_i(t) \le r_i^{out}, \\ q_i(t) - \sum\limits_{j \ne i} r_{ij}, \text{ если } q_i(t) > r_i^{out}. \end{cases}$$

Нормируя матрицу $R(t)$, получим стохастическую матрицу $R'(t)$, которая задает неоднородную цепь Маркова. Для этих матриц выполняются условия:

- $\forall t\ Q(t + 1) = Q(t)R'(t)$;
- $\forall t$ вектор $Q(t)$ совпадает с вектором состояния сети, заданной матрицей R, с начальным состоянием $Q(0) = (q_1(0), ..., q_n(0))$.

Тогда функционирование сети описывается правилом:

$$Q(t + 1) = Q(t)R'(t) = Q(0)(R'(0)R'(1)...R'(t)).$$

За конечное число шагов m все вершины из переходной компоненты перейдут на правило 2. Тогда, начиная с шага $m + 1$, сеть начинает описываться однородной цепью Маркова: $R(t) = R$ и $R'(t) = R'$.

Вектор $Q(m + k)$ можно записать в виде

$$Q(m + k) = q(0)\left(\prod_{t=0}^{m} R'(t)\right)R'^k.$$

При $k \to \infty$ получим:

$$Q^* = Q(0)\left(\prod_{t=0}^{m} R'(t)\right)\lim_{k \to \infty} R'^k = Q(0)\left(\prod_{t=0}^{m} R'(t)\right)R'^{\infty}.$$

По теореме 3 матрица R'^{∞} не изменяется при любых изменениях диагональных элементов.

Тогда для всех $t = 0, ..., m$ выполнится $R'(t)R'^{\infty} = R'^{\infty}$.

Отсюда $Q^* = Q(0)R'^{\infty}$. ♦

Следствие. Вектор предельного состояния Q^* не зависит от наличия или отсутствия петель в вершинах.

Теорема 5. *Пусть поглощающая сеть с l стоками представлена матрицей* (1). *Тогда элементы i-й строки матрицы R'^{∞} ($i > l$) соответственно равны компонентам вектора предельного состояния при начальном состоянии $Q_i(0) = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, где единице равна i-я компонента*:

$$R'^{\infty} = \begin{pmatrix} e_1^T \\ ... \\ e_l^T \\ Q_{l+1}^* \\ ... \\ Q_n^* \end{pmatrix},$$

($e_1, ..., e_l$ — первые l вектор-столбцов единичной матрицы $(E)_{n \times n}$).

Доказательство вытекает непосредственно из формулы (8).

Ранее было сформулировано свойство поглощающих сетей: предельное состояние в них не зависит от наличия/отсутствия петель и, соответственно, диагональных элементов в матрице R. Это означает, что матрица R'^{∞} не зависит от значений диагональных элементов r_{ii} ($i > l$) матрицы R, а следовательно выражение $(E_2 - R'_2)^{-1}R'_1$ остается неизменным, хотя при изменении диагональных элементов R все элементы матриц R'_1 и R'_2 также изменяются.

Замечание. Предельная матрица R'^{∞} является собственным проектором лапласовской матрицы $(E - R')$ [20, 21]. Также этот проектор совпадает с нормированной матрицей максимальных исходящих лесов орграфа, полученного из исходного орграфа сети изменением направлений ребер [22]. Для вычисления собственного проектора существуют конечные алгоритмы. В работе [21] доказана теорема о том, что собственный проектор любой квадратной матрицы A может быть вычислен с помощью аннулирующего многочлена для матрицы A^k, где $k \geqslant \nu$ ($\nu = \mathrm{ind}A$ — размер наибольшего блока нулевого собственного значения в жордановой форме для A). В нашем случае $A = (E - R')$ — лапласовская матрица, для которой всегда $\nu = 1$. Таким образом, предельная матрица R'^{∞} может быть найдена с помощью любого аннулирующего многочлена для лапласовской матрицы $(E - R')$.

3. УПРАВЛЕНИЕ В ПОГЛОЩАЮЩИХ СЕТЯХ

Предел степеней стохастической матрицы R' поглощающей сети с l стоками (формула (2)) имеет вид:

$$R'^{\infty} = \left(\begin{array}{c|c} E_1 & O_1 \\ \hline (E_2 - R'_2)^{-1}R'_1 & O_2 \end{array}\right).$$

Доказано (см. теорему 3), что предельное состояние зависит от начального при любом количестве ресурса в сети, если ранг матрицы $(E_2 - R'_2)^{-1}R'_1$ больше единицы. Помещая ресурс в разных пропорциях в вершины из переходной компоненты, можно получить разное распределение его по стокам.

Будем рассматривать задачу управления в поглощающих сетях, в которой переходные вершины являются управляющими, стоки — целевыми вершинами. Управление заключается в распределении ресурса по вершинам переходной компоненты. Управляющих воздействий в процессе функционирования сети не происходит: закон сохранения ресурса в сети не нарушается. Рассмотрим две различные задачи управления, которые назовем *прямой* и *обратной задачей*.

Прямая задача. При заданном количестве суммарного ресурса распределить его в начальном состоянии так, чтобы в предельном состоянии он оказался в стоках в нужной пропорции.

Обратная задача. При заданном желаемом количестве ресурса в одном или нескольких стоках в предельном состоянии определить начальное состояние, при котором для этого потребуется минимальное количество суммарного ресурса.

3.1. Прямая задача управления. Распределение фиксированного суммарного ресурса между стоками

Такая постановка задачи управления не всегда имеет точное решение, однако, зная матрицу R'^{∞} и используя свойство линейности оператора перехода в предельное состояние, можно задать начальное состояние, при котором решение будет иметь минимальное расстояние до целевого в евклидовом пространстве. Если целевое предельное состояние $Q^g = (q_1^g, ..., q_l^g, 0, ..., 0)$, то задача управления формулируется в виде задачи оптимизации:

$$\|Q^g - Q^*\|_2^2 = (q_1^g - q_l^g)^2 + ... + (q_l^g - q_l^*)^2 \to \min.$$

Матрица $(E_2 - R_2')^{-1} R_1'$, обладает тем свойством, что сумма элементов любой ее строки равна единице. Таким образом, ее можно назвать квазистохастической («квази» — поскольку в общем случае она не является квадратной).

Введем обозначения:

$$(E_2 - R_2')^{-1} R_1' = R'^{\infty}_{pass};$$

подвектор начального состояния с компонентами, соответствующими переходным вершинам, обозначим через $Q_{pass}(0)$, его длина равна $(n - l)$;

подвектор предельного состояния, содержащий компоненты стоковых вершин, обозначим через Q_s^*, его длина равна l.

Целевой вектор Q^g тоже редуцируем до l ненулевых компонент.

По условию $W = \text{const}$, следовательно, векторы $Q_{pass}(0)$, Q_s^* и Q^g можно записать в виде:

$$Q_{pass}(0) = (x_1 W, ..., x_{n-l} W),$$
$$x_i \geqslant 0, \quad i = 1, ..., n - l,$$

$$Q_s^* = (\beta_1 W, ..., \beta_l W), \quad \beta_i > 0, \quad i = 1, ..., l,$$

$$Q^g = (\gamma_1 W, ..., \gamma_l W), \quad \gamma_i > 0, \quad i = 1, ..., l.$$

Тогда справедливо равенство:

$$Q_s^* = Q_{pass}(0) R'^{\infty}_{pass}$$

или $(\beta_1 W, ..., \beta_l W) = (x_1 W, ..., x_{n-l} W) R'^{\infty}_{pass}$, отсюда $(\beta_1, ..., \beta_l) = (x_1, ..., x_{n-l}) R'^{\infty}_{pass}$; $\beta_i = \sum_{j=1}^{l} x_j (r'^{\infty}_{pass})_{ij}$.

Задача состоит в поиске такого вектора $(x_1, ..., x_{n-l})$, что значение $\|Q^g - Q^*\|_2^2$ минимально. Отсюда для фиксированного ресурса

$$\begin{cases} \|(\gamma_1, ..., \gamma_l) - (x_1, ..., x_{n-l}) R'^{\infty}_{pass}\|_2^2 \to \min, \\ \sum_{i=1}^{n-l} x_i = 1, \\ x_i \geq 0. \end{cases}$$

Здесь $\gamma_i > 0$, $i = 1, ..., l$; $\sum_{i=1}^{l} \gamma_i = 1$, $\gamma_1 : \gamma_2 : ... : \gamma_l$ — целевая пропорция распределения ресурса W в стоковых компонентах; $x_1 : x_2 : ... : x_{n-l}$ — искомая пропорция распределения ресурса W в переходных вершинах, $R'^{\infty}_{pass} = (E_2 - R_2')^{-1} R_1'$.

Поскольку целевая функция квадратична, а ограничения линейны, эта задача относится к задачам квадратичного программирования [23, 24]. Ее нужно решать, только если матрица R'^{∞}_{pass} имеет ранг, больший единицы. Если $\operatorname{rank} R'^{\infty}_{pass} = 1$, предельное состояние не зависит от начального, и управлять ресурсом нельзя.

Функция $f(x) = \|(\gamma_1, ..., \gamma_l) - (x_1, ..., x_{n-l}) R'^{\infty}_{pass}\|_2^2$ — выпукла.

Доказано, что для любых векторов x и y выполняется неравенство Йенсена:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Более того, оно обращается в равенство только при $x = y$. Это означает, что целевая функция строго выпукла. Ее локальный минимум на заданном множестве ограничений будет также глобальным минимумом.

Проблема минимизации выпуклой квадратичной функции без ограничений хорошо исследована. Такие задачи решаются методом наименьших квадратов. Если для квадратичной задачи задаются ограничения, в общем случае простых аналитических решений не существует [24].

Решая задачу с помощью обобщения метода множителей Лагранжа на случай неотрицательных переменных, получим функцию Лагранжа:

$$L(x_1, ..., x_{n-l}, \lambda) = \sum_{i=1}^{l}\left(\gamma_i - \sum_{j=1}^{n-l} r'^{\infty}_{ji} x_j\right)^2 + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n-l} x_i - 1\right).$$

Необходимые условия локального экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_k} = -2\sum_{i=1}^{l} r'^{\infty}_{ki}\left(\gamma_i - \sum_{j=1}^{n-l} x_j r'^{\infty}_{ji}\right) + \lambda = 0, \\ k = 1, ..., n-l; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{n-l} x_i - 1 = 0; \end{cases} \qquad (9)$$

$x_k \geqslant 0.$

Это система $n - l + 1$ линейных уравнений с $n - l + 1$ неизвестными.

Ограничение на неотрицательность переменных накладывает дополнительные условия на решение. Если неотрицательное решение системы (9) существует, из выпуклости функции следует, что оно является точкой глобального минимума целевой функции.

В общем случае существуют разнообразные численные методы для решения задачи наименьших квадратов с ограничениями-равенствами и неравенствами. Алгоритмы решения задачи наименьших квадратов с линейными ограничениями приведены в работе [25].

3.2. Обратная задача управления. Достижение заданного значения ресурса в одном или нескольких стоках при минимальном суммарном ресурсе

Рассмотрим случай, когда управление происходит в одном из нескольких стоков. В этом случае задача всегда имеет точное решение. Для того чтобы некоторая стоковая вершина v_i получила нужное количество ресурса при минимальном суммарном ресурсе, нужно выбрать переходную вершину v_j такую, что из всех стоков максимум ресурса она отдает в вершину v_i, т. е. для нее должно выполниться условие $r'^{\infty}_{ji} = \max\limits_k r'^{\infty}_{ki}$.

Пусть q_i^* — количество ресурса, которое должен получить сток с номером i в предельном состоянии. Тогда общее количество ресурса, которое в начальном состоянии должно находиться в переходной вершине v_j, будет равно q_i^* / r'^{∞}_{ji}. Поскольку весь ресурс в начальном состоянии должен быть сосредоточен в вершине v_j, выполняется равенство $W = q_i^* / r'^{\infty}_{ji}$.

Это значение суммарного ресурса минимально для заданного значения q_i^*.

Если в предельном состоянии ресурс должен находиться в двух и более стоках, эта задача уже может не иметь точного решения.

Опишем метод нахождения минимального значения суммарного ресурса W, при котором в каждый сток в предельном состоянии будет иметь ресурс, не меньший заданной величины.

Если $q^*_{i_1}$, ..., $q^*_{i_k}$ — ресурсы, которые должны получить стоки с номерами i_1, ..., i_k (i_1, ..., $i_k \leqslant l$), то суммарный необходимый ресурс обозначим через $W_{\min}$: $W_{\min} = q^*_{i_1} + ... + q^*_{i_k}$. Вектор предельного состояния Q^g тогда можно записать как $Q^g = (\gamma_1 W_{\min}, ..., \gamma_l W_{\min})$, где $\gamma_i = q_i^* / W_{\min}$. Если для некоторого стока с номером i условие на ресурс отсутствует, считаем, что $q_i^* = 0$, и соответствующая компонента Q^g также равна нулю.

Поиск начального состояния для получения наилучшего приближения вектора Q^g соответствует прямой задаче из п. 3.1. Решив ее и найдя вектор начального состояния $Q_{pass}(0)$, для которого вектор предельного состояния Q_s^* будет иметь минимальное расстояние от вектора Q^g, оценим разность $\Delta Q = Q^g - Q_s^*$.

Нас будут интересовать только те компоненты вектора ΔQ, которые соответствуют индексам i_1, ..., i_k. Все они неотрицательны. Пусть $\Delta q_m = \max\limits_j \Delta q_j > 0$, $j \in \{i_1, ..., i_k\}$. Тогда новое значение суммарного ресурса зададим как $W = W_{\min} + k\Delta q_m$, где k — число стоков, в которых ресурс в предельном состоянии должен быть отличен от нуля. Значение W гарантирует, что одна компонента нового вектора предельного состояния будет равна соответствующей компоненте целевого вектора $Q^g = (\gamma_1 W_{\min}, ..., \gamma_l W_{\min})$, а остальные будут не меньше. По построению значение W минимально.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрены ресурсные сети, содержащие стоковые вершины, т. е. вершины без исходящих ребер. Класс таких сетей назван поглощающими ресурсными сетями. Поглощающие сети состоят из переходной и стоковой компоненты; каждый сток является эргодическим множеством, состоящим из одной вершины. Если поглощающая сеть имеет более одного стока и матрица перехода R'^{∞}_{pass} имеет ранг, больший единицы, в ней можно поставить задачу управления. Описаны постановки двух задач управления, названные прямой и обратной задачей. Решение этих задач зависит от свойств матрицы R'^{∞}_{pass} и соотношения n и l, т. е. от числа стоков и нестоковых вершин в сети.

Задачи управления могут быть поставлены сходным образом и для регулярных несимметричных сетей с несколькими аттракторами [4, 5]. Но их решение более сложно. Распределение ресурса между аттракторами происходит по закону индуцированной поглощающей сети (в которой элиминированы все ребра, исходящие из аттракторов). Ресурс распределяется в пропорции, заданной индуцированной матрицей перехода R'^{∞}_{pass}. Однако точно эта пропорция соблюдается лишь для ряда начальных состояний. При произвольном начальном состоянии в несимметричной сети существует так называемая «поправка на регулярность», которая позволяет находить предельное значение ресурса в аттракторах аналитически лишь с некоторой погрешностью, которая может быть оценена сверху.

При ресурсе, большем некоторого значения, поправка в аттракторах стабилизируется. Таким образом, при увеличении суммарного ресурса относительная погрешность аналитического вычисления предельного значения ресурса в аттракторах уменьшается.

Автор выражает глубокую благодарность д-ру физ.-мат. наук Р.П. Агаеву за конструктивные замечания и полезные обсуждения в ходе подготовки статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кузнецов О.П.* Однородные ресурсные сети. I. Полные графы // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 11. — С. 136—147.
2. *Кузнецов О.П., Жилякова Л.Ю.* Двусторонние ресурсные сети — новая потоковая модель // Доклады Академии наук, 2010. — Т. 433, № 5. — С. 1—4.
3. *Жилякова Л.Ю.* Несимметричные ресурсные сети. I. Процессы стабилизации при малых ресурсах // Автоматика и телемеханика. — 2011. — № 4. — С. 133—143.
4. *Жилякова Л.Ю.* Несимметричные ресурсные сети. III. Потоки при больших ресурсах и их стабилизация // Автоматика и телемеханика. — 2012. — № 6. — С. 103—118.
5. *Жилякова Л.Ю.* Исследование эйлеровых ресурсных сетей // Управление большими системами. — 2012. — Вып. 40. — С. 28—50.
6. *Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р.* Потоки в сетях. — М.: Мир, 1996. — 334 с.
7. *Ahuja R.K., Magnanti T.L., Orlin J.B.* Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications. — New Jersey: Prentice Hall, 1993. — 864 p.
8. *Lovasz L., Winkler P.* Mixing of Random Walks and Other Diffusions on a Graph // Surveys in Combinatorics / Ed. P. Rowlinson. — London Math. Soc. Lecture Notes Series 218, Cambridge Univ. Press, 1995. — P. 119—154.
9. *Blanchard Ph., Volchenkov D.* Random Walks and Diffusions on Graphs and Databases: An Introduction (Springer Series in Synergetics). — Berlin—Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
10. *Björner A., Lovasz, L.* Chip-firing game on directed graphs // J. Algebraic Combinatorics. — 1992. — N 1. — P. 305—328.
11. *Prisner E.* Parallel Chip Firing on Digraphs // Complex Systems. — 1994. — N 8. — P. 367—383.
12. *Ivashkevich E.V., Priezzhev V.B.* Introduction to the sandpile model // Physica A 254. — 1998. — P. 97—116.
13. *Speer, E.R.* Asymmetric abelian sandpile models // J. of Statistical Physics. — April, 1993. — Vol. 71, iss. 1-2. — P. 61—74.
14. *Bak P.* How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality. — N.-Y.: Copernicus, 1996.
15. *Bak P., Tang C., and Wiesenfeld K.* Self-organized criticality // Physical Review A 38. — 1988. — P. 364—374.
16. *Dhar D.* Self-organized critical state of sandpile automaton models // Physical Review Letters 64. — 1990. — P. 1613—1616.
17. *Кемени Дж., Снелл Дж.* Конечные цепи Маркова. — М.: Наука, 1970. — 272 с.
18. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. — М.: Физматлит, 2004. — 560 с.
19. *Seneta E.* Non-negative Matrices and Markov Chains. — N.-Y.: Springer-Verlag, 2006. — 279 p.
20. *Rothblum U.G.* Computation of the eigenprojection of a nonnegative matrix at its spectral radius // Stochastic Systems: Modeling, Identification and Optimization II, ser. Mathematical Programming Study / R.J.-B. Wets, ed. — 1976. — Vol. 6. — P. 188—201.
21. *Агаев Р.П., Чеботарев П.Ю.* О нахождении собственного проектора и компонент матрицы // Автоматика и телемеханика. — 2002. — № 10. — С. 3—12.
22. *Чеботарев П.Ю., Агаев Р.П.* Об асимптотике в моделях консенсуса. — URL: http://ubs.mtas.ru/bitrix/components/bitrix/forum.interface/show_file.php?fid=7640 (дата обращения 4.04.2013).
23. *Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И.* Высшая математика. Математическое программирование. — Минск: Вышэйшая школа, 1994. — 286 с.
24. *Boyd, S., Vandenberghe, L.* Convex Optimization. — Cambridge: Cambridge University Press, 2004. — 727 p.
25. *Лоусон Ч., Хенсон Р.* Численное решение задач метода наименьших квадратов. — М.: Наука, 1986. — 232 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.С. Манделем.

Людмила Юрьевна Жилякова — канд. физ.-мат. наук,
ст. науч. сотрудник, Институт проблем управления
им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва,
☎ (495) 334-76-39, ✉ zhilyakova.ludmila@gmail.com.