



# РЕГУЛИРОВАНИЕ ОЧЕРЕДИ В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ОБСЛУЖИВАЮЩИХ КАНАЛОВ

А.В. Жилияк, В.А. Кашеев, А.В. Крянев

Приведены выражения для оценки среднего времени ожидания обслуживания в очереди. Получены простые соотношения, позволяющие определить необходимое число каналов обслуживания в системе массового обслуживания при заданных ограничениях на длину очереди. Отмечено, что полученные результаты могут быть использованы для оптимизации работы крупных call-центров и других систем массового обслуживания с большим числом каналов.

**Ключевые слова:** система массового обслуживания, call-центр, время ожидания в очереди, классификация Кендалла.

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время широкое распространение получили, так называемые, центры обработки вызовов или call-центры, которые принимают и обрабатывают звонки (заявки) потенциальных клиентов различных компаний. Спектр компаний, использующих в своей работе call-центры, достаточно широк — это банки, сети туристических агентств, риэлтерские компании, крупные магазины и др. Не будет преувеличением сказать, что call-центр является «лицом компании», поскольку по качеству его работы можно сделать выводы о том, насколько корректно и эффективно компания будет обслуживать заявки клиента в дальнейшем. Рост клиентской базы компании приводит к необходимости расширять возможности call-центра, что вместе с решением вопросов технической оснащенности приводит к необходимости увеличения числа каналов обслуживания. Поэтому крупные компании пользуются услугами собственных или профессиональных call-центров с большим числом каналов обслуживания. Так, call-центр «ВТБ-24» имеет около 200 операторских мест [1], call-центр компании «ИНФОТЕЛЛ» — 500 мест [2], аутсорсинговые call-центры FORTAX и Wilsteam — до 137 и 400 мест соответственно [3, 4].

Очевидно, что в соответствии со своей основной задачей — удовлетворением информационных заявок клиентов в реальном времени — call-центр

служит типичным примером системы массового обслуживания (СМО), и для анализа эффективности его работы можно воспользоваться математическим аппаратом теории массового обслуживания [5].

## 1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СМО

Один из основных параметров СМО — среднее время ожидания обслуживания  $\bar{T}_{line}$  или, другими словами, среднее время нахождения заявки на обслуживание в очереди.

Рассмотрим простейшую СМО — систему, в которой поток поступления заявок и поток их обслуживания носят марковский характер, число обслуживающих каналов равно  $n$ , время нахождения заявки в очереди не ограничено. Такая СМО в классификации Кендалла [5] обозначается как  $M/M/n/\infty$  или  $M/M/n$ .

В том случае, если поток поступающих заявок в систему и поток их обслуживания не меняются со временем, выражение для среднего числа заявок, находящихся в очереди в СМО типа  $M/M/n$ , имеет вид [6]

$$\bar{N}_{line} = \frac{\Psi^{n+1}}{(1-\Psi)^2} \frac{1}{U},$$

$$U = \frac{n!}{n^n} \sum_{k=0}^n \frac{(n\Psi)^k}{k!} + \frac{\Psi^{n+1}}{(1-\Psi)}, \quad (1)$$

где  $\Psi$  — безразмерная величина, связывающая параметры СМО:

$$\Psi = \lambda / (n\mu), \quad 0 \leq \Psi < 1. \quad (2)$$

Здесь  $\lambda$  — интенсивность потока заявок, поступающих в систему, или среднее число заявок, поступающих в систему в единицу времени;  $\mu$  — интенсивность обслуживания заявок каждым каналом (предполагается, что для всех каналов  $i = 1, \dots, n$  значения  $\mu_i$  одинаковы, т. е.  $\mu = \mu_i = \text{const}$ ).

Среднее время ожидания заявки в очереди  $\bar{T}_{line}$  определяется через среднее число заявок  $\bar{N}_{line}$  как

$$\bar{T}_{line} = \bar{N}_{line} / \lambda. \quad (3)$$

Из выражений (1)—(3) следует, что в СМО типа  $M/M/n$  существует некоторое минимально возможное число каналов обслуживания. Введем параметр

$$n^* = \lambda / \mu. \quad (4)$$

При  $n > n^*$  величина  $\bar{T}_{line}$  монотонно убывает с увеличением  $n$ . Как известно [5], при  $n \leq n^*$  стационарного режима в рамках модели СМО (1)—(3) не существует, и в системе происходит неконтролируемый рост очереди заявок на обслуживание, который, в конечном счете, приводит к отказу от обслуживания части заявок.

## 2. АНАЛИЗ СМО С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ОБСЛУЖИВАЮЩИХ КАНАЛОВ

Применим математическую модель (1)—(3) для анализа СМО с большим числом обслуживающих каналов, т. е. для случая  $n > n^* \gg 1$  (см. формулу (4)).

Заметим, что использовать выражение для  $\bar{N}_{line}$  в форме (1) для расчетов при  $n \gg 1$  затруднительно из-за резкой зависимости от  $n$  числителя и знаменателя выражения (1). Преобразуем его к более удобному виду.

Выразим первое слагаемое в формуле для  $U(1)$  через  $e^{n\Psi}$ :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(n\Psi)^k}{k!} = e^{n\Psi} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(n\Psi)^k}{k!},$$

а второе слагаемое представим как сумму бесконечной геометрической прогрессии

$$\frac{\Psi^{n+1}}{(1-\Psi)} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \Psi^k,$$

и перепишем выражение для  $U(1)$  в виде

$$U = \frac{n!}{n^n} e^{n\Psi} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[ \Psi^k - \frac{n!(n\Psi)^k}{n^n k!} \right] = \\ = \frac{n!}{n^n} e^{n\Psi} + \Psi^n \sum_{k=1}^{\infty} \Psi^k \left[ 1 - \prod_{i=1}^k \frac{n}{n+i} \right]. \quad (5)$$

Далее, первое слагаемое в соотношении (5) преобразуем с помощью формулы Стирлинга:

$$\frac{n!}{n^n} e^{n\Psi} \approx \sqrt{2\pi n} e^{n(\Psi-1)}, \quad (6)$$

а для преобразования множителя во втором слагаемом соотношения (5)

$$\varphi_k(k) = 1 - \prod_{i=1}^k \frac{n}{n+i} \quad (7)$$

воспользуемся выражениями, аппроксимирующими функцию (7) в различных диапазонах значений  $k$ :

$$\varphi_k(k) \approx \begin{cases} k(k+1)/N^2, & k \ll N/2; \\ (6k/N-1)/8, & N/2 < k \ll 3N/2; \\ 1, & k > 3N/2, \end{cases} \quad (8)$$

где  $N = \sqrt{2n}$ .

На рисунке представлены графики функции  $\varphi_k(k)$ , рассчитанной по точной (7) и приближенной (8) формулам, при различных значениях  $n$  ( $n \gg 1$ ).

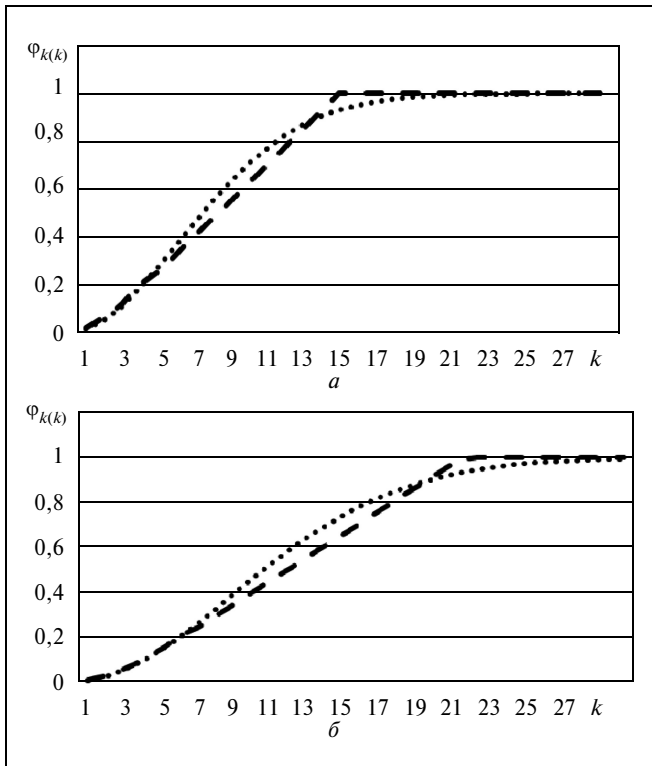
Теперь второе слагаемое выражения (5) можно представить в следующем виде

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi^k \left( 1 - \prod_{i=1}^k \frac{n}{n+i} \right) \approx S_1 + S_2 + S_3, \quad (9)$$

где

$$S_1 = \sum_{k=1}^{[N/2]} \Psi^k \frac{k(k+1)}{N^2}, \\ S_2 = \sum_{k=[N/2]+1}^{[3N/2]} \frac{\Psi^k}{8} \left( \frac{6k}{N} - 1 \right), \\ S_3 = \sum_{k=[3N/2]+1}^{\infty} \Psi^k. \quad (10)$$

Запись [...] означает целую часть выражения, заключенного в скобки.



Графики функции  $\varphi_k(k)$ , рассчитанной по точной (7) и приближенной (8) формулам при различных значениях  $n$ : а —  $n = 50$ ; б —  $n = 100$ ; ..... — точная; ---- — приближенная

Вычислим величины  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  (10), учитывая, что  $S_1$  и  $S_2$  могут быть выражены через производные от конечных сумм:

$$S_1 = \frac{\Psi}{N^2} \frac{d^2}{d\Psi^2} \left( \Psi \sum_{k=1}^{N/2} \Psi^k \right) = \frac{\Psi}{N^2} \frac{d^2}{d\Psi^2} \left( \frac{\Psi^2(1-\Psi^{N/2})}{1-\Psi} \right) = \frac{\Psi}{N(1-\Psi^2)} \times \left[ \frac{2(1-\Psi^{N/2})}{(1-\Psi)N} - \frac{\Psi^{N/2}}{2} \left( 4 - 2\Psi + \left( \frac{N}{2} - 1 \right) (1-\Psi) \right) \right], \quad (11)$$

$$S_2 = \sum_{k=N/2+1}^{3N/2} \left[ \frac{3}{4N} \frac{d}{d\Psi} \Psi^k - \frac{\Psi^k}{8} \right] = \frac{3}{4N} \frac{\Psi^{N/2+1}}{(1-\Psi)^2} \times \left\{ 1 + \frac{N}{3}(1-\Psi) - \Psi^N \left[ 1 + \frac{4N}{3}(1-\Psi) \right] \right\}, \quad (12)$$

а  $S_3$  является суммой бесконечной геометрической прогрессии

$$S_3 = \frac{\Psi^{3N/2+1}}{1-\Psi}. \quad (13)$$

Учитывая результаты вычислений (11)–(13), выражение (9) можем записать в виде

$$S \approx \frac{\Psi}{(1-\Psi)^2 N} \times \left[ \frac{2(1-\Psi^{N/2})}{N(1-\Psi)} - \Psi^{N/2} \frac{1}{4} (1 + 2(1-\Psi) + 3\Psi^N) \right].$$

Подставив это выражение в формулу (5), получим следующий результат для среднего числа заявок (1), находящихся в очереди на обслуживание:

$$\bar{N}_{line} \approx \frac{\Psi}{(1-\Psi)^2} \times \left\{ \sqrt{\pi} N \Psi^{-N^2/2} \exp \left[ -\frac{N^2}{2} (1-\Psi) \right] + \frac{\Psi}{(1-\Psi)^2 N} \left[ \frac{2(1-\Psi^{N/2})}{N(1-\Psi)} - \Psi^{N/2} \left[ 1 + \frac{1-\Psi}{2} - \frac{3}{4} (1-\Psi^N) \right] \right] \right\}^{-1}. \quad (14)$$

Введя безразмерный параметр

$$\delta_n = 1 - n^*/n = 1 - \Psi, \quad 1 > \delta_n > 0, \quad (15)$$

перепишем выражение (14) в виде

$$\bar{N}_{line} \approx \frac{1}{\delta_n} \times \left\{ \sqrt{\pi} \frac{N\delta_n}{1-\delta_n} \exp \left\{ -\frac{N^2}{2} [\delta_n + \ln(1-\delta_n)] \right\} + \frac{1}{\delta_n N} \left[ \frac{2(1-(1-\delta_n)^{N/2})}{N\delta_n} - (1-\delta_n)^{N/2} \frac{1}{4} [1 + 2\delta_n + 3(1-\delta_n)^N] \right] \right\}^{-1}. \quad (16)$$

### 3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СМО С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ КАНАЛОВ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Параметр (15) убывает при приближении  $n$  к  $n^*$ , и при  $n \approx n^*$  (4) его значение удовлетворяет условию  $\delta_n \ll 1$  (напомним, что мы анализируем случай  $n > n^* \gg 1$ ). Соответственно, с уменьшением  $\delta_n$  число заявок  $\bar{N}_{line}$  в очереди монотонно возрастает. Эффективный рост числа заявок наблюдается при  $\delta_n N < 1$ . Упростим выражение (16) для случая

$\delta_n N < 1$ , имея в виду, что при этом  $\delta_n \ll 1$ . Раскладывая выражение (16) в ряд по степеням  $\delta_n$  и пренебрегая малыми поправками, получим

$$\bar{N}_{line} \approx \frac{1}{\delta_n} \times \left\{ 1 + N\delta_n \left[ \sqrt{\pi} \left( \frac{\exp(N^2\delta_n^2/4)}{1-\delta_n} - 1 \right) + 1 + \frac{2}{5} N\delta_n \right] \right\}^{-1}, \quad \delta_n N < 1. \quad (17)$$

Численные расчеты показали, что при  $n > n^* \gg 1$  значение  $\bar{N}_{line}$ , рассчитанное по формуле (17), отличается от точного значения (1) не более, чем на 3 % при условии  $\delta_n N < 2$ . Как было отмечено, именно случай малых значений  $\delta_n$  интересен в смысле формирования очереди, так как при  $\delta_n N > 1$  очередь в СМО с большим числом каналов обслуживания практически отсутствует.

Введем безразмерное среднее время  $\bar{t}_{line}$  ожидания заявки на обслуживание в очереди [2]. Для этого значение  $\bar{T}_{line}$  (3) разделим на среднее время обслуживания одной заявки  $\bar{T}_S = 1/\mu$ . Тогда

$$\bar{t}_{line} = \bar{T}_{line} / \bar{T}_S = \mu \bar{N}_{line} / \lambda = \bar{N}_{line} / n^*. \quad (18)$$

Учитывая выражение (17),

$$\bar{t}_{line} \approx \frac{1}{n^* \delta_n} \times \left\{ 1 + N\delta_n \left[ \sqrt{\pi} \left( \frac{\exp(N^2\delta_n^2/4)}{1-\delta_n} - 1 \right) + 1 + \frac{2}{5} N\delta_n \right] \right\}^{-1}, \quad \delta_n N < 1. \quad (19)$$

Зададим ограничение  $T^*$  на среднюю длину очереди в СМО с  $n > n^* \gg 1$ :

$$\bar{T}_{line} < T^*. \quad (20)$$

Для безразмерного времени (18) ограничение (20) выглядит как

$$\bar{t}_{line} < \Theta, \quad \Theta = T^* \mu. \quad (21)$$

Оценим число каналов обслуживания  $m$ , которое должно быть в СМО ( $m > n^* \gg 1$ ) при выполнении ограничений (20) и (21) на длину очереди. Для этого необходимо найти зависимость  $\delta_m = 1 - m/n^*$  от  $\Theta$ .

Решая уравнение (19) методом последовательных приближений, при  $\delta_m \ll 1$  получим

$$\delta_m \approx \frac{1}{\sqrt{2n^*}} \frac{\sqrt{4x\sqrt{(1+x)}+1}-1}{2\sqrt{(1+x)}}, \quad (22)$$

где  $x = \sqrt{\frac{2}{n^*}} \frac{1}{\Theta}$ , и, соответственно, для числа обслуживающих каналов  $m$  можем записать

$$m \geq n^*/(1 - \delta_m). \quad (23)$$

При  $\Theta > 1$  выражение (23) упрощается:

$$m \geq n^* + 1/\Theta. \quad (24)$$

Результат (23) говорит о том, что в СМО с  $n^* \gg 1$  ограничение на длину очереди  $\Theta > 1$  выполняется при любом числе каналов обслуживания, так как условие  $m > n^*$  — условие существования СМО типа  $M/M/m$  (1).

При  $\Theta \ll 1$  получим

$$\delta_m \approx \frac{1}{\sqrt{2n^*}} x^{1/4}.$$

Из условия  $\delta_n < 1$  определим предельное значение  $\Theta_{min}$ , при котором может использоваться оценка (23):  $\Theta_{min} \approx 1/(n^*)^{5/2}$ .

Очевидно, для СМО с  $n^* \gg 1$  ограничение на очередь  $T^* = \Theta_{min}/\mu$  никакого практического значения не имеет, так как при таких ограничениях среднее время ожидания в очереди на обслуживание можно считать равным нулю. Это означает, что соотношения (22) и (23) могут быть использованы для оценки необходимого числа каналов  $m$  обслуживания в СМО с  $n^* \gg 1$  для всего практически значимого диапазона ограничений на длину очереди.

В таблице представлены результаты расчетов безразмерного времени ожидания в очереди  $\bar{t}_{line}$ , проведенные с помощью формулы (19) при  $n^* = 100$  для различных значений  $n - n^*$ , а также значения  $m$  (23), рассчитанные для соответствующих значений  $\Theta = \bar{t}_{line}$  (19). Как видно из сравнения приведенных в таблице данных, оцененное по формуле (23) необходимое число каналов обслуживания  $m$  хорошо (в пределах 1,5 %) согласуется с реальным числом каналов обслуживания  $n$  для СМО с  $n > n^* \gg 1$  при условии  $\delta_n N < 2$ . В таблице дано также сопоставление результатов расчета безразмерной длины очереди по классической (1) и упрощенной (19)



**Зависимость безразмерного времени ожидания в очереди  $\bar{T}_{line}$  от числа каналов  $n$  при  $n^* = 100$ .**

**Сопоставление результатов расчета  $\bar{T}_{line}$  по классической (1) и упрощенной (19) формулам**

$n$	$n - n^*$	Параметр $\delta_n N$	$t_{line}$		$m$
			по формуле (1)	по формуле (2)	
101	1	0,141	0,879	0,876	101,00
102	2	0,280	0,386	0,383	102,01
103	3	0,418	0,225	0,222	103,03
104	4	0,555	0,147	0,145	104,06
105	5	0,690	0,103	0,100	105,10
106	6	0,824	0,074	0,072	106,15
107	7	0,957	0,055	0,053	107,21
108	8	1,089	0,041	0,039	108,29
109	9	1,219	0,031	0,030	109,39
110	10	1,348	0,024	0,023	110,52
111	11	1,477	0,018	0,018	111,67
112	12	1,604	0,014	0,014	112,86
113	13	1,729	0,011	0,011	114,10
114	14	1,854	0,008	0,008	115,40
115	15	1,978	0,006	0,007	116,78

формулам для СМО с большим числом обслуживающих каналов ( $n \gg 1$ ) при коэффициенте загрузки  $\psi$ , близком к единице.

#### 4. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Приведем пример оценки числа каналов обслуживания для СМО с  $n^* \gg 1$ .

Рассмотрим call-центр, в который поступает 100 телефонных звонков в минуту, время обслуживания одного звонка в среднем составляет 60 с, т. е. интенсивность потока заявок в систему  $\lambda = 100 \text{ мин}^{-1}$ , интенсивность обслуживания  $\mu = 1 \text{ мин}^{-1}$ , и соответственно  $n^* = \lambda/\mu = 100$ . Очевидно, условие  $n^* \gg 1$  выполнено.

Введем ограничение на среднее время ожидания заявки в очереди  $T_1^* = 15 \text{ с}$ , т. е.  $\Theta_1 = 0,25$ . Подставляя эти значения в выражения (22) и (23), определим необходимое число каналов обслуживания:  $m_1 \geq 103$ .

При снижении времени ожидания в очереди в три раза  $T_2^* = 5 \text{ с}$  ( $\Theta_2 \approx 0,083$ ) из соотношения (24) определим:  $m_2 \geq 106$ .

Дальнейшее сокращение времени ожидания в очереди, например, до  $T_3^* = 2 \text{ с}$  ( $\Theta_2 \approx 0,033$ ), приводит к увеличению требуемого числа каналов обслуживания до  $m_3 \geq 109$ .

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты анализа СМО с большим числом каналов обслуживания  $n \gg 1$  позволяют прогнозировать эффективность работы СМО с помощью оценки среднего времени ожидания обслуживания заявок, а также оперативно регулировать параметры СМО (время обработки одной заявки, число каналов обслуживания) для достижения необходимых временных показателей обслуживания клиентов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сошина В. Call-центр ВТБ 24: время ожидания — 30 секунд // Банковское обозрение. — 2008. — № 8. — С. 110.
2. URL: <http://infotell.ru/press-centr/305--lr> (дата обращения: апрель 2012 г.).
3. URL: <http://www.fortax.ru/about/history.html> (дата обращения: апрель 2012 г.).
4. URL: <http://www.wilstream.ru/about/> (дата обращения: апрель 2012 г.).
5. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. — М.: ЛКИ, 2011. — 402 с.
6. Крянев А.В., Жияк А.В. Методика нормирования численности расчетно-кассового персонала с использованием элементов теории массового обслуживания // Экономический анализ: теория и практика. — 2009. — № 20. — С. 44–47.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.С. Манделем.

**Жияк Анастасия Владимировна** — соискатель кандидатской степени, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», гл. специалист группы компенсаций и льгот, ОАО «Мосэнерго», г. Москва,  
☎ 8(495) 957-19-57 доб. 42-30, ✉ zhilyakav@mosenergo.ru,

**Кашеев Владимир Александрович** — канд. физ.-мат. наук, директор отделения, ОАО «Высотехнологический научно-исследовательский институт неорганических материалов им. академика А.А. Бочвара», г. Москва,  
✉ ppp@bochvar.ru,

**Крянев Александр Витальевич** — д-р физ.-мат. наук, профессор, Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», г. Москва,  
☎ (495) 323-90-72, ✉ avkryanev@mephi.ru.