УДК [514.8:004.93]:519.2

ДВА СПОСОБА ВЫЧИСЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ РАСПОЗНАВАНИЯ НАПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ НА ФОНЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОВОРОТОВ

А.А. Жарких, С.М. Бычкова

Рассмотренно случайное движение точки на плоскости. В каждый дискретный момент времени наблюдаемая точка и центр ее вращения с вероятностью p осуществляют параллельный перенос в одном из m эквидистантных по углу направлений и, одновременно, наблюдаемая точка осуществляет поворот относительно центра на случайный угол. Обосновано решающее правило для определения направления переноса. Приведены два способа вычисления вероятностей распознавания направления переноса точки. В соответствии с одним из них используются условные плотности распределения вероятностей выборочных средних координат наблюдаемой точки, другой способ основан на усреднении индикаторной функции по всем случайным параметрам задачи.

Ключевые слова: случайное движение, распознавание образов, проверка статистических гипотез, вероятность распознавания.

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы — вывод точных формул для вычисления вероятностей правильного распознавания направления переноса точки на плоскости на фоне случайных поворотов.

Заметим, что под точкой можно понимать любой объект, в том числе и объекты живой природы. Такое понимание возможно, поскольку исследуемому объекту можно поставить в соответствие один признак — геометрический центр масс.

В статье решается задача распознавания направления переноса точки на плоскости, когда помехой движению служит поворот на случайный угол. Похожие модели движения существуют в механике, биологии.

Примером из механики может служить механическое движение твердого объекта, снабженного источником энергии, в газовой или жидкой среде.

Пример из биологии — это движение нематод (круглые черви), бабочек, которые чередуют две тактики движения, а именно, движение в выбранном направлении и случайные повороты, приводящие к выбору нового направления [1]. Движение бактерий может быть описано длинными прямыми смещениями, разделенными периодами очень коротких случайных поворотов [2]. Таким образом, живые системы обладают механизмом управления для поддержания своей жизнеспособности [3].

Случайные блуждания можно рассматривать как модели движения точки на плоскости. Задача о случайных блужданиях возникла при изучении броуновского движения. Обычно исследуется два основных вида этой задачи — это случайные поступательные блуждания и случайные вращательные блуждания [4]. Формально задача о случайных блужданиях ставится следующим образом [5]: найти плотность вероятности того, что частица, испытав N прыжков в пространстве размерности G, окажется от места начала блужданий (в качестве которого можно взять начало координат) в интервале значений от R до $R + \Delta R$. Каждый i-й прыжок может быть произведен в интервал длин от r_i до $r_i + \Delta r_i$ с вероятностью $P(r_i)$. Все прыжки являются независимыми случайными величинам.

В работе [6] рассмотрено случайное движение на плоскости, которое описано формулами:

$$\begin{cases} x_n = l\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\varphi_k, \\ y_n = l\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\varphi_k, \end{cases}$$

где $\varphi_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$, угол a_i равномерно распределен в промежутке $(-\pi; \pi)$, l — длина одного шага движения. В работе [6] найдена плотность распределения вероятностей угла поворота случайного блуждания, которое начинается из начала координат и достигает точки с координатами (x_n, y_n) с общим углом поворота φ.

К. Пирсон поставил задачу о случайных блужданиях следующим образом [7]: найти вероятность нахождения человека (его можно принять за точку), который перемещается каждый раз на расстояние R по прямой с последующим поворотом на произвольный угол, на некотором расстоянии от точки начала движения.

Интересно, что в приведенных примерах движения механизмы управления осуществляют воздействие на систему, которое носит случайный характер, а именно, случайный поворот.

Для исследования систем при наличии случайных возмущений лучше применять методы, учитывающие статистическую природу воздействий [3]. Поэтому для распознавания направления переноса будем пользоваться методами статистической теории распознавания образов [8]. Статистическая теория распознавания применяется, когда признаки имеют вероятностный характер и алгоритмы распознавания можно построить на основе статистических решений.

Отметим, что задача проверки статистических гипотез является одной из задач, решаемых в теории автоматического управления. В процессе ее решения находятся значения некоторых параметров системы, затем в системе устанавливается режим ее слежения. В настоящей работе применялись методы теории проверки статистических гипотез для нахождения вероятности распознавания направления переноса точки.

Данная статья продолжает цикл работ [9—13].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В настоящей работе исследуется случайное движение точки на плоскости на фоне случайных поворотов. Движение осуществляется в дискретном времени. За один шаг движения точка и центр ее вращения перемещаются вдоль некоторого направления на величину S с вероятностью p либо с вероятностью $q = 1 - p$ не перемещаются. На завершающем этапе шага точка поворачивается относительно указанного центра на случайный угол, равномерно распределенный в полуинтервале $[0, 2\pi)$. Радиус поворота точки на каждом шаге равен R.

Для описания случайных переносов точки используется симметричная модель. Считается, что перенос точки осуществляется в одном из m направлений ($m \geqslant 2$) на плоскости, разделенных углами размером $2\pi/m$. Наблюдателю известны значение m и одно из направлений. Это позволяет ему определить все направления и выбрать систему координат, направление оси абсцисс которой совпадает с одним из них.

Предполагается, что точка двигалась до случайного момента начала наблюдений. Для удобства обозначим точку, с которой мы начали наблюдение, B_0. Центр вращения, относительно которого произошел поворот точки B_0 на случайный угол, обозначим $O(x_0, y_0)$. Движение точки можно описать следующими формулами:

$$\begin{cases} x_k = x_{B_0} + R\cos\alpha + m_k S\cos\beta_r + R\cos\varphi_k, \\ y_k = y_{B_0} + R\sin\alpha + m_k S\sin\beta_r + R\sin\varphi_k, \end{cases} \quad (1)$$

где (x_{B_0}, y_{B_0}) — координаты точки B_0, с которой мы начали наблюдение, $R = \text{const}$ — радиус вращения точки относительно центра, α — случайный угол, равномерно распределенный в полуинтервале $[0, 2\pi)$ (показывает возможные положения центра вращения начальной точки наблюдения B_0), m_k — дискретная случайная величина, показывающая число переносов, которые совершила точка за k шагов, $S = \text{const}$ — размер переноса, β_r — угол, задающий направление истинного параллельного переноса, φ_k — случайный суммарный угол поворота точки за k шагов движения, равномерно распределенный в полуинтервале $[0, 2\pi)$. Угол $\varphi_k = \left(\sum_{i=0}^{k} \psi_i\right) \text{mod}(2\pi)$. Угол ψ_i — это случайный угол поворота точки на i-м шаге движения. Он равномерно распределен в полуинтервале $[0, 2\pi)$. Применяя теорему о свертке распределений двух независимых случайных величин, правила выполнения действий по модулю 2π и метод математической индукции, можно показать, что угол φ_k также распределен равномерно в полуинтервале $[0, 2\pi)$.

2. ОПИСАНИЕ РЕШАЮЩИХ ПРАВИЛ

В начальный момент времени координаты центра вращения наблюдаемой точки точно определены. Однако наблюдателю они не известны, так как он измеряет координаты вращающейся точки. Указанное обстоятельство влияет на структуру решающего правила процедуры распознавания. Выборочные средние $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$ измеряемых координат точки асимптотически стремятся к выражениям, линейным по числу $n + 1$, где n — число шагов. Постоянные слагаемые в этих асимптотических формулах представляют собой координаты центра вращения в начальный момент наблюдения. Исходя из геометрии задачи, мы формируем из выборочных средних статистики средних $(\tilde{x}_{n,r},\ \tilde{y}_{n,r})$ с поправкой на движение:

$$\tilde{x}_{n,r} = \tilde{x}_n - pS\frac{n+1}{2}\cos\beta_r,$$

$$\tilde{x}_{n,r} = \tilde{y}_n - pS\frac{n+1}{2}\cos\beta_r,$$

где $\tilde{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k,\ \tilde{y}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k.$

Пара статистик $(\tilde{x}_{n,r},\ \tilde{y}_{n,r})$, соответствующих истинному направлению движения, асимптотически стремится к паре координат центра вращения (x_0, y_0) в начальный момент времени. Пары статистик $(\tilde{x}_{n,r},\ \tilde{y}_{n,r})$, не соответствующих истинному направлению, в асимптотике зависят линейно от $n+1$. Таким образом, если ввести евклидову норму $\rho_{n,r}$ для векторов с координатами $(\tilde{x}_{n,r},\ \tilde{y}_{n,r})$, то эта норма асимптотически достигает минимума на истинном направлении переноса. Поэтому на шаге наблюдения с номером n решающее правило для проверки гипотез о направлении переноса реализуется нахождением минимума:

$$l = \arg\min_{r=\overline{0,m-1}}(\rho_{n,r}), \qquad (2)$$

где l — номер направления, в пользу которого принимается решение, $\rho_{n,r} = \sqrt{(\tilde{x}_{n,r})^2 + (\tilde{y}_{n,r})^2}$.

Преобразуя неравенства, возникающие при решении задачи нахождения минимума (2), можно показать, что эта задача эквивалентна задаче нахождения максимума:

$$l = \arg\max_{r=\overline{0,m-1}}(\tilde{x}_n\cos\beta_r + \tilde{y}_n\sin\beta_r). \qquad (3)$$

Проведено компьютерное моделирование, подтверждающее корректную работу полученных решающих правил [14].

3. ВЫВОД УСЛОВНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВЫБОРОЧНЫХ СРЕДНИХ НАБЛЮДАЕМОЙ ТОЧКИ

На основе формулы движения (1) можно показать, что выборочные средние координат наблюдаемой точки имеют вид:

$$\begin{cases} \tilde{x}_n = R\cos\alpha + \dfrac{R}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\varphi_k + \dfrac{S}{n}\cos\beta_r\sum_{k=1}^{n} m_k, \\ \tilde{y}_n = R\sin\alpha + \dfrac{R}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\varphi_k + \dfrac{S}{n}\sin\beta_r\sum_{k=1}^{n} m_k. \end{cases} \qquad (4)$$

Заметим интересный факт. Ранее нами была упомянута модель движения Пирсона [7], которую можно представить формулами:

$$\begin{cases} x_k = x_{B_0} + \sum_{m=1}^{k} R\cos\varphi_m, \\ y_k = y_{B_0} + \sum_{m=1}^{k} R\sin\varphi_m, \end{cases}$$

где R — расстояние смещения по прямой в произвольном направлении за один шаг.

При построении решающего правила в работе используются выборочные средние координат наблюдаемой точки (4). Получается, что случайный перенос из точки со случайными координатами осуществляется на фоне случайного блуждания Пирсона, т. е. если представить точку, координаты которой меняются как выборочные средние координат наблюдаемой точки (4), то это движение в каждый дискретный момент времени можно представить в виде суммы случайного переноса из точки со случайными координатами и случайного блуждания Пирсона.

Решаемая задача о нахождении вероятности правильного распознавания направления переноса является задачей проверки статистических гипотез. Пусть H_r, $r = 0, ..., m-1$ представляет собой гипотезу, предполагающую, что движение осуществляется в направлении с номером r. Обозначим $P_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}(\tilde{x}_n,\ \tilde{y}_n|H_r)$ условную плотность распределения вероятностей выборочных средних координат наблюдаемой точки в предположении, что движение осуществлялось в направлении с номером r.

Утверждение 1. *Условная плотность распределения вероятностей $P_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}(\tilde{x}_n,\ \tilde{y}_n|H_r)$ выборочных средних координат наблюдаемой точки* (4) *определяется следующим выражением:*

$$P_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}(\tilde{x}_n,\ \tilde{y}_n|H_r) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} J_0(R\sqrt{u^2+w^2}) \times$$

$$\times\left(J_0\left(\frac{R}{n}\sqrt{u^2+w^2}\right)\right)^n \prod_{k=1}^{n}(pe^{(iS/n)(n-k+1)(u\cos\beta_r + w\sin\beta_r)} +$$

$$+ q)e^{-i(\tilde{x}_n u + \tilde{y}_n w)}dudw, \qquad (5)$$

где i — мнимая единица, $J_0(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Обоснование утверждения 1. Выборочные средние $\tilde{x}_n$ и $\tilde{y}_n$ представляют собой суммы независимых случайных величин одного из трех видов. Обозначим их следующим образом:

(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3). Найдем характеристические функции для каждой из этих двумерных случайных величин.

Найдем характеристическую функцию двумерной случайной величины ($x_1 = R\cos\alpha$, $y_1 = R\sin\alpha$). Плотность распределения вероятностей (X_1, Y_1) имеет вид:

$$P_{X_1Y_1}(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi R}\delta(\sqrt{x_1^2 + y_1^2} - R),$$

здесь и далее $\delta(\cdot)$ — дельта-функция Дирака.

Характеристическая функция двумерной случайной величины (X_1, Y_1) имеет вид:

$$\theta_{X_1Y_1}(u, w) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} P_{X_1Y_1}(x_1, y_1)e^{i(x_1u + y_1w)}dx_1dy_1 = $$

$$= J_0(R\sqrt{u^2 + w^2}).$$

Аналогично найдена характеристическая функция двумерной случайной величины ($x_2 = (R/n)\cos\varphi_k$, $y_2 = (R/n)\sin\varphi_k$):

$$\theta_{X_2Y_2}(u, w) = J_0\left(\frac{R}{n}\sqrt{u^2 + w^2}\right).$$

Тогда характеристическая функция пары случайных величин $\left(\frac{R}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\varphi_k, \frac{R}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\varphi_k\right)$ имеет вид:

$$(\theta_{X_2Y_2}(u, w))^n = \left(J_0\left(\frac{R}{n}\sqrt{u^2 + w^2}\right)\right)^n.$$

Найдем характеристическую функцию двумерной случайной величины ($x_3 = (S/n)m_k\cos\beta_r$, $y_3 = (S/n)m_k\sin\beta_r$). Здесь m_k — дискретная случайная величина, которую можно представить в виде $m_k = \mu_k + m_{k-1}$, где μ_k — дискретная случайная величина с рядом распределения, представленным в таблице.

Сумму дискретных случайных величин m_k можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{n} m_k = n\mu_1 + (n-1)\mu_2 + (n-2)\mu_3 + \ldots + \mu_n = $$

$$= \sum_{k=1}^{n}(n-k+1)\mu_k,$$

Ряд распределения случайной величины μ_k

μ_k	1	0
p_k	p	q

а двумерную случайную величину (X_3, Y_3) в виде

$$\begin{cases} x_3 = \frac{S}{n}(n-k+1)\mu_k\cos\beta_r, \\ y_3 = \frac{S}{n}(n-k+1)\mu_k\sin\beta_r. \end{cases}$$

Найдем совместную плотность распределения вероятностей случайных величин (X_3, Y_3):

$$P_{X_3Y_3}(x_3, y_3) = p\delta\left(x_3 - \frac{S}{n}(n-k+1)\cos\beta_r\right) \times$$

$$\times\ \delta\left(y_3 - \frac{S}{n}(n-k+1)\sin\beta_r\right) + q\delta(x_3)\delta(y_3).$$

Тогда характеристическая функция пары случайных величин (X_3, Y_3)

$$\theta_{X_3Y_3}(u, w) = pe^{(iS/n)(n-k+1)(u\cos\beta_r + w\sin\beta_r)} + q.$$

Следовательно, характеристическая функция пары случайных величин $\left(\frac{S}{n}\cos\beta_r\sum_{k=1}^{n} m_k, \frac{S}{n}\sin\beta_r\sum_{k=1}^{n} m_k\right)$ имеет вид:

$$\prod_{k=1}^{n}\theta_{X_3Y_3}(u, w) = \prod_{k=1}^{n}(pe^{(iS/n)(n-k+1)(u\cos\beta_r + w\sin\beta_r)} + q).$$

Тогда условные характеристические функции выборочных средних координат наблюдаемой точки $\theta_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}(u, w|H_r)$ будут иметь следующий вид:

$$\theta_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}(u, w|H_r) =$$

$$= J_0(R\sqrt{u^2 + w^2})\left(J_0\left(\frac{R}{n}\sqrt{u^2 + w^2}\right)\right)^n \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{n}(pe^{(iS/n)(n-k+1)(u\cos\beta_r + w\sin\beta_r)} + q). \quad (6)$$

Условные плотности распределения вероятностей $P_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n|H_r)$ примут вид (5).

4. ВЫВОД ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПРАВИЛЬНОГО РАСПОЗНАВАНИЯ НАПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УСЛОВНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Предположим, что истинный параллельный перенос соответствует направлению, задаваемому углом $\beta_0 = 0$. На основе элементарных тригонометрических преобразований в неравенствах, возникающих при решении задачи (3), можно показать, что условная вероятность правильного распознавания направления переноса соответствует попаданию $(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n)$ в сектор бесконечного радиуса с раствором угла $2\pi/m$, отсчитанного против часовой стрелки от угла $-\pi/m$. Непопадание в этот сектор соответствует ошибке, т. е. выбору неверного направления переноса. Если повернуть систему координат на угол $\beta_l = (2\pi l/m)$ против часовой стрелки, то направление $r = 0$ станет направлением l, и все номера направлений изменятся согласно циклической перестановке $r_1 = (l + r) \bmod(m)$. Вследствие изложенного можно считать, что перенос осуществляется по горизонтали вправо, т. е. $r = 0$, $\beta_r = 0$, и из задачи нахождения максимума (3) следует неравенство

$$\tilde{x}_n > \tilde{x}_n\cos\beta_r + \tilde{y}_n\sin\beta_r,\quad r = 1, ..., m - 1. \qquad (7)$$

Очевидно, что если неравенство (7) выполняется для случая $r = 1$ или $r = m - 1$, то оно будет выполняться для всех $r \neq 0$. Можно показать, что при переносе в положительном направлении оси x решение оптимизационной задачи (2) или (3) определяется попаданием в сектор бесконечного радиуса:

$$\begin{cases} -\tilde{x}_n\mathrm{tg}(\pi/m) < \tilde{y}_n < \tilde{x}_n\mathrm{tg}(\pi/m), \\ \tilde{x}_n > 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Вероятность попадания в сектор (8) равна условной вероятности правильного распознавания направления переноса с номером $r = 0$ за n шагов. С учетом симметрии, равна вероятности правильного распознавания направления параллельного переноса за n шагов. Тогда, согласно системе неравенств (8), зная условную плотность распределения вероятностей выборочных средних наблюдаемой точки (5), вероятность правильного распознавания направления переноса за n шагов:

$$P_{true}(n) = \begin{cases} \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\tilde{x}_n\mathrm{tg}(\pi/m)}^{\tilde{x}_n\mathrm{tg}(\pi/m)} P_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n|H_0)\,d\tilde{y}_n d\tilde{x}_n, & m > 2, \\ \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} P_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n|H_0)\,d\tilde{y}_n d\tilde{x}_n, & m = 2. \end{cases} \qquad (9)$$

Утверждение 2. *Пусть точка совершает движение, которое описывается формулами* (1), $m = 2$, *тогда вероятность правильного распознавания направления переноса точки за n шагов наблюдения на основе решающего правила* (2) *или* (3) *определяется выражением*:

$$P_{true}(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{iu}J_0(nu)(J_0(u))^n \times \prod_{k=1}^{n}(pe^{iuSk/R} + q)du, \qquad (10)$$

где i — мнимая единица, $J_0(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Обоснование утверждения 2. Согласно выражениям (5), (6) и (9) вероятность того, что решение принято в пользу истинного направления:

$$P_{true}(n) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dudw\theta_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}(u, w|H_0) \times \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(u\tilde{x}_n + w\tilde{y}_n)} + d\tilde{y}_n d\tilde{x}_n =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} dudw\theta_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}(u, w|H_0)\delta(w)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\sigma(\tilde{x}_n)e^{-iu\tilde{x}_n}d\tilde{x}_n =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\theta_{\tilde{X}_n\tilde{Y}_n}(u, w|H_0)\delta(w)\left(\pi\delta(u) + \frac{1}{iu}\right)dudw =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{iu}J_0(uR)\left(J_0\left(\frac{uR}{n}\right)\right)^n \times \prod_{k=1}^{n}(pe^{(iuS/n)(n-k+1)} + q)du,$$

здесь и далее $\sigma(\cdot)$ — функция Хэвисайда (единичного скачка).

В полученном интеграле сделаем замену $uR/n = u$ и изменим порядок суммирования по индексу k. В результате получим формулу (10) для вычисления вероятности правильного распознавания направления переноса точки на плоскости.

Утверждение 3. *Пусть точка совершает движение, которое описывается формулами* (1), $m > 2$, *тогда вероятность правильного распознавания направления переноса точки за n шагов наблюдения на основе решающего правила* (2) *или* (3) *определяется выражением*:

$$P_{true}(n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{iw}J_0(nw)(J_0(w))^n \times \prod_{k=1}^{n}(pe^{(iSk/R)w\sin(\pi/m)} + q)dw + \frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(wu + w^2\sin(\pi/m))^{-1}J_0(n\sqrt{u^2 + w^2\cos^2(\pi/m)})^n \times (J_0(\sqrt{u^2 + w^2\cos^2(\pi/m)})) \times \prod_{k=1}^{n}(pe^{(iSku/R)} + q)dudw, \qquad (11)$$

где i — мнимая единица, $J_0(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка.

Утверждение 3 обосновывается аналогично утверждению 2.

5. ВЫВОД ВЕРОЯТНОСТЕЙ РАСПОЗНАВАНИЯ НАПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА ПУТЕМ УСРЕДНЕНИЯ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЯМ ИСХОДНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ

Формулы для вычисления вероятностей правильного распознавания направления переноса путем усреднения по распределениям исходных случайных параметров движения выводятся в предположении, что истинное направление переноса соответствует направлению, задаваемому углом $\beta_0 = 0$.

Пусть M — множество точек плоскости, которое определяется системой неравенств (8). Введем индикаторную функцию

$$\chi(M) = \begin{cases} 1, (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \in M, \\ 0, (\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \notin M. \end{cases} \qquad (12)$$

Согласно выражениям (8) и (12) индикаторную функцию можно представить в виде

$$\chi(M) = \begin{cases} \sigma(\tilde{x}_n)[\sigma(\tilde{y}_n + \tilde{x}_n \mathrm{tg}(\pi/m)) - \sigma(\tilde{y}_n - \tilde{x}_n \mathrm{tg}(\pi/m))], \\ m \neq 2, \\ \sigma(\tilde{x}_n), m = 2. \end{cases} \qquad (13)$$

Если обозначить усреднение по системе двух случайных величин $\tilde{X}_n$, $\tilde{Y}_n$ чертой сверху, то вероятность правильного распознавания направления переноса

$$P_{true}(n) = \overline{\chi(M)}. \qquad (14)$$

Рассмотрим случай, когда точка движется в одном из двух направлений.

Применяя преобразование Фурье функции Хэвисайда к функции (13), преобразуем ее к виду

$$\chi(M) = \sigma(\tilde{x}_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\pi\delta(u) + \frac{1}{iu}\right) e^{i\tilde{x}_n u} du = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\tilde{x}_n u}}{iu} du.$$

Тогда, согласно формуле (14), вероятность правильного распознавания направления переноса

$$P_{true}(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\overline{e^{i\tilde{x}_n u}}}{iu} du. \qquad (15)$$

Усредним величину $\overline{e^{i\tilde{x}_n u}}$ по переменным α, φ_k и m_k. Тогда выражение (15) примет вид:

$$P_{true}(n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{iu} J_0(uR)\left(J_0\left(\frac{uR}{n}\right)\right)^n \times \prod_{k=1}^{n}(pe^{(iuS/n)(n-k+1)} + q)du.$$

В полученном интеграле сделаем замену $uR/n = u$ и изменим порядок суммирования по индексу k. В результате получим формулу (10) для вычисления вероятности правильного распознавания направления переноса точки на плоскости в случае движения в одном из двух направлений.

Аналогичным образом производились усреднения по распределениям исходных случайных параметров движения для случая, когда число направлений переноса $m > 2$. В силу ограничения по объему статьи, мы не приводим данный вывод. Результат, полученный данным способом, совпал с результатом, полученным с использованием вычисленных условных плотностей распределения вероятностей выборочных средних наблюдаемой точки. Таким образом, формула (11) получена также двумя способами.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные в работе математические обоснования позволяют сделать следующие выводы.

- Условная плотность распределения вероятностей выборочных средних координат наблюдаемой точки при условии, что перенос осуществляется в одном из m эквидистантных направлений, может быть представлена в виде двукратного несобственного интеграла первого рода от произведений $(n + 1)$-й функции Бесселя и некоторого сложного произведения n-комплекснозначных сомножителей.
- Вероятности правильного распознавания направления переноса, выведенные с использованием условных плотностей распределения вероятностей выборочных средних координат наблюдаемой точки, также представляются с помощью несобственных интегралов первого рода. Если число направлений равно двум, то выражение содержит однократный несобственный

интеграл первого рода. Если число направлений больше двух, то вероятность правильного распознавания представляется суммой однократного и двукратного несобственных интегралов первого рода.

- Выражения для вероятностей правильного распознавания направления переноса, полученные усреднением по случайным параметрам движения, совпадают с аналогичными выражениями, полученными с использованием условных плотностей распределения вероятностей. Это совпадение служит одним из доказательств адекватности применяемого математического аппарата. Однако для случая, когда число направлений больше двух, вывод, основанный на усреднении по распределениям исходных случайных параметров движения, оказывается более громоздким.

Чтобы изучить закономерности организации управления в сложных системах, необходимо исследовать некоторую последовательность моделей, на которых можно набрать опыт моделирования [15], а также для распознавания некоторых характеристик их поведения. Траектории движений, примеры которых были приведены во Введении, могут представлять собой случайные ломаные. Приобретенный нами опыт по распознаванию направления похожего движения точки на плоскости, когда направление движения не меняется, позволит нам в дальнейшем решать задачи по нахождению, например, момента времени, когда движущийся объект меняет направление движения.

Завершая работу отметим следующее. В рассмотренной математической модели траектория случайного движения определялась очень простыми соотношениями. Однако в процессе работы над задачей мы выяснили, что ее решение требует использования достаточно глубоких математических конструкций из работ [16, 17]. При вычислении вероятностей правильного распознавания направления переноса точки, путем усреднения по распределениям исходных параметров движения, мы использовали индикатор множества (характеристическую функцию множества) [16]. Для того чтобы избежать пересечения с понятием характеристическая функция распределения, мы называли индикатор множества *индикаторной функцией*, этот термин является приемлемым в данном контексте. При решении задачи мы использовали обобщенные функции, такие как дельта-функция Дирака и сигма-функция Хевисайда, а также преобразования Фурье этих функций. Необходимый математический аппарат для описания обобщенных функций одной и двух переменных мы заимствовали из работы [17].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мосалов О.П., Редько В.Г., Непомнящих В.А.* Модель поискового поведения анимата // Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН. — 2003. — № 19. — 15 с.
2. *Edward Alexander Codling.* Biased Random Walks in Biology, The University of Leeds, Department of Applied Mathematics. — 2003. — 339 p.
3. *Цыпкин Я.З.* Основы теории автоматических систем. — М.: Наука, 1977. — 559 с.
4. *Иванов Е.Н., Лавров И.В.* Еще о проблеме случайных блужданий // Химия и химическое производство. — 2007. — № 3 — С. 101—105.
5. *Видов П.В., Романовский М.Ю.* Аналитические представления негауссовых законов случайных блужданий // Тр. Ин-та общей физики им. А.М. Прохорова. — 2009. — Т. 65. — С. 3—19.
6. *Wiegel F.W.* Distribution of the angle of rotation for plane random walks // Physica, North Holland Physic Publishing Division. — 1984. — P. 211—219.
7. *Pearson K.* The problem of the random walk // Nature. — 1905. — Vol. 72. — P. 294—311.
8. *Фукунага К.* Введение в статистическую теорию распознавания образов: Пер. с англ. — М.: Наука, 1979. — 368 с.
9. *Бычкова С.М.* Вероятностные характеристики в задаче определения направления движения точки в одной модели случайного движения: Материалы междунар. молодежного науч. форума «Ломоносов — 2010». — М., 2010. — 1 эл. опт. диск (CD-ROM).
10. *Жарких А.А., Бычкова С.М.* Вероятности распознавания направления переноса в одной модели случайного движения точки на плоскости // Сб. докл. 8-й Междунар. конф. «Интеллектуализация обработки информации». — М., 2010. — С. 346—349.
11. *Жарких А.А., Бычкова С.М.* Распознавание направления случайного переноса точки на фоне случайных поворотов // Вестник МГТУ. Тр. Мурманского гос. техн. университета. — 2010. — Т. 13, № 4/2. — С. 1039—1043.
12. *Zharkikh A.A., Bychkova S.M.* Statistical Theory of Recognition of Direction of Random Shift of Point on a Plane // Proc. of the 10th Intern. Conf. on Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies (PRIA-10-2010). — St. Petersburg, 2010. — P. 131—134.
13. *Жарких А.А., Бычкова С.М.* Точные формулы для вычисления вероятностей распознавания направления переноса точки на плоскости на фоне случайных поворотов // Тр. IX междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'12. — М., 2012. — С. 1130—1139.
14. *Zharkikh A.A., Bychkova S.M.* Modeling of the recognition algorithm of direction of random shift of point on a plane on a random rotations background // Pattern Recognition and Information Processing (PRIP'2011): Proc. of the 11th Intern. Conf. /18—20 May 2011, Minsk, Republic of Belarus. — Minsk, 2011. — P. 43—47.
15. *Рапопорт А.Н.* Автоматные модели поисковой оптимизации и управления: автореф. дисс. д-ра физ.-мат. наук. — Киров: ВятГТУ, 2001.
16. *Ширяев А.Н.* Вероятность. — М.: Наука, 1989. — 574 с.
17. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции: Учебное пособие. — М.: Гос. издат. физ.-мат. лит., 1959. — 470 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Александр Александрович Жарких — канд. техн. наук, доцент, ✉ zharkikh090107@mail.ru,

Светлана Михайловна Бычкова — аспирант, ✉ LyasnikovaSM@yandex.ru,

Мурманский государственный технический университет.