УДК 629.7.036.54-63 DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2023.2.3

ТЕРМИНАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОДВИЖНЫМИ ОБЪЕКТАМИ В КЛАССЕ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ И КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В.К. Завадский, В.П. Иванов, Е.Б. Каблова, Л.Г. Кленовая, В.Ю. Рутковский

Аннотация. Сформулирована задача синтеза терминального управления с разделением координат состояния объекта на два типа: медленно меняющиеся координаты, участвующие в краевых условиях, и координаты контура стабилизации. Для построения управления введена прогнозирующая модель объекта. Получено дифференциальное уравнение для прогнозируемых невязок краевых условий. На его основе произведена дискретизация системы. Задача синтеза рассмотрена поэтапно для управления в классе кусочно-постоянных и кусочно-непрерывных функций. В качестве примера рассмотрена задача управления расходованием топлива ступени жидкостной ракеты-носителя. Актуальность расширения класса функций связана с возможностью учета дополнительных требований к процессу управления. При этом для выбора непрерывных функций на интервалах между разрывами управления используются локальные краевые условия, полученные на этапе синтеза терминального управления в классе кусочно-постоянных функций.

Ключевые слова: терминальное управление, управление с прогнозирующими моделями, управление расходованием топлива ракеты-носителя.

ВВЕДЕНИЕ

Задачи терминального управления возникают во многих областях техники. В ракетодинамике примерами таких задач являются выведение на околоземную орбиту, расходование топлива до его полной выработки из баков, сближение космических аппаратов и др. В указанных примерах задача управления заключается в приведении объекта в заданные конечные состояния при известных начальных условиях. Конечные условия могут определяться в виде значений координат состояния объекта, а также и более сложным образом, например, в виде функций от координат состояния.

Современная концепция терминального управления объектами ракетно-космической техники в наиболее полном объеме сформулирована в монографии [1]. Принципиальным элементом способа терминального управления является прогнозирование конечного состояния объекта в виде заданных краевых условий.

Методы прогнозирования в области ракетодинамики рассматривались уже в работах [2–4]. Применение современных методов управления с прогнозирующей моделью к нелинейным системам подробно рассматривается в монографии [5]. Общая идея метода состоит в том, что задается прогнозирующая модель объекта, для которой находится оптимальное управление в текущий и последующие моменты времени. При этом на реализацию идет только текущее управление, а в следующий момент времени процедура оптимизации повторяется. В публикации [6] для заданного управления в модели прогнозирования определяется производная прогнозируемых значений координат по времени. Методы синтеза алгоритмов управления с прогнозирующей моделью (англ. *Model Predictive Control*, MPC) развивались также в направлении применения оптимизации в реальном времени [7] и придания робастности и адаптивности замкнутой системе [8, 12]. Для снижения вычислительной нагрузки процедура прогнозирования производится для ограниченного числа моментов времени.

В приведенных выше задачах ракетодинамики терминальное управление формулируется как часть общей задачи управления объектом путем выделения в объекте сравнительно медленно протекающих физических процессов, определяющих движение к заданной цели. При этом общее управление декомпозируется на терминальное управление и задачу стабилизации объекта относительно движения к заданной цели. В качестве примера можно привести стабилизацию углового положения ракеты-носителя относительно программы угла тангажа при управлении выведением. Отметим, что управление непосредственно воздействует на ту динамическую часть объекта, которая относится к контуру стабилизации. Синтез терминального управления, как правило, рассматривается независимо от контура стабилизации. При этом координаты объекта, формируемые на выходе контура стабилизации, принимаются в качестве терминального управления.

В статье [9] задача синтеза терминального управления рассматривается при условии декомпозиции общей задачи с учетом формального описания динамики объекта, включая контур стабилизации. Суть такого подхода состоит не в том, чтобы учитывать погрешности работы этого контура. Целью такого рассмотрения является учет динамики переходных процессов реакции контура стабилизации на управляющее воздействие. В этом случае идея прогнозирования конечного состояния объекта реализуется для всего динамического тракта системы: от места непосредственного воздействия управления до значений невязок краевых условий. Описанный подход рассматривался в работах [9–11] при управлении в классе кусочно-постоянных функций. В хронике семинара [11, *c. 1138-1139*] упоминается о докладе Д.Д. Табалина «О терминальной задаче с прогнозированием невязок краевых условий». В данной статье решается задача синтеза управления в классе кусочно-непрерывных функций. В силу значительной связанности этой задачи с подходом, рассмотренным в статье [9], в настоящей работе приводятся основные результаты решения задачи синтеза в классе кусочно-постоянных функций. Актуальность расширения класса функций связана с возможностью учета дополнительных требований к процессу управления. При этом для выбора непрерывных функций на интервалах между разрывами управления используются локальные краевые условия, полученные на этапе синтеза терминального управления в классе кусочно-постоянных функций.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Для понимания содержания процессов управления в системе, решающей задачу приведения объекта в заданное конечное состояние, оказывается полезным выделение в описании объекта двух взаимосвязанных систем уравнений, различающихся динамикой переходных процессов.

Рассматривается динамическая система

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1(t),\, x_2(t),\, t),$$
$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(x_2(t),\, u(t),\, t), \qquad (1)$$
$$x(t_0) = x_0,$$

где $x_1 \in R^{n_1}$; $x_2 \in R^{n_2}$; $x = (x_1, x_2)$, $x_0 \in X_0 \subset R^{n_1+n_2}$; u – управление, $u \in U \subset R^m$; $t \in [t_0, T]$.

Здесь первая система уравнений для координат $x_1(t)$ описывает движение объекта к заданной цели. Объекты управления терминальных систем в части переходных процессов в заданное конечное состояние весьма инерционны (как правило, представляют собой интегрирующие звенья).

Управление этими процессами производится путем воздействия на другие координаты объекта $x_2(t)$ с быстро затухающей динамикой переходных процессов. Суть такого управления состоит в задании значений этих координат. Управление в традиционном понимании, а именно положение исполнительных органов (приводов, рулей и т. д.), заключается в стабилизации координат объекта относительно заданных значений. Работа контура стабилизации в замкнутом виде описывается системой уравнений для координат $x_2(t)$. Управление $u(t)$ в правой части этих уравнений представляет собой заданные значения, уставки для координат $x_2(t)$.

В качестве примера можно привести стабилизацию углового положения ракеты-носителя относительно программы угла тангажа при управлении выведением. Таким образом, терминальное управление непосредственно воздействует на ту динамическую часть объекта, которая относится к контуру стабилизации. В математических постановках задач оптимального управления синтез терминального управления, как правило, рассматривается независимо от контура стабилизации.

Здесь предполагается, что решение системы (1) для любых начальных условий существует и единственно.

Ставится задача терминального управления – перевода системы в состояние *x*, удовлетворяющее краевым (граничным) условиям ψ в момент времени *T*:

$$\psi(x_1):\psi_i(x_{1i}(T))=0,\ i\in L\subset\overline{1,\ell},$$

где ℓ – число краевых условий. Предполагается, что краевые условия накладываются только на координаты x_1, а граничные условия представляют собой вектор условий для отдельных x_{1i}. Функция ψ предполагается дифференцируемой. Отметим, что при формулировке некоторых задач терминального управления краевые условия могут накладываться на часть координат x_2.

Момент времени $T > t_0$ либо является фиксированным, либо определяется первым моментом выполнения p-го краевого условия $\psi_p(x_{1p}) = 0$.

Координаты x_2 объекта формируются на выходе стабилизирующего контура системы управления. В данном случае работа контура рассматривается только в части переходных процессов реакции на изменение управляющего воздействия. Предполагается, что переходный процесс завершается на интервале, существенно меньшем, чем интервал терминального управления. Ограничением общности является независимость динамики координат состояния x_2 от координат объекта x_1.

Рассмотрим систему (1) с прогнозирующей моделью

$$\frac{d\hat{x}_1}{d\tau}=f_1(\hat{x}_1(\tau),\,\hat{x}_2(\tau),\,\tau),\ \tau\in[t,\,T],$$
$$\frac{d\hat{x}_2}{d\tau}=0, \tag{2}$$
$$\hat{x}(t)=x(t).$$

Прогнозируемой невязкой краевых условий (в силу прогнозирующей модели (2)) будем называть

$$z(t)\equiv\psi(\hat{x}_1(T|t)),$$

где момент времени T вычисляется для системы (2) так же, как и для исходной системы (1), т. е. он либо фиксирован, либо определяется первым моментом выполнения краевого условия ψ_p.

Через $\hat{x}_1(T|t)$ обозначено значение вектора координат $\hat{x}_1(T)$ в силу системы уравнений (2), прогнозируемого в момент времени t.

В работе [9], с учетом того, что $z(t)$ является функцией $x(t)$, t, получено дифференциальное уравнение для невязки $z(t)$ следующего вида:

$$\frac{dz(t)}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial\hat{x}_1(T|t)}\left[\frac{\partial\hat{x}_1(T|t)}{\partial x_2(t)}f_2(x_2(t),\,u(t),t)+\frac{dT}{dt}f_1(\hat{x}_1(T|t),\,x_2(t),\,T)\right].$$

В дальнейшем будем полагать, что T = const. В этом случае получим:

$$\frac{dz(t)}{dt}=\frac{\partial\psi}{\partial\hat{x}_1(T|t)}\frac{\partial\hat{x}_1(T|t)}{\partial x_2(t)}f_2(x_2(t),\,u(t),\,t). \tag{3}$$

Введем обозначение dz/dx_2, под ним будем понимать матрицу, на которую в выражении для dz/dt домножается функция f_2. В данных обозначениях формула (3) примет вид

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t),\,t)\,f_2(x_2(t),\,u(t),\,t). \tag{4}$$

Будем решать задачу синтеза терминального управления объектом (1) при условии формирования управления с обратной связью как функции прогнозируемых невязок краевых условий, определяемых дифференциальным уравнением (3). Управление будем выбирать в классе кусочно-непрерывных функций.

Задачу синтеза будем решать в два этапа. Первоначально будем полагать, что управление выбирается в классе кусочно-постоянных функций. Из решения этой задачи синтеза формируются локальные краевые условия. Выполнение локальных краевых условий в совокупности обеспечивает решение исходной терминальной задачи. На следующем этапе расширим класс функций для выбора управления. Будем полагать, что на интервалах между разрывами управление является непрерывно изменяющейся функцией. Будем выбирать такое управление, с учетом локальных краевых условий, полученных при кусочно-постоянном управлении.

2. ФОРМИРОВАНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ В МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ РАЗРЫВА ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА В КЛАССЕ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $u(t)$ – кусочно-постоянная функция времени; t_j, j = 1, 2,…, k – 1, – моменты времени скачкообразного изменения функции $u(t)$, $t_k=T$. В этом случае может быть получено разностное уравнение для невязок $z(t_j)$ – аналог дифференциального уравнения (4). Воспользуемся результатами, полученными в работе [9].

Проинтегрируем уравнение (4) на малом интервале $[t_j;\,t_j+\delta t]$:

$$z(t_j+\delta t)=$$

$$=z(t_j)+\int\limits_{t_j}^{t_j+\delta t}\frac{\partial z}{\partial x_2}(x(\tau),\tau)f_2(x_2(\tau),u(\tau),\tau)d\tau=$$

$$=z(t_j)+\frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_j),t_j)\Delta x_2+\mathrm{o}(\delta t).$$

Здесь δt – интервал времени переходного процесса в объекте (1) по координате x_2 при скачкообразном изменении управляющего воздействия от величины $u(t_j)$ до величины $u(t_{j+1})$ в момент времени t_j. При $\tau\in[t_j+\delta t,\,t_{j+1}]$ $f_2(x_2(\tau),u(\tau),\tau)=0$.

При малых δt переходим к дискретной системе:

$$z(t_{j+1})=z(t_j)+\frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_j),t_j)\Delta x_2(t_j),\qquad j=0,1,2,\ldots,k-1,\; z(t_k)=z(T), \tag{5}$$

где

$$\Delta x_2(t_j)=\int\limits_{t_j}^{t_j+\delta t}f_2(x_2(\tau),u(\tau),\tau)d\tau.$$

Переформулируем исходную задачу терминального управления. Вместо нахождения управления $u(t)$ в классе кусочно-постоянных функций будем искать дискретную последовательность изменения приращения координаты $x_2(t)$ в моменты времени t_j, $j=0,1,2,\ldots,k-1$, т. е. $\Delta x_2(t_j)$.

Рассмотрим случай, когда отсутствуют ограничения на возможные значения Δx_2. Будем искать решение терминальной задачи

$$\{\Delta x_2(t_j)\}:z(t_k)=0. \tag{6}$$

Будем полагать, что в формуле (5) $\frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t_j),t_j)=\frac{\partial z}{\partial x_2}(t_j)$.

Задача (6) применительно к системе уравнений (5) решается путем обратного движения от момента t_{k-1}. Например, для момента t_{k-1} задается условие для однозначного выбора $\Delta x_2(t_{k-1})$ и одновременно формулируется граничное условие для всех управлений в моменты времени, предшествующие t_{k-1}. Условия формируются путем задания линейных операторов относительно невязок $z(t_k)$, $z(t_{k-1})$. Образующаяся в результате система уравнений относительно невязки $z(t_k)$ имеет единственное нулевое решение. При переходе к моменту t_{k-2} учитывается решение, полученное для $\Delta x_2(t_{k-1})$.

В итоге исходная задача управления (6) с условиями на правом конце траектории преобразуется в эквивалентную совокупность локальных задач управления для конечного числа дискретных моментов времени:

$$\begin{gathered}\{\Delta x_2(t_{j-1})\}:\\ \frac{\partial z^{\mathrm{T}}}{\partial x_2}(t_{j-1})K(t_j)z(t_j)=0\quad\forall j\in\overline{p,k},\\ \{\Delta x_2(t_1),\Delta x_2(t_2),\ldots,\Delta x_2(t_{j-2}),K(t_{j-1})\}:\\ K(t_{j-1})z(t_{j-1})=0.\end{gathered} \tag{7}$$

Отметим, что в выражении (7) первое уравнение предназначено для выбора текущего управления $\Delta x_2(t_{j-1})$. При умножении на $\frac{\partial z^{\mathrm{T}}}{\partial x_2}(t_{j-1})$ формируются невязки, число которых равно размерности вектора управления.

Второе уравнение задает локальные краевые условия для выбора управляющих воздействий в моменты времени, предшествующие t_{j-1}.

Матрица $K(t_{j-1})$ определяется рекуррентным выражением

$$\begin{cases}K(t_k)=E,\\ K(t_{j-1})=\left(E-K(t_j)\frac{\partial z}{\partial x_2}\left(\frac{\partial z^{\mathrm{T}}}{\partial x_2}K(t_j)\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^{-1}\times\right.\\ \left.\times\frac{\partial z^{\mathrm{T}}}{\partial x_2}K(t_j)\right)K(t_j)\quad\forall j\in\overline{p,k},\end{cases} \tag{8}$$

где E – единичная матрица,

$$\frac{\partial z}{\partial x_2}=\frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{j-1}).$$

Обозначим $z_j(t_j)=K(t_j)z(t_j)$. Вектор $z_j(t_j)$ представляет собой вектор невязок $z(t_k)$ при управлениях $\Delta x_2(t_{j-1}),\Delta x_2(t_j),\ldots,\Delta x_2(t_{k-1})$, определяемых в соответствии с формулой (7).

Пусть из выражения (7) получены значения $\Delta x_2(t_{j-1})$ $\forall j\in\overline{p,k}$:

$$\Delta x_2(t_{j-1})=-\left(\frac{\partial z^{\mathrm{T}}}{\partial x_2}(t_{j-1})K(t_j)\frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{j-1})\right)^{-1}\times\frac{\partial z^{\mathrm{T}}}{\partial x_2}(t_{j-1})K(t_j)z(t_{j-1})\quad\forall j\in\overline{p,k}, \tag{9}$$

и определены невязки $z_j(t_j)$. В этом случае $z_j(t_j) = z(t_k)$ и первое уравнение в выражении (7) может быть представлено в виде системы линейных уравнений относительно $z(t_k)$:

$$\frac{\partial z^{\mathrm{T}}}{\partial x_2}(t_{j-1})K(t_j)z(t_j) = \\ = \frac{\partial z^{\mathrm{T}}}{\partial x_2}(t_{j-1})z(t_k) = 0 \quad \forall j \in \overline{p,\, k}. \tag{10}$$

Как показано в работе [9], система уравнений (10) имеет единственное нулевое решение $z(t_k) = 0$, если ранг матрицы $\left[\frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{k-1}) \; \frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{k-2}) \ldots \frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{p-1})\right]$ равен размерности вектора $z(t_k)$. В этом случае управление вида (9) является решением исходной терминальной задачи.

Стратегия управления, соответствующая выражению (7), накладывает ограничения на траекторию движения объекта для значений вектора $z(t)$ в конечном числе моментов времени разрыва управления. При этом на интервалах между этими моментами возможны вариации управления по координатам x_2. Эти вариации можно выбирать с учетом целевых функционалов от координат состояния и управления. Таким образом, имеется возможность расширения класса функций для выбора управления с учетом критериев нетерминального типа.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ТЕРМИНАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В КЛАССЕ КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Сформулируем задачу синтеза терминального управления в классе кусочно-непрерывных функций, дополнив постановку задачи из § 1.

Так же, как в предшествующем разделе, будем полагать, что объект управления описывается уравнением (1), а прогнозирующая модель – уравнением (2), управление $u(t)$ скачкообразно изменяется в дискретные моменты времени t_j, j = 0, 1, 2,…, k – 1. При этом на интервалах $[t_j,\ t_{j+1}]$ $u(t)$ – непрерывная функция времени. Известно дифференциальное уравнение (4) для вектора прогнозируемых невязок $z(t)$. В уравнении (4) будем полагать, что $\frac{\partial z}{\partial x_2}(x(t), t) = \frac{\partial z}{\partial x_2}(t)$. Известно решение локальных задач синтеза управления (7) в классе кусочно-постоянных функций: $\Delta x_2(t_{j-1}) \quad \forall j \in \overline{p,k}$ для разностного уравнения (5). Будем выбирать управление $u(t)$ в классе кусочно-непрерывных функций, для которого на интервалах между моментами времени $t_{j-1}, t_j \quad \forall j \in \overline{p,k}$ выполняются условия

$$\frac{\partial z^{\mathrm{T}}}{\partial x_2}(t_{j-1})K(t_j)z(t_j) = 0 \quad \forall j \in \overline{p,k},$$

$$K(t_{j-1})z(t_{j-1}) = 0,$$

где матрица $K(t_{j-1})$ определяется выражением (8). В этом случае для невязки $z(t_k)$ и кусочно-непрерывной функции $u(\tau)$, $\tau \in [t_{k-1}, t_k]$, можно записать

$$z(t_k) = z(t_{k-1}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial z}{\partial x_2}(\tau)\, f_2(x_2(\tau), u(\tau), \tau)\, d\tau\,. \tag{11}$$

Будем полагать, что выполняется условие

$$\frac{\partial z^{\mathrm{T}}}{\partial x_2}(t_{k-1})z(t_k) = 0\,. \tag{12}$$

Это условие сужает рассматриваемый класс кусочно-непрерывного управления. Новый, ограниченный условием (12), класс кусочно-непрерывных функций определяется ниже.

Пусть $u(\tau)$ = const, $\tau \in (t_{k-1}, t_k)$. С учетом скачкообразного изменения функции $u(\tau)$ в момент t_{k-1} в этом случае можно записать:

$$z(t_k) = z(t_{k-1}) + \frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{k-1})\Delta x_2(t_{k-1}). \tag{13}$$

Из формулы (12) определяется величина $\Delta x_2(t_{k-1})$ выражением вида (9).

Будем полагать, что для кусочно-непрерывной функции времени $u(\tau)$ на интервале $[t_{k-1},\ t_k]$ справедливо соотношение

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial z}{\partial x_2}(\tau)\, f_2(x_2(\tau),\, u(\tau),\, \tau)\, d\tau = \\ = \frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{k-1})\Delta x_2(t_{k-1}). \tag{14}$$

В этом случае выражение (11) преобразуется к виду (13), и выполняется условие (12).

Пусть управление в моменты времени, предшествующие t_{j-1}, выбрано таким образом, что выполнены краевые условия, заданные вторым уравнением в выражении (7), т. е. $K(t_{j-1})z(t_{j-1})=0$. Вычтем $K(t_{j-1})z(t_{j-1})$ из правой части формулы (11). После преобразования получим:

$$z(t_k)=$$
$$=\frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{k-1})\left(\frac{\partial z^{\mathrm{T}}}{\partial x_2}(t_{k-1})\frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{k-1})\right)^{-1}\frac{\partial z^{\mathrm{T}}}{\partial x_2}(t_{k-1})z(t_{k-1})+$$
$$+\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{\partial z}{\partial x_2}(\tau)f_2(x_2(\tau),u(\tau),\tau)d\tau=0.$$

В правой части полученного выражения первое слагаемое, как следует из формулы (9) при $j = k$, равно $-\frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{k-1})\Delta x_2(t_{k-1})$. В итоге, с учетом соотношения (14), получим $z(t_k)=0$.

Перейдем к выбору управления на интервале $[t_{k-2}, t_{k-1}]$. Определим новый вектор невязок $z_{k-1}(t_{k-1})=K(t_{k-1})z(t_{k-1})$. Для вектора $z_{k-1}(t_{k-1})$ и для кусочно-непрерывной функции $u(\tau)$, $\tau\in[t_{k-2}, t_{k-1}]$, запишем:

$$z_{k-1}(t_{k-1})=K(t_{k-1})z(t_{k-1})=K(t_{k-1})\times$$
$$\times\left(z(t_{k-2})+\int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}}\frac{\partial z}{\partial x_2}(\tau)f_2(x_2(\tau),u(\tau),\tau)d\tau\right). \tag{15}$$

Пусть для $u(\tau)$ выполняется условие

$$\frac{\partial z^{\mathrm{T}}}{\partial x_2}(t_{k-1})z_{k-1}(t_{k-1})=0. \tag{16}$$

При выборе управления на интервале $[t_{k-2},t_{k-1}]$ воспользуемся теми же соображениями, что и на интервале $[t_{k-1}, t_k]$. Для постоянного управления $u(\tau)$, $\tau\in(t_{k-2}, t_{k-1})$, можно записать:

$$z_{k-1}(t_{k-1})=z_{k-1}(t_{k-2})+\frac{\partial z_{k-1}}{\partial x_2}(t_{k-2})\Delta x_2(t_{k-2}), \tag{17}$$

где

$$\frac{\partial z_{k-1}}{\partial x_2}(t_{k-2})=K(t_{k-1})\frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{k-2}),$$
$$z_{k-1}(t_{k-2})=K(t_{k-1})z(t_{k-2}).$$

Из условия (16) определим управления $\Delta x_2(t_{k-2})$ выражением вида (9).

Будем полагать, что кусочно-непрерывная функция времени $u(\tau)$ на интервале $[t_{k-2}, t_{k-1}]$ удовлетворяет условию

$$K(t_{k-1})\Big(\int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}}\frac{\partial z}{\partial x_2}(\tau)f_2(x_2(\tau),u(\tau),\tau)d\tau-$$
$$-\frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{k-2})\Delta x_2(t_{k-2})\Big)=0.$$

В этом случае выражение (15) преобразуется к виду (17) и, следовательно, выполняется условие (16).

Определим новый вектор невязок $z_{k-2}(t_{k-2})=K(t_{k-2})z(t_{k-2})$. При условии $K(t_{k-2})z(t_{k-2})=0$, преобразуя выражение (15) аналогично преобразованию на интервале $[t_{k-1}, t_k]$ выражения (11).

Процедура может быть продолжена для моментов времени, предшествующих t_{k-1}.

В итоге для момента времени t_j можно записать:

$$z_j(t_j)=K(t_j)z(t_j)=K(t_j)\times$$
$$\times\left(z(t_{j-1})+\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{\partial z}{\partial x_2}(\tau)f_2(x_2(\tau),u(\tau),\tau)d\tau\right), \tag{18}$$

$$K(t_j)\Big(\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{\partial z}{\partial x_2}(\tau)f_2(x_2(\tau),u(\tau),\tau)d\tau-$$
$$-\frac{\partial z}{\partial x_2}(t_{j-1})\Delta x_2(t_{j-1})\Big)=0. \tag{19}$$

Здесь $K(t_{j-1})$ определяется выражением (8), а $\Delta x_2(t_{j-1})$ – выражением вида (9). С учетом формул (19) и (9) выполняется условие

$$\frac{\partial z^{\mathrm{T}}}{\partial x_2}(t_{j-1})K(t_j)z(t_j)=0 \quad \forall j\in\overline{p,k}. \tag{20}$$

Таким образом, уравнение (19) и выражение (9) для $\Delta x_2(t_{j-1})$ определяют условия, равносильные исходному условию (20).

Полагая $K(t_j)z(t_j)=0$, путем преобразования формулы (18) можно показать, что $z_j(t_j)=K(t_j)z(t_j)=0$.

В итоге можно сделать вывод, что управление в классе кусочно-непрерывных функций, выбираемое в соответствии с выражениями (19), (9), решает поставленную терминальную задачу $z(t_k)=0$, допуская при этом возможность выбора непрерывного управления на интервалах между разрывами в достаточно широком классе функций.

4. ПРИМЕР

В качестве примера рассмотрим задачу управления расходованием топлива жидкостной ракеты. Ограничимся задачей синхронизации выработки окислителя и горючего к моменту выключения двигателя ступени ракеты. Рассмотрим ее в линейном приближении. Из-за несинхронности выработки в баках остаются неиспользуемые остатки топлива, вследствие чего снижаются энергетические возможности ракеты. Управление процессом синхронизации производится путем изменения коэффициента соотношения расходов компонентов топлива через двигатель. В свою очередь, отклонение этого параметра от номинального оптимального значения приводит к потерям удельной тяги. Эти потери становятся наиболее ощутимыми по мере приближения к концу полета. Отмеченные соображения позволяют качественно сформулировать требования к процессу управления и определяют вид краевых условий.

Объект управления описывается уравнениями

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{T}x_2(t),\ \dot{x}_2(t) = -k(x_2(t) - u(t)),$$
$$t \in [t_0,\ t_k],\ T = t_k - t_0,\ x_2(t_0) = 0.$$

Здесь $x_1(t)$ – рассогласование относительных масс компонентов топлива; $x_2(t)$ – относительное отклонение коэффициента соотношения расходов компонентов от номинального значения.

Краевые условия заданы в виде

$$x_1(t_k) = 0,\ x_2(t_k) = 0\,.$$

Определим вектор прогнозируемых невязок $z(t)$ и $\dot{z}(t)$:

$$z(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) + x_2(t)\dfrac{t_k - t}{T} \\ x_2(t) \end{vmatrix},$$

$$\dot{z}(t) = \begin{vmatrix} x_2(t)\dfrac{t_k - t}{T} \\ 1 \end{vmatrix}\dot{x}_2(t)\,.$$

Сначала рассмотрим решение задачи в классе кусочно-постоянного управления. В этом случае достаточно иметь моменты времени t_0, $t_0 < t_1 < T$ разрыва управления $u(t)$. Определим вектор прогнозируемых невязок краевых условий в момент времени t_1:

$$z(t_1) = \begin{vmatrix} x_1(t_1) + t_1' x_2(t_1) \\ x_2(t_1) \end{vmatrix},$$

$$t' = \frac{1}{T}(t_k - t)\,,\ t_1' = \frac{1}{T}(t_k - t_1)\,.$$

Отметим, что при скачкообразном изменении функции $u(t)$ переходный процесс по координате $x_2(t)$ заканчивается за время, существенно меньшее, чем T (время переходного процесса ∂t <0,01 T). Для уменьшения ошибки системы, связанной с конечным временем переходного процесса ∂t, частная производная $\dfrac{\partial z}{\partial x_2}(t)$ в примере берется в промежуточный момент времени на интервале ∂t.

Запишем

$$z(t_k) = z(t_1) + \begin{vmatrix} t_1^* \\ 1 \end{vmatrix}\Delta x_2(t_1),$$

$$t_1^* \in (t_1',\ t_1' - \frac{\partial t}{T}),$$

где $\Delta x_2(t_1) = x_2(t_k) - x_2(t_1)$.

Для приращения координаты $x_2(t)$ при скачкообразном изменении функции $u(t)$ в момент времени t_1 из условия $\begin{vmatrix} t_1^* \\ 1 \end{vmatrix} z(t_k) = 0$ получим:

$$\Delta x_2(t_1) = -\frac{(x_1(t_1) + t_1' x_2(t_1))t_1^* + x_2(t_1)}{1 + t_1^{*2}}.$$

Матрица $K(t_1)$ имеет вид

$$K(t_1) = \begin{vmatrix} 1 & -t_1^* \\ -t_1^* & t_1^{*2} \end{vmatrix}\frac{1}{1 + t_1^{*2}}\,.$$

Новый вектор невязок для выбора управлений $\Delta x_2(t_0) = x_2(t_1) - x_2(t_0)$ записывается в виде $z_1(t_1) = K(t_1)z(t_1)$,

где $z(t_1) = z(t_0) + \begin{vmatrix} t_0^* \\ 1 \end{vmatrix}\Delta x_2(t_0),\ \ t_0^* \in \left(t_0',\ t_0' - \dfrac{\partial t}{T}\right).$

После преобразования получим условие для определения управления $\Delta x_2(t_0)$:

$$z_1(t_1) = \begin{vmatrix} 1 \\ -t_1^* \end{vmatrix}(x_1(t_0) + (t_0^* - t_1^*)\Delta x_2(t_0))\frac{1}{1 + t_1^{*2}} = 0\,,$$

откуда $\Delta x_2(t_0) = -\dfrac{x_1(t_0)}{t_0^* - t_1^*}$.

Отметим, что допускается $z(t_1) \neq 0, x_1(t_1) \neq 0$.

Перейдем к решению терминальной задачи в классе кусочно-непрерывного управления. На интервале $[t_1,\ t_k]$ управление $u(\tau)$ должно удовлетворять условию

$$\int_{t_1}^{t_k}\begin{vmatrix} \dfrac{t_k - \tau}{T} \\ 1 \end{vmatrix}\dot{x}_2(\tau)d\tau = \begin{vmatrix} t_1^* \\ 1 \end{vmatrix}\Delta x_2(t_1)\,.$$

Здесь необходимо иметь в виду, что функция $u(\tau)$ может скачкообразно изменяться в момент времени t_1.

При выборе непрерывной функции управления $u(\tau)$, $\tau \in [t_0,\ t_1]$, должно выполняться условие

$$K(t_1)\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{t_k-\tau}{T}\right)\dot{x}_2(\tau)d\tau = K(t_1)\begin{vmatrix} t_0^* \\ 1 \end{vmatrix}\Delta x_2(t_0)\,.$$

После преобразования получим условие вида

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{t_k-\tau}{T}-t_1^*\right)\dot{x}_2(\tau)d\tau = (t_0^*-t_1^*)\Delta x_2(t_0)\,.$$

Воспользовавшись правилом интегрирования по частям для левой части, получим:

$$x_1(t_0)+\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_1}x_2(\tau)d\tau = -x_2(t_1)(t'_1-t_1^*)\,.$$

Найденное выражение может быть записано в виде граничного условия $x_1(t_1) = -x_2(t_1)(t'_1-t_1^*)$.

Это условие позволяет выбирать непрерывное управление в достаточно широком классе функций. С учетом требования, предъявляемого к отклонению коэффициента соотношения расходов компонентов, т. е. к $x_2(t)$, на интервале $\tau\in[t_0,\, t_1]$ $x_2(\tau)$ и управление $u(\tau)$ могут выбираться в виде убывающих экспоненциальных функций.

Пусть $t_0 = 0$. Зададим $u(\tau) = Be^{-r\tau}$, $\tau\in[t_0,\, t_1]$. В этом случае $x_2(\tau) = \dfrac{kB}{k-r}(-e^{-k\tau}+e^{-r\tau})$, $k >> r$. Параметры B и r определяются, исходя из начальных и конечных условий $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$, $x_1(t_1) = -x_2(t_1)(t'_1-t_1^*)$. На интервале $\tau\in[t_1,\, t_k]$ можно принять $u(\tau)=0$. В этом случае на интервале $\tau\in[t_1+\partial t,\, t_k]$ $x_2(\tau)=0$. Проинтегрируем уравнение для $\dot{x}_1(t)$ на интервале $[t_1,\, t_1+\delta t]$. Найдем $x_1(t_k)$: $x_1(t_k) = x_1(t_1)+\dfrac{1}{kT}x_2(t_1)$, с учетом выражения для $x_1(t_1)$ получим $x_1(t_k) = -x_2(t_1)(t'_1-t_1^*-\dfrac{1}{kT})$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача синтеза терминального управления в классе кусочно-постоянных и кусочно-непрерывных функций. Показана взаимосвязанность этих задач и целесообразность их поэтапного, последовательного рассмотрения.

На этапе синтеза кусочно-постоянного управления получены локальные условия для выбора управления на каждом интервале между моментами разрыва управления. При этом выполнение локальных условий обеспечивает решение исходной терминальной задачи.

При синтезе управления в классе кусочно-непрерывных функций используются результаты синтеза кусочно-постоянного управления. Полученные на первом этапе локальные условия используются в качестве краевых условий для выбора управления в классе кусочно-непрерывных функций на интервалах между разрывами управления. При этом при выполнении локальных условий непрерывное управление может выбираться в достаточно широком классе функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сихарулидзе Ю.Г.* Баллистика и наведение летательных аппаратов. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2011. [*Sikharulidze, Yu.G.* Ballistika i navedenie letatelnykh apparatov. – M.: Binom. Laboratoriya znanii, 2011. (In Russian)]
2. *Haeussermann, W.* Description and Performance of the Saturn Launch Vehicle's Navigation, Guidance, and Control System // 3rd Int. IFAC Conf. on Automatic Control in Space. – Toulouse, France, 1970. – Vol. 3. – P. 275–312.
3. *Петров Б.Н., Портнов-Соколов Ю.П., Андриенко А.Я., Иванов В.П.* Бортовые терминальные системы управления. – М.: Машиностроение, 1983. – 200 с. [*Petrov, B.N., Portnov-Sokolov, Yu.P., Andrienko, A.Ya., Ivanov, V.P.* Onboard Terminal Control Systems (Principles of Construction and Elements of the Theory). – M.: Mechanical Engineering, 1983. – 200 s. (In Russian)]
4. *Веремей Е.И., Еремеев В.В.* Введение в задачи управления на основе предсказаний // Всероссийская науч. конф. «Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB». – Москва, 2004. – С. 98–115. [*Veremej, E.I., Eremeev, V.V.* Vvedenie v zadachi upravleniya na osnove predskazanij // Vserossijskaya nauch. konf. «Proektirovanie nauchnyh i inzhenernyh prilozhenij v srede MATLAB». – Moscow, 2004. – C. 98–115. (In Russian)]
5. *Grüne, L., Pannek, J.* Nonlinear Model Predictive Control. Theory and Algorithms. – Springer, 2011.
6. *Гулько Ф.Б., Новосельцева Ж.А.* Применение методов прогнозирования в задачах синтеза систем автоматического управления // VIII Всесоюзное совещание по проблемам управления. – Москва, 1980. – Т. 1. – С. 32–34. [*Gul'ko, F.B., Novosel'ceva, Zh.A.* Primenenie metodov prognozirovaniya v zadachah sinteza sistem av-tomaticheskogo upravleniya // VIII Vsesoyuznoe soveshchanie po problemam upravleniya. – Moscow, 1980. – T. 1. – C. 32–34. (In Russian)]
7. *Klaučo, M., Kalúz, M., Kvasnica, M.* Real-time Implementation of an Explicit MPC based Reference Governor for Control of a Magnetic Levitation System // Control Engineering Practice. – 2017. – Vol. 60, no. 3. – P. 99–105.
8. *Langson, W., Chryssochoos, I., Rakovic, S.V., Mayne, D.Q.* Robust Model Predictive Control Using Tubes // Automatica. – 2004. – Vol. 40, no. 1. – P. 125–133.
9. *Иванов В.П., Табалин Д.Д.* Об одном методе детерминированного терминального управления с предиктивным прогнозированием невязок краевых условий // Автоматика и телемеханика. – 2022. – № 1. – С. 77–94. [*Ivanov, V.P., Tabalin, D.D.* On a deterministic terminal control method with predictive forecasting of mismatches in the boundary conditions // Automation and Remote Control. – 2022. – Vol. 83, no 1. – P. 62–77.]

10. *Табалин Д.Д.* Детерминированный синтез алгоритмов терминального управления с прогнозированием невязок краевых условий // Тезисы международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2020». Секция «Вычислительная математика и кибернетика». – Москва, 2020. [*Tabalin, D.D.* Determinirovannyj sintez algoritmov terminal'nogo upravleniya s prognozirovaniem nevyazok krae-vyh uslovij // Tezisy mezhdunarodnogo molodezhnogo nauchnogo foruma «LOMONOSOV-2020». Sektsiya «Vychislitel'naya matematika i kibernetika». – Moscow, 2020. (In Russian)]
11. *О семинаре* по проблемам нелинейной динамики и управления при московском государственном университете им. М.В. Ломоносова. Семинар основан академиками РАН С.В. Емельяновым и С.К. Коровиным // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56. – № 8. – С. 1135–1144. [*O seminare* po problemam nelineinoi dinamiki i upravleniya pri moskovskom gosudarstvennom universitete im. M.V. Lomonosova. Seminar osnovan akademikami RAN S.V. Emel'yanovym i S.K. Korovinym // Differentsial'nye uravneniya. – 2020. – T. 56. – № 8. – S. 1135–1144. (In Russian)]
12. *Chai, J., Medagoda, E., Kayacan, E.* Adaptive and Efficient Model Predictive Control for Booster Reentry // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. – 2020. – Vol. 43(12). – P. 2372–2382. – DOI: https://doi.org/10.2514/1.G004925.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.В. Павловым.

Поступила в редакцию 11.10.2022,
после доработки 16.01.2023.
Принята к публикации 14.02.2023.

Завадский Владимир Константинович – канд. техн. наук, ✉ vladguc@ipu.ru,

Иванов Владимир Петрович – д-р техн. наук, ✉ vladguc@ipu.ru,

Каблова Елена Борисовна – науч. сотрудник ✉ vladguc@ipu.ru,

Кленовая Людмила Григорьевна – науч. сотрудник ✉ vladguc@ipu.ru,

Рутковский Владислав Юльевич – д-р техн. наук,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва.

TERMINAL CONTROL OF MOVING OBJECTS IN THE CLASSES OF PIECEWISE CONSTANT AND PIECEWISE CONTINUOUS FUNCTIONS

V.K. Zavadsky[1], V.P. Ivanov[2], E.B. Kablova[3], L.G. Klenovaya[4], and V.Yu. Rutkovskii

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

[1–4] ✉ vladguc@ipu.ru

Abstract. This paper presents a terminal control problem with the separation of object's state coordinates into two types: the slowly changing coordinates figuring in boundary conditions and the coordinates of the stabilization loop. A predictive model of the object is introduced to design the control action. A differential equation is derived for predicted mismatches in the boundary conditions. The original system is discretized in time based on this equation. This problem is solved step-by-step in the classes of piecewise constant and piecewise continuous control actions. As an illustrative example, the problem of controlling the fuel consumption of a stage of a liquid-propellant launch vehicle is considered. The class of control actions is extended from piecewise constant to piecewise continuous functions in order to cover additional requirements for the control process. The continuous functions on intervals between control jumps are chosen using the local boundary conditions obtained during the terminal control design in the class of piecewise constant functions.

Keywords: terminal control, model predictive control (MPC), fuel consumption control for launch vehicles.