УДК 629.7.036.54-63 DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2019.5.3

СИНТЕЗ КВАЗИТЕРМИНАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

В.К. Завадский, В.П. Иванов, Е.Б. Каблова, Л.Г. Кленовая

Аннотация. В классе линейных алгоритмов управления линейными стационарными многосвязными объектами выделен подкласс квазитерминальных алгоритмов с неявным прицеливанием в краевые условия, скользящие вдоль по программе требуемого изменения координат вектора состояния и отдаленные от текущего момента времени на фиксированный интервал. Прицеливание (компенсация прогнозируемого промаха) реализуется путем вычисления программ изменения компонент вектора будущего управления в виде отрезков степенного ряда, зависящих от будущего времени и обеспечивающих решение двухточечной граничной задачи. Показано, что в идеализированных модельных условиях полной управляемости и наличия точной информации о состоянии и уравнениях объекта управления, а также мгновенной и точной реализации вычисленных команд квазитерминальный алгоритм обеспечивает асимптотическую устойчивость замкнутой многосвязной системы и сколь угодно высокую наперед заданную скорость сходимости переходных процессов независимо от наличия устойчивости модели объекта управления. Предложен достаточно простой и удобный для реализации в среде MATLAB метод синтеза алгоритма, основанный на применении матричного представления модели объекта управления в пространстве состояний и аппарата экспоненциальных функций матриц. Отмечено, что квазитерминальные алгоритмы могут применяться в многосвязных системах стабилизации и, в частности, в системах стабилизации подвижных терминальных объектов относительно траекторий, вычисляемых системой терминального управления.

Ключевые слова: терминальное управление, прогнозирующая модель, асимптотическая устойчивость.

ВВЕДЕНИЕ

Терминальные системы находят широкое применение в первую очередь в задачах управления движущимися объектами [1], например, при управлении выведением ракет-носителей на заданную орбиту, расходованием топлива жидкостным ракетным двигателем и др.

Практика создания терминальных систем подсказывает разработчикам подход к синтезу управления с обратной связью, основанный на прогнозировании и парировании невязок краевых условий и позволяющий минимизировать затраты на управление. Этот подход предусматривает восстановление текущего состояния на основе измерений, априорного описания объекта управления и формирование программы будущего управления, выбираемой в некотором классе [2, 3], например, полиномиальных функций времени [4], и приводящей объект в заданное конечное состояние.

В данной работе динамические системы рассматриваются в детерминированной постановке и идеализированных условиях, предполагающих отсутствие возмущающих факторов и наличие полной информации о координатах текущего состояния и априорного описания объекта. Предполагается, что задача управления объектом решается при заранее неизвестных начальных условиях.

Нетривиальность рассматриваемой задачи связана с тем, что текущее управление формируется на основе прогнозирования и компенсации невязок *скользящих* краевых условий, принадлежащих заранее известной программе требуемого изменения координат вектора состояния и отдаленных от текущего момента на фиксированный интервал времени.

Применение прогнозирования для управления тесно связано с идеей оптимизации, поскольку без предсказания будущих результатов невозможно выработать рациональную стратегию управления. Методы синтеза алгоритмов управления с прогнозированием развивались в направлении использования нелинейных моделей объектов [5, 6], применения оптимизационных методов в реальном масштабе времени [7, 8], придания робастных свойств замкнутой системе управления [9, 10] и др.

Из современных подходов к синтезу алгоритмов управления наиболее близок к предлагаемому оптимизационный подход, основанный на управлении динамическими объектами с помощью прогнозирующих моделей — Model Predictive Control (MPC) [11].

Применительно к линейным объектам управления данный подход (в форме с так называемым «подвижным горизонтом прогнозирования») позволяет получить качественно близкий алгоритм. Однако этот метод существенно отличается от предлагаемого, так как, будучи *оптимизационным*, требует для своего применения конкретизировать критерий оптимальности в виде скользящего определенного интеграла от двух квадратичных форм по отклонениям координат от заданной программы и по управлению. Отметим, что указанный метод синтеза не гарантирует [11] устойчивость синтезированной системы.

Среди *не оптимизационных* методов синтеза наиболее близок к предлагаемому основанный на применении аппарата передаточных функций метод стандартных коэффициентов, предназначенный для синтеза односвязных линейных систем с заданным качеством (декрементом затухания) переходной функции [4]. В настоящей статье благодаря матричному представлению модели объекта управления в пространстве состояний и применению аппарата экспоненциальных функций от матриц этот метод существенно модифицирован и распространен на многосвязные системы.

Квазитерминальные алгоритмы могут применяться в многосвязных терминальных системах, а также многосвязных системах стабилизации и, в частности, в системах стабилизации подвижных терминальных объектов относительно программ, вычисляемых в контуре терминального управления.

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Пусть объект управления описывается линейным дифференциальным уравнением вида:

$$\dot{x} = Ax + Bw, \quad x(t) \subset E^k, \quad w(t) \subset E^\mu, \quad x(t_0) = x_0, \quad (1)$$

где $x(t)$ — вектор фазовых координат системы размерностью k, A и B — матрицы размера $k \times k$ и $k \times \mu$, x_0 — вектор заранее неизвестных начальных условий, $w(t)$ — вектор-функция управляющих воздействий.

Цель управления заключается в переводе и удержании вектора состояния на заданной в функции времени номинальной траектории $x_{\text{ном}}(t)$, являющейся решением линейного уравнения: $\dot{x}_{\text{ном}}(t) = \hat{A}x_{\text{ном}}(t) + \hat{B}w_{\text{ном}}(t)$, где $\hat{A}$ и $\hat{B}$ — доступные разработчику алгоритма оценки матриц A и B; $w_{\text{ном}}(t)$ — номинальная программа управления.

В предположении $\hat{A} = A$, $\hat{B} = B$ задача управления может быть переформулирована как задача стабилизации относительно нулевого значения вектора состояния объекта управления

$$\dot{x} = Ax + B\Delta w. \quad (2)$$

Здесь через $x(t)$ переобозначены отклонения $\Delta x(t) = x(t) - x_{\text{ном}}(t)$ фактических значений координат объекта от их значений, соответствующих номинальной траектории движения, $\Delta w(t) = w(t) - w_{\text{ном}}(t)$ — отклонение от номинала вектора управления.

Для стабилизации линейного многосвязного объекта (2) обычно применяются линейные алгоритмы управления с обратной связью вида $\Delta\dot{w} = C\Delta w + Dx$ [12]. Однако можно показать, что и в более узком классе линейных алгоритмов управления $\Delta w = Dx$ при специальном выборе параметров матрицы D можно обеспечить асимптотическую устойчивость и дополнительно придать многосвязной замкнутой системе свойство приближенной инвариантности (без измерения внешнего возмущающего воздействия) [12].

2. СИНТЕЗ АЛГОРИТМА УПРАВЛЕНИЯ

Текущее управление с обратной связью будем формировать в функции отклонений $\Delta x(t)$ фактической траектории движения объекта от номинальной. По аналогии с алгоритмами терминального управления [1] стратегию изменения приращения управления $\Delta w(t)$ будем строить таким образом, чтобы парировать указанные отклонения к подвижному моменту времени, отдаленному от текущего на заданный интервал ΔT. Парирование отклонений координат фактической траектории от номинальной будем производить путем отклонений параметров u вектор-функции $\Delta w(t) = \delta w(u, \tau)$, где τ — отсчитываемое от текущего момента t «будущее» время, а j-я координата вектора $\delta w(u, \tau)$ представляет собой отрезок *полинома степеней времени* τ с коэффициентами, являющимися координатами вектора u управляющих параметров:

$$\delta w_j(u, \tau) = \sum_{i=0}^{k_j} u_{i+m_j}\tau^i, \quad m_j = \sum_{i=1}^{j-1}(k_i + 1), \quad m_1 = 0,$$

или в матричной форме $\delta w(u, \tau) = T(\tau) \cdot u$,

$$T(\tau) = \left\| \begin{matrix} 1\ \tau \ldots \tau^{k_1} & 0 \ldots 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \ldots 0 & 1\ \tau \ldots \tau^{k_\mu} \end{matrix} \right\|.$$

Здесь k_j — наивысшая степень полиномиального представления для j-й компоненты вектора δw. Отметим, что размерность полиномиального представления для компонент δw определяется возможностью управления прогнозируемыми значениями *всех* координат $\Delta x(t)$ с помощью изменения компонент вектора u. Поэтому в целях обеспечения необходимых условий для реализации такой возможности в дальнейшем будем предполагать, что размерность вектора u равна размерности вектора x.

Отметим, что в случае, когда низшие производные вектора x не влияют на высшие и не требуется управлять отклонениями низших производных, эти производные могут быть исключены из состава вектора состояния модели (2) объекта управления в отклонениях.

Очевидно, что при терминальном управлении с обратной связью в качестве текущего управления $\Delta w(t)$ следует взять начальное значение сформированной программы будущего управления $\delta w(u, \tau)$:

$$\Delta w(t) = w(t) - w_{\text{ном}}(t) = \delta w(u, \tau)|_{\tau = 0}.$$

В этом случае уравнение объекта (2) в отклонениях от номинальной траектории может быть записано как

$$\dot{x} = Ax + B\Delta w = Ax + BT(0) \cdot u. \tag{3}$$

В дальнейшем для объекта (3) вектор u будем называть управлением.

Так же, как и при решении терминальных задач, управление объектом (3) будем формировать на основе прогнозирования будущих значений фазовых координат при заданном будущем управлении. Для вычисления в текущий момент t прогнозируемых на интервал τ будущих значений координат вектора x (т. е. значений x в момент $t + \tau$) будем пользоваться прогнозирующей моделью, содержащей модель объекта и программу $\delta w(u, \tau) = T(\tau) \cdot u(t)$ будущего управления:

$$\begin{gathered}\dot{\hat{x}}(t, \tau) = \hat{A}\,\hat{x}(t, \tau) + \hat{B}\,T(\tau) \cdot u(t), \\ \tau \in [0, \Delta T], \quad \hat{x}(t, \tau)|_{\tau = 0} = x(t).\end{gathered} \tag{4}$$

В прогнозирующей модели (4) в отличие от объекта (3) управление $u(t)$ считается *постоянным* на интервале прогнозирования $\tau \in [0, \Delta T]$, и дифференцирование производится по «будущему» времени τ (в предположении $t = \text{const}$).

Пусть $z(t, \Delta T) = \hat{x}(t, \Delta T)$ — прогнозируемое значение вектора невязок между фактической и номинальной траекториями движения объекта в момент $t + \Delta T$.

Определим вектор невязок $z(t, \Delta T)$ как функцию $x(t)$, $u(t)$, t и ΔT соотношением:

$$\begin{aligned} z(t, \Delta T) &= z(x(t), u(t), t, \Delta T) = \\ &= x(t) + \int_0^{\Delta T} (\hat{A}\,\hat{x}(t, \tau) + \hat{B}\,T(\tau)u(t))d\tau, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\hat{x}(t, \tau)$ — решение уравнения модели объекта при прогнозировании.

В общем (нелинейном и/или нестационарном) случае в бортовых системах управления вектор $z(t, \tau)$ определяется путем численного интегрирования уравнения объекта при заданной программе управления на интервале прогнозирования $(t, t + \tau)$.

В линейном стационарном случае, когда матрицы A и B не зависят от времени, выражение (5) для прогнозируемого промаха, преобразованное с помощью аппарата экспоненциальных функций от матриц [13] для представления фундаментальной матрицы системы (4), принимает вид

$$\begin{aligned} z(t, \Delta T) &= \hat{x}(t, \Delta T) = \exp(\hat{A}\Delta T)x(t) + \\ &+ \left(\int_0^{\Delta T} \exp(\hat{A}(\Delta T - \tau))\,\hat{B}\,T(\tau)d\tau\right)u(t) = \\ &= \exp(\hat{A}\Delta T)x(t) + \frac{\partial z}{\partial u}u, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \int_0^{\Delta T} \exp(\hat{A}(\Delta T - \tau))\,\hat{B}\,T(\tau)d\tau \approx \\ &\approx \sum_j \exp(\hat{A}(\Delta T - j\Delta\tau))\,\hat{B}\,T(j\Delta\tau)\Delta\tau. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь приближенное соотношение приведено для облегчения понимания механизма формирования вынужденной составляющей прогнозируемого промаха, аналогичного свободной составляющей $\exp(\hat{A}\Delta T)x(t)$.

Управление $u(t)$ объектом (3) в каждый момент времени t будем выбирать из условия выполнения равенства нулю вектора промаха (6) $z(t, \Delta T) = 0$, прогнозируемого в предположении $A = \hat{A}$, откуда алгоритм управления представляется в виде

$$\begin{aligned} u(x(t)) &= Dx(t) = \\ &= -\left(\int_0^{\Delta T} \exp(\hat{A}(\Delta T - \tau))\,\hat{B}\,T(\tau)d\tau\right)^{-1} \exp(\hat{A}\Delta T)x(t). \end{aligned} \tag{8}$$

В этом случае постоянные матрицы (7) $\frac{\partial z}{\partial u}$ и D могут быть легко вычислены (при условии $\det\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) \neq 0$, например, в среде MATLAB) по известным матрицам $\hat{A}$, $\hat{B}$, $T(\tau)$ и выбранном значении параметра ΔT. Уравнение замкнутой системы в данном случае

$$\dot{x} = \Phi(\Delta T)x = \Bigg(A - BT(0) \times$$

$$\times \left(\int_0^{\Delta T} \exp(\hat{A}(\Delta T - \tau))\hat{B}\,T(\tau)d\tau\right)^{-1} \exp(\hat{A}\Delta T)\Bigg)x, \quad (9)$$

а для проверки ее устойчивости достаточно вычислить вектор собственных значений $\lambda(\Phi)$ постоянной матрицы Φ и убедиться, что $\mathrm{Re}(\lambda_j(\Phi)) < 0$, $j = 1, ..., k$.

Условие $\det\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) \neq 0$ для всех $\Delta T > 0$ по существу является условием управляемости объекта (1) по вектору w и поэтому может выполняться лишь для полностью управляемого стационарного объекта (1).

В случае $\hat{A} = A$, $\hat{B} = B$ можно доказать справедливость следующего утверждения, легко проверяемого непосредственно в каждой конкретной ситуации.

Теорема. *В стационарном случае при условиях* $\det\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) \neq 0$, $\hat{A} = A$, $\hat{B} = B$ *и для ограниченных сверху и снизу значений* ΔT: $0 < \Delta T < \Delta T_{\text{огр}}$ *квазитерминальный алгоритм управления* (8) *обеспечивает асимптотическую устойчивость системы управления по управляемым компонентам вектора* x (*входящих в состав вектора* z).

Доказательство. Сначала рассмотрим простой случай, когда многосвязный объект управления представляет собой совокупность k взаимосвязанных управляемых одномерных объектов управления. В этом случае матрицы B и $T(\tau)$ имеют размер $k \times k$ и матрица $T(\tau) = T(0)$ является единичной, матрица $BT(0)$ в силу управляемости является невырожденной, а матрица Φ с учетом уравнения (9) представляется в виде

$$\Phi(\Delta T) = A - BT(0)\left(\int_0^{\Delta T} \exp(A(\Delta T - \tau))BT(0)d\tau\right)^{-1} \times$$

$$\times \exp(A\Delta T) = A - BT(0)\left(\int_0^{\Delta T} \exp(A(\Delta T - \tau))d\tau \cdot BT(0)\right)^{-1} \times$$

$$\times \exp(A\Delta T) = A - \left(\int_0^{\Delta T} \exp(-A\tau)d\tau\right)^{-1}.$$

Введем вспомогательную функцию

$$\tilde{\Phi}(\Delta T) = \Phi(\Delta T)\Delta T = A\Delta T - (\exp(-A\Delta T_1(\Delta T)))^{-1},$$

где $0 \le \Delta T_1(\Delta T) \le \Delta T$ в силу теоремы о среднем.

Переходя к пределу при $\Delta T \to 0$, имеем $\tilde{\Phi}(\Delta T) \to -E$ (где E — единичная матрица), и, следовательно, $\Phi(\Delta T) = \tilde{\Phi}(\Delta T)\Delta T^{-1} \to -E\Delta T^{-1} \to -E\infty$, и

$$\lim_{\Delta T \to 0} \mathrm{Re}(\lambda_j(\Phi(\Delta T))) = -\infty, \quad j = 1, ..., k. \quad (10)$$

Откуда в силу непрерывности зависимости собственных значений $\lambda_j(\Phi)$ от ΔT (так как $\Phi(\Delta T) \approx -E\Delta T^{-1}$ при малых $\Delta T > 0$) следует существование значения $\Delta T_{\text{огр}} > 0$, такого, что $\mathrm{Re}(\lambda_j(\Phi)) < 0$, $j = 1, ..., k$, при $\Delta T < \Delta T_{\text{огр}}$ и, следовательно, справедливость теоремы.

Более того, пользуясь основной формулой представления функции от матрицы [13] в виде суммы значений функции на спектре матрицы, умноженных на составляющие матрицы, можно показать [2], что в данном случае собственные значения матрицы замкнутой системы остаются отрицательными независимо от знака собственных значений матрицы A. Таким образом, замкнутая система асимптотически устойчива при любом $\Delta T > 0$ (т. е. можно положить $\Delta T_{\text{огр}} = \infty$).

В общем случае, когда матрица $BT(\tau)$ может быть вырожденной,

$$\Phi(\Delta T) = A - BT(0) \times$$

$$\times \left(\int_0^{\Delta T} \exp(A(\Delta T - \tau))BT(\tau)d\tau\right)^{-1} \exp(A\Delta T), \quad (11)$$

компоненты фундаментальной матрицы системы $\exp(A(\Delta T - \tau)$ при изменении τ в пределах интегрирования могут изменять знак, и теорема о среднем неприменима.

Нетрудно заметить, что если в произвольный момент t' зафиксировать скользящие краевые условия и перейти к обычному терминальному управлению с прицеливанием в фиксированный момент $t_{\text{к}} = t' + \Delta T$, то изменение координат замкнутой системы по-прежнему будет описываться уравнением (9) с тем лишь отличием, что константу ΔT в этом уравнении следует заменить на убывающую до 0 в момент $t_{\text{к}}$ функцию времени $\Delta T(t)$: $\Delta T(t) = \Delta T + t' - t = t_{\text{к}} - t$.

Действительно, в процессе приближения к моменту $t_{\text{к}}$ при формировании программы управления в произвольный момент времени t'' можно снова вернуться к скользящим краевым условиям с меньшим значением $\Delta T' = t_{\text{к}} - t''$. Но на втором участке движения со скользящими краевыми условиям и его левой границе связь между координатами вектора состояния по-прежнему будет определяться уравнением (9). Поскольку в момент t'' при изменении стратегии управления программа управления не изменяется, то это возможно лишь при условии, что и на участке движения с фиксированными краевыми условиями движение нестационарной замкнутой системы также описывается уравнением (9) с переменным значением ΔT. Таким образом, при терминальном управлении с прицеливанием в фиксированный момент $t_{\text{к}}$ в *идеализированных условиях* наличия полной информации об объекте управления и точного, «мгновенного» исполнения управляющих команд в замкнутой системе каждый раз реализуется изменение матриц $\Phi(\Delta T)$ (11) в соответствии с предельным переходом при $\Delta T = t_{\text{к}} - t \to 0$.

Но в силу условий теоремы $\det\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) \neq 0$ (управляемость), $\hat{A} = A$, $\hat{B} = B$ (полная информация) при управлении с прицеливанием в фиксированный момент $t_к$ для любых начальных (в момент t') условий в системе (9) в каждый момент t будет формироваться программа управления $\Delta w(t)$, порождающая траекторию движения $x(t)$, обеспечивающую точное выполнение краевых условий в момент $t_к$, т. е. $x(t_к)$ для *всех* координат вектора состояния. Причем в каждый момент времени t эта траектория будет «подтверждаться» в неизменном виде матрицей $\Phi(\Delta T = t_к - t)$ через механизм обратной связи. А это означает, что при $t < t_к$ матрица $\Phi(\Delta T)$ (11) не может быть вырожденной и вещественные составляющие всех собственных значений этой матрицы должны быть отрицательны $\mathrm{Re}(\lambda_j(\Phi(\Delta T))) < 0$, $j = 1, ..., k$, по крайней мере, при малых ΔT (так как в противном случае равенство всех координат нулю в момент $t_к$ при любых начальных условиях в момент t' было бы невозможно). Более того, поскольку в силу невырожденности матрица $\Phi(\Delta T)$ может быть приведена преобразованием подобия к диагональному (жорданову) виду $\Lambda(\Delta T)$, то условие (10) должно выполняться и в общем случае, для того чтобы произвольные отклонения начальных условий всех компонент вектора состояния $\tilde{x}$ в преобразованной системе координат могли обнулиться за сколь угодно малый интервал времени между моментами t' и $t_к$: $\dot{\tilde{x}} = \Lambda(\Delta T)\tilde{x}$, где $\Delta T = t' - t_к$. ♦

Вопрос об исследовании устойчивости замкнутой системы в случае $\hat{A} \neq A$, $\hat{B} \neq B$ выходит за рамки данной статьи и пока остается открытым. Однако это не исключает возможность практического применения квазитерминальных алгоритмов и в этих условиях в силу простоты их синтеза с последующей модельной проверкой устойчивости синтезированной системы для различных вариантов неравенств. Проверка факта устойчивости системы в каждом конкретном случае может производиться путем вычисления постоянной матрицы Φ по приведенным выше соотношениям (9) и нахождения ее собственных значений.

В обозначениях исходной постановки задачи (1) для общего стационарного случая квазитерминальный алгоритм управления многосвязной системой представляется в виде

$$w(x(t), t) = w_{ном}(t) - T(0)\left(\int_0^{\Delta T} \exp(\hat{A}(\Delta T - \tau)) \times \hat{B}\, T(\tau)d\tau\right)^{-1} \exp(\hat{A}\,\Delta T)(x(t) - x_{ном}(t)).$$

Отметим положительные свойства рассматриваемых квазитерминальных алгоритмов.

Скорость сходимости процесса управления в системах с такими алгоритмами определяется величиной ΔT, что позволяет путем уменьшения ΔT в *модельных условиях* получить сколь угодно быстро сходящиеся устойчивые переходные процессы при управлении как устойчивыми, так и неустойчивыми объектами (см. далее примеры).

Кроме того, как это следует из доказательства теоремы, квазитерминальные алгоритмы управления при малых ΔT представляет собой удобные для исследования конструктивные примеры регуляторов, реализующих в замкнутой системе свойство приближенной инвариантности [12] благодаря сохранению устойчивости и увода в минус бесконечность корней ее характеристического уравнения при сколь угодно больших коэффициентах усиления в отрицательных обратных связях. Близкие конструкции приближенно инвариантных систем без измерения внешнего воздействия для объектов малого порядка предлагал М.В. Мееров.

Дополнительно отметим, что процедура синтеза квазитерминального алгоритма по сравнению с MPC-подходом (и другими оптимизационными подходами) обладает тем преимуществом, что позволяет заранее назначить скорость сходимости переходных процессов в системе путем выбора подходящего ΔT. Тогда как при MPC-подходе для изменения длительности переходных процессов требуется совместно варьировать (изменять в противоположные стороны) веса квадратичных форм интегральных отклонений от заданной программы и отклонений управления на скользящем интервале с заранее неизвестным результатом. В отличие от MPC-подхода синтез матрицы D линейного алгоритма управления (8) сводится к вычислению определенного интеграла от матричного выражения с последующим обращением матрицы. Указанные матричные вычисления удобно производить в приспособленной для решения таких задач среде MATLAB.

3. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Случай, когда матрицы A и $BT(\tau)$ являются вырожденными, апробирован на примере управления движением материальной точки, описываемым скалярным дифференциальным уравнением второй степени $\ddot{s} = w$.

В векторно-матричной форме уравнение объекта управления в отклонениях от номинального программного движения в данном случае представляется в виде $\dot{x} = Ax + BT(0)u$, где

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad T(\tau) = \|1\ \tau\|,$$

$$x = \begin{Vmatrix} \dot{s} \\ s \end{Vmatrix}, \quad u = \begin{Vmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Vmatrix}.$$

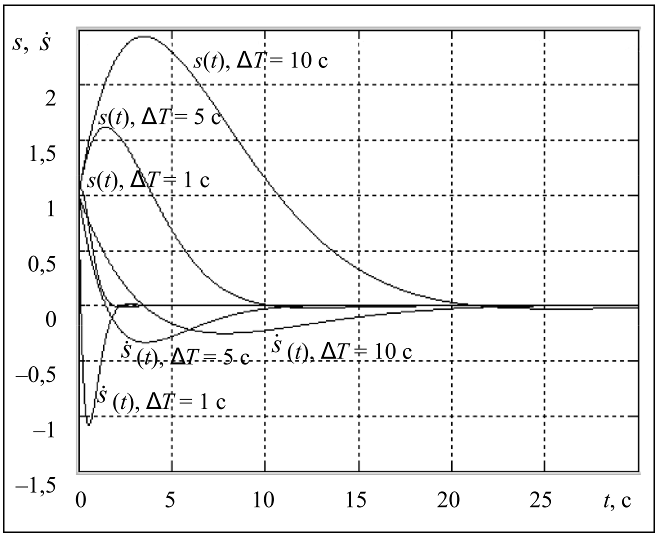

Рис. 1. Изменение координат вектора $x(t)$ в примере управления движением материальной точкой при $\Delta T = 10$ с, $\Delta T = 5$ с и $\Delta T = 1$ с

Исследовались варианты квазитеминальных алгоритмов при различных ΔT и начальных условиях $x_0^T = (1,\ 1)$.

Уравнение замкнутой системы имеет вид (9):

$$\dot{x} = (A - BT(0)\left(\int_0^{\Delta T} \exp(A\Delta T - \tau))BT(\tau)d\tau\right)^{-1} \exp(A\Delta T))x.$$

На рис. 1 представлено изменение компонент вектора $x(t)$, являющегося решением этого уравнения, при $\Delta T = 10$ с, $\Delta T = 5$ с и $\Delta T = 1$ с. Выше оси абсцисс расположены графики изменения координаты s, а под ними изображены графики изменения скорости $\dot{s}$.

Путем прямых вычислений в среде MATLAB матрицы Φ замкнутой системы и ее собственных значений для различных ΔT легко убедиться, что в данном случае

$$\frac{\partial z}{\partial u}(\Delta T) = \left\| \begin{matrix} \Delta T & \Delta T^2/2 \\ \Delta T^2/2 & \Delta T^3/6 \end{matrix} \right\|, \Phi(\Delta T) = \left\| \begin{matrix} -4/\Delta T & -6/\Delta T^2 \\ 1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

и $\lambda_{1,\,2}(\Delta T) = (-2 \pm \sqrt{2}\, i)/\Delta T$.

Таким образом, и в этом случае $\lim\limits_{\Delta T \to 0} \mathrm{Re}(\lambda_j(\Phi(\Delta T))) = -\infty$, и замкнутая система устойчива при любом $\Delta T > 0$ (т. е. можно положить $\Delta T_{\text{огр}} = \infty$, что, по-видимому, справедливо и в общем случае).

Пример 2. Случай неустойчивого многосвязного объекта управления с вырожденными матрицами A и $BT(\tau)$ исследован на примере управления движением объекта управления, описываемого системой дифференциальных уравнений второй степени:

$$\ddot{s} - 0{,}1\dot{s} - 0{,}1s - 0{,}1\dot{y} - 0{,}1y = w_1,$$

$$\ddot{y} - 0{,}1\dot{s} - 0{,}1s - 0{,}1\dot{y} - 0{,}1y = w_2.$$

В векторно-матричной форме уравнение объекта управления в отклонениях от номинального программого движения в данном случае представляется в виде $\dot{x} = Ax + BT(0)u$, где

$$A = \left\| \begin{matrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad B = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad T(\tau) = \left\| \begin{matrix} 1 & \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \tau \end{matrix} \right\|,$$

$$x = \left\| \begin{matrix} \dot{s} \\ s \\ \dot{y} \\ y \end{matrix} \right\|, \quad u = \left\| \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix} \right\|.$$

Исследовался квазитерминальный алгоритм управления при $\Delta T = 1$ с и начальных условиях $x_0^T = (1,\ 1,\ 2,\ 2)$.

Уравнение замкнутой системы имеет вид (9), где вычисленные в системе MATLAB численные значения компонент

$$\Phi = \left\| \begin{matrix} -3{,}9643 & -5{,}9123 & 0{,}0357 & 0{,}0877 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0357 & 0{,}0877 & -3{,}9643 & -5{,}9123 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$\lambda(\Phi) = \left\| \begin{matrix} -2 + 1{,}4142i \\ -2 - 1{,}4142i \\ -1{,}9643 + 1{,}4022i \\ -1{,}9643 - 1{,}4022i \end{matrix} \right\|.$$

На рис. 2 представлено изменение компонент вектора $x(t)$, являющегося решением этого уравнения. Графики изменения скоростей $\dot{s}$, $\dot{y}$ расположены под графиками изменения соответствующих координат.

Из приведенных примеров видно, что переходные процессы в системе при квазитерминальном управлении практически сходятся за время, равное $3\Delta T$.

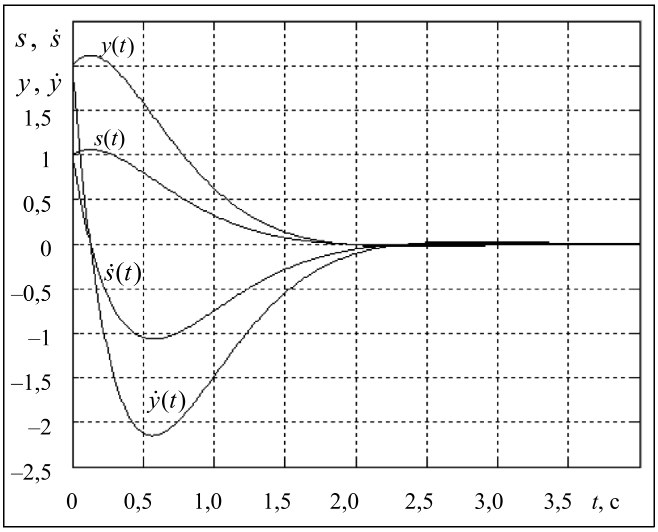

Рис. 2. Изменение координат вектора $x(t)$ в примере управления движением неустойчивого многосвязного объекта при $\Delta T = 1$ с

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Современные бортовые системы управления ракет-носителей представляют собой интегрированные, многосвязные комплексы терминального управления движением центра масс носителя и расходованием топлива, систем стабилизации относительно центра масс, управления подачей газа наддува в баки и режимами работы двигательной установки. Управления в отдельных подсистемах могут создавать возмущающие воздействия на смежные системы и вызывать в них неустойчивые процессы регулирования. Решение рассмотренной задачи квазитерминального управления позволяет обеспечить асимптотически устойчивое движение по всем координатам, минимизировать потери на управление и, в итоге, повысить энергетические характеристики ракеты-носителя. Эта задача, даже в упрощенном идеализированном варианте, оказывается достаточно сложной, а ее решение позволяет ответить на принципиальные вопросы, возникающие при разработке бортовых систем управления и других технических систем с заранее известной программой требуемого изменения координат вектора состояния.

Для стабилизации нелинейных объектов управления относительно заданной программы изменения координат состояния перспективно явное прицеливание в скользящие краевые условия. Оно позволит распространить хорошо разработанные вычислительные методы решения задач гибкого выведения ракет-носителей на задачи управления, решаемые в рамках оптимизационного подхода с применением прогнозирующих моделей — Model Predictive Control. Для линейных стационарных объектов в этих задачах предлагается применять квазитерминальные алгоритмы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сихарулидзе Ю.Г.* Баллистика и наведение летательных аппаратов. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011. — 407 с. [*Sikharulidze, Yu.G.* Ballistika i navedenie letatel'nykh apparatov. — M.: BINOM. Laboratoriya znanii, 2011. — 407 s. (In Russian)]
2. *Завадский В.К.*, *Иванов В.П.*, *Каблова Е.Б.*, *Кленовая Л.Г.* Алгоритмы терминального управления с прогнозированием невязок подвижных краевых условий // Проблемы управления. — 2017. — № 3. — С. 57—63. [*Zawadzki, V.K., Ivanov, V.P., Kablova, E.B., Klenovaya, L.G.* Terminal control algorithms with predictions of the moving boundary conditions residuals // Control Sciences. — 2017. — No. 3. — P. 1226—1233. (In Russian)]
3. *Завадский В.К.* Условно-оптимальное управление в терминальных системах с прогнозированием // Автоматика и телемеханика. — *1991. — № 9. — С. 63—72. [Zavadskii, V.K.* Conditionally optimal control in terminal systems with prediction // Automation and remote control. — 1991. — No. 9. — P. 63—72. (In Russian)]
4. *Батенко А.П.* Управление конечным состоянием движущихся объектов. — М.: Советское радио, 1977. — 256 с. [*Batenko, A.P.* Upravlenie konechnym sostoyaniem dvizhushchikhsya ob'ektov. — M.: Sovetskoe radio, 1977. — 256 s. (In Russian)]
5. *Гулько Ф.Б.*, *Новосельцева Ж.А.* Применение методов прогнозирования в задачах синтеза систем автоматического управления // VIII Всесоюзн. совещание по проблемам управления. Таллин, октябрь 1980 г. Тез. докл., кн. 1. — С. 32—34. [*Gul'ko, F.B., Novosel'tseva, Zh.A.* Primenenie metodov prognozirovaniya v zadachakh sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya // VIII Vsesoyuzn. soveshchanie po problemam upravleniya. Tallin, oktyabr' 1980 g. Tez. dokl., kn. 1. — S. 32—34. (In Russian)]
6. *Kamyar, R. Taheri, E.* Aircraft Optimal Terrain / Threat-Based Trajectory Planning and Control // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 2014. — Vol. 37, No. 2. — P. 466—483.
7. *Красовский А.А.*, *Буков В.Н.*, *Шендрик В.С.* Универсальные алгоритмы оптимального управления непрерывными процессами. — М.: Наука, 1977. — 272 с. [*Krasovskii, A.A., Bukov, V.N., Shendrik, V.S.* Universal'nye algoritmy optimal'nogo upravleniya nepreryvnymi protsessami. — M.: Nauka, 1977. — 272 s. (In Russian)]
8. *Klaučo, M.*, *Kalúz, M.*, *Kvasnica, M.* Real-time implementation of an explicit MPC-based reference governor for control of a magnetic levitation system // Control Engineering Practice. — 2017. — Vol. 60, No. 3. — P. 99—105.
9. *Буков В.Н.* Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. — М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. — 1987. — 232 с. [*Bukov, V.N.* Adaptivnye prognoziruyushchie sistemy upravleniya poletom. — M.: Nauka, 1987. — 232 s. (In Russian)]
10. *Langson, W.*, *Chryssochoos, I.*, *Rakovic, S.V.*, *Mayne, D.Q.* Robust model predictive control using tubes // Automatica. — 2004. — Vol. 40, No. 1. — P. 125—133.
11. *Веремей Е.И.*, *Еремеев В.В.*, *Сотникова М.В.* Введение в задачи управления на основе предсказаний // Model Predictive Control Toolbox. [*Veremei, E.I., Eremeev, V.V., Sotnikova, M.V.* Vvedenie v zadachi upravleniya na osnove predskazanii. (In Russian)] — URL: http // www.matlab.exponenta.ru> modelpredict /book1/.
12. *Проскурников А.В.*, *Якубович В.А.* Синтез регуляторов, обеспечивающих инвариантность системы управления // Тр. науч. семинара «70 лет теории инвариантности». Москва, 2 июня 2008 г. — М.: Изд-во ЛКИ, 2008. — С. 102—120. [*Proskurnikov, A.V., Yakubovich, V.A.* Sintez regulyatorov, obespechivayushchikh invariantnost' sistemy upravleniya // Tr. nauchnogo seminara «70 let teorii invariantnosti». Moskva, 2 iyunya 2008 g. — M.: Izd-vo LKI, 2008. — S. 102—120. (In Russian)]
13. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц / Изд. третье. — М.: Машиностроение, 1967. — 575 с. [*Gantmakher, F.R.* Teoriya matrits / Izd. tret'e. — M.: Mashinostroenie, 1967. — 575 s. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.В. Павловым.

Поступила в редакцию 28.12.2017, после доработки 5.04.2019. Принята к публикации 28.05.2019.

Завадский Владимир Константинович — канд. техн. наук,

Иванов Владимир Петрович — д-р техн. наук,

Каблова Елена Борисовна — инженер,

Кленовая Людмила Григорьевна — инженер,

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ vladguc@ipu.ru.

QUASI-TERMINAL CONTROLLERS SYNTHESIS

V.K. Zavadsky#, V.P. Ivanov, E.B. Kablova, L.G. Clenovaya

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

vladguc@ipu.ru

Abstract. In the class of linear algorithms of linear stationary multi-connected objects control the subclass is distinguished of quasi-terminal algorithms with implicit aiming at the boundary conditions moving along the program of the required change of the state vector coordinates and being at a fixed interval from the current time. Aiming is realized by calculating the programs of changing the future control vector components in the form of power series segments that depend on the future time and provide a solution of the two-point boundary value problem. In idealized model conditions of the complete controllability and the availability of an accurate information about the control object state and equations, as well as of the instantaneous and accurate implementation of the calculated commands, the quasi-terminal algorithm provides the asymptotic stability of a closed multi-connected system and as high pre-set rate of transients convergence as needed, regardless of whether the control object model is stable. The relatively simple and easy to implement in MATLAB non-optimization method of algorithm synthesis is suggested based on the use of the matrix representation of the control object model in the state space and of the apparatus of exponential functions of matrices. Quasi-terminal algorithms can be used in multi-connected stabilization systems and, in particular, in stabilization systems of mobile terminal objects with respect to trajectories calculated by the terminal control system.

Keywords: terminal control, predictive model, asymptotic stability.