УДК 519.874

ПОСТРОЕНИЕ РАСПИСАНИЙ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ ДЛЯ ПАРАЛЛЕЛЬНО РАБОТАЮЩИХ СИСТЕМ МАШИН И ПОТОЧНЫХ ЛИНИЙ

Ю.А. Зак

В развитие Flow-Shop-Problem рассмотрены постановки и математическая модель задачи построения расписаний для параллельно работающих систем машин в условиях заданной системы ограничений на сроки выполнения заданий. Исследованы свойства допустимых и оптимальных расписаний и предложены методы решения задачи с помощью последовательных алгоритмов оптимизации. Приведены числовые примеры.

Ключевые слова: система машин, параллельная работа, Flow-Shop-Problem, ограничения, сроки выполнения, допустимые и оптимальные расписания, оптимизация, последовательные алгоритмы.

ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваемая задача построения расписаний для параллельно работающих систем машин и автоматических (поточных) линий в некоторой степени обобщает классические задачи теории расписаний выполнения работ на параллельных машинах и Flow-Shop-Problem (см., например, работы [1—4]). В отличие от рассматриваемых в литературе обобщений в виде Hybrid Flow-Shop Scheduling Problem (см., например, работы [5—7]), где каждая *j*-я операция любого задания может выполняться на любой из параллельно стоящих на *j*-й стадии обработки *M* машинах (т. е. все последовательные стадии обработки всех операций одного задания не объединены в одну технологическую линию), в рассматриваемой постановке каждое из *N* заданий должно выполняться только на одной технологической линии, состоящей из *K* последовательно работающих машин. В публикациях [5—7]) были предложены только приближенные и эвристические методы решения этих задач без учета всего комплекса ограничений на сроки выполнения заданий и времена работы машин. В настоящей работе предложены точные методы решения сформулированной ниже важной для практических приложений проблемы.

На *M* параллельно работающих системах машин (участках, автоматических линиях), каждая из которых включает в себя *K* последовательно работающих машин, необходимо выполнить *N* заданий. Каждое задание состоит из одного и того же числа работ (операций), равном *K*, и может выполняться только на одной технологической линии. Операции всех заданий выполняются в одной и той же и одинаковой для всех заданий последовательности. Выполнение каждой операции может быть назначено только на соответствующей машине; т. е. первая операция выполняется на машине 1, вторая — на машине 2 и т. д., и *K*-я операция — на машине *K*. Заданы t_{ik}^{l} — времена выполнения *k*-й операции *i*-го задания на *l*-й технологической линии. Если в *i*-м задании *k*-я операция отсутствует, то полагаем значение $t_{ik}^{l} = 0$. Следовательно, все перемещения, связанные с окончанием выполнения задания на одной машине и началом выполнения его на другой, должны следовать в одном направлении. Рассматриваемая совокупность последовательно работающих машин каждой технологической линии представляет собой *систему конвейерного типа*.

Необходимо определить непересекающиеся подмножества заданий, выполняемых на каждой технологической линии, а также оптимальные последовательности выполнения заданий каждого из сформированных подмножеств, удовлетворяющие заданной системе ограничений на сроки выполнения заданий и времена работы машин и доставляющие экстремальное значение некоторому критерию оптимальности.

Рассматриваемая далее обобщенная постановка задачи Flow-Shop-Problem для параллельно работающих систем машин (технологических линий) может быть сформулирована в условиях следующих предпосылок.

- Система состоит из $l = 1, ..., M$ параллельно функционирующих технологических линий, каждая из которых включает в себя $k = 1, ..., K$ последовательно работающих машин (рабочих станций). Каждая машина во всех технологических линиях в любой момент времени может выполнять не более одной операции, номер которой равен номеру этой машины, и может начать выполнение операции с тем же номером другого задания только после завершения выполнения операции задания, стоящего в последовательности выполнения на данной технологической линии непосредственно перед ним. Временами переналадок, необходимыми при переходе машин от выполнения операции предыдущего задания к последующему, можно пренебречь.

- Необходимо выполнить N заданий. Выполнение каждого из заданий может быть назначено только на одну из технологических линий.
- Каждое задание состоит из некоторой последовательности работ (операций) $k = 1, ..., K$, которые должны выполняться в строго установленной и одинаковой для всех заданий последовательности друг за другом. При этом операция с индексом k может выполняться только на определенной технологическим регламентом машине с соответствующим индексом k.
- Длительности выполнения каждой из этих операций t_{ij}^l (t_{ik}^l) известны и могут быть различны для соответствующих машин различных технологических линий, они зависят от последовательности выполнения остальных заданий на этой или других машинах. Никакая из этих операций не допускает прерываний в процессе ее выполнения.
- Для каждого задания и для каждой машины всех рабочих станций могут быть заданы ограничения на начальные и конечные сроки его выполнения и времени работы, которые не могут быть нарушены. Если такие ограничения отсутствуют, то для начальных сроков эти граничные значения устанавливаются равными нулю, а для конечных — ∞.
- Все граничные значения и времена выполнения операций предполагаются целочисленными величинами.

Необходимо найти подмножества заданий, выполняемых на каждой технологической линии, а также последовательность выполнения заданий каждого из этих подмножеств, в условиях ограничений, что сроки начала и окончания работы машин, начала и завершения выполнения отдельных заданий удовлетворяют всей сформулированной системе ограничений. В качестве критериев оптимальности могут быть выбраны различные показатели эффективности построенного расписания. Как частный случай сформулированной задачи могут рассматриваться задачи, в которых ограничения на допустимые сроки выполнения заданий и работы машин отсутствуют.

В то время как для Flow-Shop-Problem и задачи построения расписаний выполнения работ на параллельных машинах разработаны алгоритмы получения точных и приближенных решений (см., например, работы [2—4, 8, 9]), исследованию свойств этой важной для практических приложений задачи не уделялось достаточного внимания в литературе. Автору не известны публикации, в которых были бы предложены эффективные методы решения сформулированной задачи для различного вида критериев оптимальности и в условиях заданной системы ограничений. В данной работе рассматривается математическая модель задачи построения расписаний на параллельно работающих системах машин, исследуются свойства допустимых и оптимальных расписаний и предлагаются точные и приближенные методы решения задачи последовательными алгоритмами оптимизации и эвристическими алгоритмами. Алгоритмы решения иллюстрируются числовым примером.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Так как номер операции однозначно определяет и номер машины, на которой она выполняется, то множество индексов (i, k, l) однозначно идентифицируют каждую операцию любого задания.

Введем обозначения:

$\Pi = \{1, ..., k, ..., K\}$ — последовательность выполнения операций, одинаковая для каждого задания;

$t(i, k, l)$ — время выполнения k-й операции i-го задания на k-й машине l-й технологической линии;

b_i, B_i — соответственно граничные сроки на начало и завершение выполнения i-го задания;

h^{lk}, H^{lk} — соответственно граничные начальные и конечные времена возможности использования k-й рабочей станции l-й технологической линии.

Если величины b_i или h^{lk} не заданы, то они полагаются равными нулю. В случае отсутствия граничных значений B_i или H^{lk} они полагаются равными ∞.

Обозначим:

$\tilde{I}^l = \{i_1^l, ..., i_p^l, ..., i_N^l\}$ и N^l — соответственно подмножество и число заданий, выполняемых на l-й технологической линии, $\tilde{I}^l \cap \tilde{I}^\lambda = \varnothing$, $l, \lambda = 1, ..., M$, $l \ne \lambda$; $\bigcup_{l=1}^{M} \tilde{I}^l = \tilde{I} = \{1, ..., N\}$; $\sum_{l=1}^{M} N^l = N$;

$x(i, k, l)$ — время начала выполнения операции (i, k, l);

$\theta(i, k, l)$ — допустимый наиболее ранний срок начала выполнения операции (i, k, l);

$\sigma(i, k, l) = x(i, k, l) + t(i, k, l) - 1$ — время завершения выполнения операции (i, k, l);

$T_i = \sigma(i, K, l)$ — время завершения выполнения всех операций i-го задания на l-й поточной линии;

$T = \max\limits_{1 \le l \le M} \max\limits_{i \in \tilde{I}_l} T_i = \sigma(i, K, l)$ — время окончания выполнения всего множества заданий.

Ограничения на начало выполнения каждой операции первого из выполняемых заданий на каждой из технологических линий имеют вид:

$$x(i_1^l, 1, l) \geqslant \theta(i_1^l, 1, l) = \max(b_i, h^{l1}), \quad l = 1, ..., M;$$

$$x(i_1^l, k, l) \geqslant \theta(i_1^l, 1, l) = \max(\sigma(i_1^l, k - 1, l) + 1, h^{lk}),$$
$$k = k + 1, ..., K, \quad l = 1, ..., M. \tag{1}$$

Допустимый наиболее ранний срок начала выполнения операций (i, k, l) определяется выражением

$$x(i, 1, l) \geqslant \theta(i, 1, l) = \sigma(i - 1, 1, l) + 1,$$
$$x(i, k, l) \geqslant \theta(i, k, l) =$$
$$= \max\{\sigma(i - 1, k, l), \sigma(i, k - 1, l)\} + 1,$$
$$(i - 1) = i_1^l, \quad i = i_2^l, ..., i_N^l, \quad k = k + 1, ..., K,$$
$$l = 1, ..., M, \tag{2}$$

где

$$\sigma(i_1^l - 1, k, l) = 0, \quad i = i_1^l, i_2^l, ..., i_N^l. \tag{3}$$

Ограничения на времена завершения выполнения заданий могут быть представлены в виде

$$T_i = \sigma(i, K, l) \leqslant \min(B_i; H^{lK}),$$
$$i = 1, ..., N, \quad l = 1, ..., M. \tag{4}$$

В качестве критериев оптимальности могут рассматриваться следующие показатели:

— выполнение расписания в кратчайшие сроки

$$F_1 = \min \max_{1 \le l \le M} \max_{i \in \tilde{I}_l} \sigma(i, K, l), \tag{5}$$

— минимальное средневзвешенное время, затраченное на выполнение всех заданий

$$F_2 = \sum_{i=1}^{N} w_i \sigma(i, K, l); \tag{6}$$

— минимальное суммарное или средневзвешенное время технологических линий

$$F_3 = \sum_{l=1}^{M} \beta_l \sigma(i^{N_l}, K, l); \tag{7}$$

— минимальное суммарное или средневзвешенное время работы машин всех технологических линий

$$F_4 = \sum_{l=1}^{M} \sum_{k=1}^{K} \eta_{lk} \sigma(i^{N^l}, k, l).$$

В выражениях (6) и (7) $w_i \geqslant 0$, $i = 1, ..., N$, и $\beta_l \geqslant 0$, $l = 1, ..., M$, $\eta_{lk} \geqslant 0$ — некоторые весовые коэффициенты, удовлетворяющие условиям нормировки

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1, \quad \sum_{l=1}^{M} \beta_l = 1, \quad \sum_{l=1}^{M} \sum_{k=1}^{K} \eta_{lk} = 1.$$

2. СВОЙСТВА ДОПУСТИМЫХ И ОПТИМАЛЬНЫХ РАСПИСАНИЙ

Обозначим: $\bar{t}(i, k) = \bar{t}(i, k, l) = \min\limits_{1 \le l \le M} t(i, k, l)$; $\bar{h}^k = \min\limits_{1 \le l \le M} h^{lk}$; $\hat{H}^k = \max\limits_{1 \le l \le M} H^{lk}$; $k = 1, ..., K$.

Пусть известны подмножества выполняемых заданий на каждой поточной линии $\tilde{I}^l$, $l = 1, ..., M$.

Вычислим значения ранних сроков завершения выполнения работ на k-й машине ($\bar{g}^{lk}$), на последних $(K - k)$ машинах ($k = 1, 2, ..., \gamma, ..., K - 1$) каждой технологической линии $\bar{G}^{lk}$, а также оценку нижней границы времени выполнения всех заданий на k-й машине на всех линиях — $\bar{R}^k$

$$\bar{g}^{lk} = \min_{i \in \tilde{I}_l} \left[\theta(i, 1, l) + \sum_{\gamma=1}^{k} t(i, \gamma, l) \right],$$
$$l = 1, ..., M, \quad k = 1, ..., K; \tag{8}$$

$$\bar{G}^{lk} = \min_{i \in \tilde{I}_l} \sum_{\gamma=k}^{k} t(i, \gamma, l), \quad l = 1, ..., M, \quad k = 1, ..., K;$$

$$\bar{R}^k = E\left[\frac{1}{N}\left(\bar{h}^k + \sum_{i=1}^{N} \bar{t}(i, k)\right)\right], \quad k = 1, ..., K. \tag{9}$$

Здесь и в дальнейшем $E[a]$ — наибольшее целое значение величины в квадратных скобках, т. е.

$$E[a] = \begin{cases} |a|, \text{если } |a| = a, \\ |a| + 1, \text{если } |a| < a \le |a| + 1, \end{cases}$$

где $|a|$ — целая часть числа a.

Утверждение 1. *Время завершения выполнения всех заданий на параллельно работающих системах машин (значение критерия оптимальности F_1) не может быть меньше величины*

$$F_1 \geqslant \xi_0(F_1) = \max_{1 \le l \le M} \max_{1 \le k \le K} (\bar{g}^{lk} + \bar{G}^{lk} - 2t(i, k, l)). \ \blacklozenge$$

Определим времена начала $\hat{L}^{lk}$ и завершения $\overline{Q}^{lk}$ выполнения всех работ на каждой из машин всех поточных линий $k = 1, ..., K$, $l = 1, ..., L$:

$$\hat{L}^{l1} = \max[h^{l1}, \min_{1 \le i \le N} b_i],$$
$$\overline{Q}^{l1} = \max[h^{l1}, \min_{1 \le i \le N} b_i] + \sum_{i \in \tilde{I}^l} t(i, 1, l),$$
$$l = 1, ..., L; \qquad (10)$$

$$\hat{L}^{lk} = \max\{h^{lk}; \min_{i \in \tilde{I}^l} [\theta(i, (k-1), l) + t(i, (k-1), l)]\},$$
$$k = 2, ..., K, \quad l = 1, ..., L; \qquad (11)$$

$$\overline{Q}^{lk} = \hat{L}^{lk} + \sum_{i \in \tilde{I}^l} t(i, k, l),$$
$$k = 2, ..., K, \quad l = 1, ..., L, \qquad (12)$$

где значения $\theta(i, (k-1), l)$ вычисляются по формулам (1) и (2).

Утверждение 2. *Время завершения выполнения всех заданий не может быть меньше величины*

$$F_1 \geqslant \xi_1(F_1) =$$
$$= \max_{1 \le l \le M} \max_{1 \le k \le K} \left(\overline{Q}^{lk} + \overline{G}^{lk} - 2 \sum_{i \in \tilde{I}^l} t(i, l, k) \right). \blacklozenge$$

В случае отсутствия ограничений на времена работы машин и сроки начала и завершения выполнения заданий ($h^{kl} = b_i = 0$, $H^{kl} = B_i = \infty$; $k = 1, ..., K$, $l = 1, ..., L$, $i = 1, ..., N$) выражения (8)—(10) упрощаются:

$$\overline{g}^{lk} = \min_{i \in \tilde{I}^l} \sum_{\gamma = 1}^{k} t(i, \gamma, l), \; \overline{R}^k = E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \bar{t}(i, k)\right],$$

$$\hat{L}^{l1} = \sum_{i \in \tilde{I}^l} t(i, 1, l), \quad k = 1, ..., K, \quad l = 1, ..., L,$$

и оценки значения критерия оптимальности $\xi_0(F_1)$ и $\xi_1(F_1)$ вычисляются по более простым формулам.

Обозначим: $\tilde{J}_1^{l\omega}$ и $\tilde{V}_1^{l\omega}$, $\tilde{J}_2^{l\omega}$ и $\tilde{V}_2^{l\omega}$ — соответственно подмножества и подпоследовательности выполнения заданий на l-й поточной линии в ω-м подмножестве анализируемых вариантов, развитие которых в дальнейшем соответственно целесообразно, и после того, как построены все допустимые последовательности для данной линии; $\sigma_k(\tilde{V}_1^{l\omega})$, $k = 1, ..., K$, — времена завершения выполнения всех заданий на k-й машине для последовательности $\tilde{V}_1^{l\omega}$; $f_p(\tilde{V}_1^{l\omega})$ — значение соответствующего критерия оптимальности для последовательности $\tilde{V}_1^{l\omega}$. В частном случае $f_1(\tilde{V}_1^{l\omega}) = \sigma_K(\tilde{V}_1^{l\omega})$.

Утверждение 3. *Если для двух вариантов* ω *и* π *в процессе построения последовательностей выполнения заданий на некоторой l-й поточной линии справедливы соотношения*

$$\tilde{J}_1^{l\pi} \subseteq \tilde{J}_1^{l\omega}, \quad \sigma_k(\tilde{V}_1^{l\omega}) \leqslant \sigma_k(\tilde{V}_1^{l\pi}), \quad k = 1, ..., K;$$
$$f_p(\tilde{V}_1^{l\omega}) \leqslant f_p(\tilde{V}_1^{l\pi}), \quad p = 1, ..., P, \qquad (13)$$

и хотя бы одно из неравенств выполняется как строгое неравенство, то последовательность $\tilde{V}_1^{l\omega}$ *предпочтительнее последовательности* $\tilde{V}_1^{l\omega}$ $\tilde{V}_1^{l\pi}$*, и последняя может быть исключена из рассмотрения как неперспективная.* ♦

Следствие. Если справедливы соотношения

$$\tilde{J}_2^{l\pi} \subseteq \tilde{J}_2^{l\omega}, \quad \sigma_K(\tilde{V}_2^{l\omega}) \leqslant \sigma_K(\tilde{V}_2^{l\pi}), \quad f_p(\tilde{V}_2^{l\omega}) \leqslant f_p(\tilde{V}_2^{l\pi}),$$
$$p = 1, ..., P, \qquad (14)$$

то последовательность $\tilde{V}_2^{l\omega}$ предпочтительнее последовательности $\tilde{V}_2^{l\pi}$, и последняя может быть исключена из рассмотрения как неперспективная. ♦

Правило отсева (14) может применяться, когда построены все допустимые последовательности $\tilde{V}_2^{l\omega}$, а правило (13) — в процессе их построения.

Обозначим $\Omega^w(\lambda)$ — w-й рассматриваемый вариант объединения λ-последовательностей $\tilde{V}_2^{l\omega}$ подмножества заданий $\tilde{J}_2^{l\pi}$, $l = 1, 2, ..., \lambda$, выполняемых на первых λ-поточных линиях, $\lambda = 2, ..., L$; $\tilde{J}[\Omega^w(\lambda)]$ — подмножество заданий, входящих в $\Omega^w(\lambda)$;

$$\tilde{J}[\Omega^w(\lambda)] = \bigcup_{l=1}^{\lambda} \tilde{J}_2^{l\omega}, \text{ где } \tilde{J}_2^{l_1\omega} = \varnothing,$$
$$l_1, l_2 = 1, ..., \lambda, \quad l_1 \neq l_2. \qquad (15)$$

$F_p[\Omega^w(\lambda)]$ — значение соответствующего критерия оптимальности для $\Omega^w(\lambda)$. Так, например,

$$F_1[\Omega^w(\lambda)] = \max_{1 \le l \le \lambda} \sigma_K(\tilde{J}_1^{l\omega}),$$
$$F_2[\Omega^w(\lambda)] = \sum_{l=1}^{\lambda} \sigma_K(\tilde{J}_1^{l\omega}). \qquad (16)$$

Утверждение 4. *Если для двух вариантов* w_1 *и* w_2 *объединения последовательностей* $\Omega^{w_1}(\lambda)$ *и* $\Omega^{w_2}(\lambda)$ *справедливы соотношения*

$$\tilde{J}[\Omega^{w_2}(\lambda)] \subseteq \tilde{J}[\Omega^{w_1}(\lambda)];$$
$$F_p[\Omega^{w_1}(\lambda)] \leqslant F_p[\Omega^{w_2}(\lambda)], \qquad (17)$$

и хотя бы одно из неравенств выполняется как строгое неравенство, то объединение $\Omega^{w_1}(\lambda)$ *предпочти-*

тельнее $\Omega^{w_2}(\lambda)$*, и объединение* $\Omega^{w_2}(\lambda)$ *может быть исключено из рассмотрения как неперспективное.*

Оценки возможности выполнения заданной системы ограничений. Положив $\sigma(i, 0, l) = 0$, вычислим времена начала и завершения выполнения работ на каждой машине

$$x(i, k, l) = \max(h^k, \sigma(i, k-1, l) + 1),$$
$$\sigma(i, k, l) = x(i, 1, l) + t(i, k, l) - 1,$$
$$i = 1, ..., N, \quad k = 1, ..., K, \quad l = 1, ..., L.$$

Утверждение 5. *Если для некоторой пары индексов* $(\hat{i}, \hat{l})$ *справедливо неравенство*

$$\sigma(\hat{i}, K, \hat{l}) > B_{\hat{i}}, \qquad (18)$$

то выполнение $\hat{i}$*-го задания на* $\hat{l}$*-й поточной линии недопустимо. Если для некоторого* $\hat{i}$*-го задания неравенство* (18) *справедливо для всех значений индексов* $\hat{l} = 1, ..., L$*, то система неравенств задачи несовместимая.* ♦

Пусть на некотором s-м шаге решения задачи определены $\tilde{I}^{sl}$ — подмножества заданий, выполняемых на l-й поточной линии.

Упорядочим все задания $i \in \tilde{I}^{sl}$ в последовательность

$$\tilde{U}^{sl} = \{u_1^{ls}, u_2^{ls}, ..., u_p^{ls}, ..., u_P^{ls} | u_p^{ls} \in \tilde{I}^{ls},$$
$$p = 1, ..., P; B(u_p^{ls}) \leqslant B(u_{p+1}^{ls}), p = 1, ..., P-1\},$$

где P — число элементов подмножества $\tilde{I}^{sl}$.

Вычислим значения

$$x(u_1^{ls}, 1, l) \geqslant \theta(u_1^{ls}, 1, l) = \max(b_i, h^{l1}),$$
$$x(i, k, l) \geqslant \theta(i, k, l) = \max\{\sigma(i-1, k, l),$$
$$\sigma(i, k-1, l)\} + 1, \quad i = u_2^{ls}, ..., u_p^{ls}, ..., u_P^{ls},$$

и, если $i = u_p^{ls}$, то $(i - 1) = u_{p-1}^{ls}$;

$$\sigma(i, 1, l) = x(i, 1, l) + t(i, 1, l) - 1,$$
$$i = u_1^{ls}, ..., u_2^{ls}, ..., u_p^{ls}, ..., u_P^{ls}.$$

$$Y^s(k, l) = \sum_{i \in \tilde{I}^{ls}} t(i, k, l), \ \bar{g}^s(k, l) =$$
$$= \min_{i \in \tilde{I}^{ls}} \left[\theta(i, 1, l) + \sum_{\gamma=1}^{k-1} t(i, \gamma, l)\right],$$
$$\bar{G}^s(k, l) = \min_{i \in \tilde{I}^{ls}} \sum_{\gamma=k+1}^{K} t(i, \gamma, l),$$
$$\tilde{I}^{l,s} = \{i_1^{ls}, i_2^{ls}, ..., i_p^{ls}, ..., i_P^{ls}\}.$$

Утверждение 6. *Если выполняется хотя бы одно неравенство из системы неравенств*

$$\sigma(i, L, l) > B_i, \quad i \in \tilde{I}^{l,s},$$

то подмножество заданий $\tilde{I}^{sl}$ *не может быть выполнено на l-й поточной линии в установленные ограничениями сроки, и строящееся расписание не содержит допустимых решений.* ♦

Утверждение 7. *Если выполняется хотя бы одно из неравенств системы неравенств*

$$Y^s(k, l) + \bar{g}^s(k, l) + \bar{G}^s(k, l) > B_i,$$
$$k = 1, 2, ..., K, \quad i \in \tilde{I}^{l,s},$$

то подмножество заданий $\tilde{I}^{sl}$ *не может быть выполнено на l-й поточной линии в установленные ограничениями сроки, и строящееся расписание не содержит допустимых решений.* ♦

Доказательства утверждений 6 и 7 приведены в работе автора [4].

3. АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Рассматриваемые задачи относятся к классу NP-сложных задач. Рассмотрим методы решения задачи с помощью алгоритмов динамического программирования [10] путем последовательного анализа с отсевом неперспективных вариантов [11]. Алгоритмы решения задачи состоят из двух этапов. На первом из них строятся различные допустимые и перспективные последовательности выполнения заданий на каждой из поточных линий

$$\tilde{V}_1^{l\omega} = \{v_1^{l\omega}, v_2^{l\omega}, ..., v_{P(l\omega)}^{l\omega}\},$$
$$l = 1, ..., L, \quad \omega = 1, ..., W,$$

где $v_p^{l\omega}$ — номера заданий, входящих в последовательность $\tilde{V}_1^{l\omega}$, а $P(l, \omega)$ — число заданий в этой последовательности.

В процессе построения этих последовательностей вычисляются времена начала и завершения выполнения всех работ каждого из заданий на каждой машине по формулам и отсеиваются варианты, не удовлетворяющие системе ограничений задачи. В процессе построения на основе правил отсева (13) и (14) (см. утверждение 3) производится отсев бесперспективных вариантов. В результате выполнения первого этапа будут построены последовательности $\tilde{V}_1^{l\omega}$ и $\tilde{V}_2^{l\omega}$, объединение которых в множество последовательностей $\Omega^r(\lambda)$, $r = 1, ..., R$, обеспечит получение допустимых и оптимальных по различным критериям оптимальности решений.

На втором этапе решения последовательно $\lambda = 2, ..., L$ рассматриваем различные r-е варианты $\Omega^r(\lambda)$ объединения последовательностей $\tilde{V}_2^{l\omega}$, $l = 1, 2, ..., \lambda$, удовлетворяющие соотношениям (15) с отсевом неперспективных продолжений на основе правила отсева (17), сформулированного утверждением 4.

Пусть $P\{\Omega^r(\lambda)\}$ — число заданий во множестве $\Omega^r(\lambda)$. При построении $\Omega^r(\lambda + 1)$ рассматриваются только такие последовательности выполнения заданий на линиях $l = (\lambda + 1), ..., L$, для которых справедливо соотношение

$$P\{\Omega^r(\lambda)\} + \max_{\substack{(\lambda+2) \le \mu \le L \\ l \ne \mu}} \max_{1 \le \omega \le W} P(\mu, \omega) + P(\lambda + 1, w) \geqslant N, \quad w = 2, ..., W. \quad (19)$$

Далее приводится формальная схема алгоритма.

На первом этапе решения для каждой поточной линии $l = 1, ..., L$ строятся последовательно все допустимые последовательности $\tilde{V}_1^{l\omega}$ выполнения n различных заданий $p = 2, 3, ..., P(l, \omega)$.

Времена начала и завершения выполнения всех работ каждого задания вычисляются по формулам (1)—(4), (10)—(12). Если время завершения выполнения p-го задания $T_p^{l\omega} = \sigma^{l\omega}(p, K, l) > \max(B_p, H^{Kl})$ или $\sigma^{l\omega}(p, K, l) > H^{kl}$, то строящаяся последовательность отбрасывается как недопустимая.

Кроме того, в процессе построения на основе соотношений (13) и (14) исключаются последовательности, не содержащие оптимальных решений. Для дальнейшего рассмотрения оставляются в каждой поточной линии только те последовательности выполнения заданий $\tilde{V}_2^{l\omega}$, число заданий в которых удовлетворяют соотношению (19).

На втором этапе решения последовательно строятся различные варианты объединений последовательностей:

$$\Omega^{2,r} = \{\tilde{V}_2^{1,\omega_1}, \tilde{V}_2^{2,\omega_2}\},$$

$$\Omega^{3,s} = \{\Omega^{2,r}, \tilde{V}_2^{3,\omega}\}, ..., \Omega^{l,s} = \{\Omega^{l-1,r}, \tilde{V}_2^{l,\omega}\}, ..., \Omega^{L,s} = \{\Omega^{L-1,r}, \tilde{V}_2^{L,\omega}\}.$$

Допустимые множества объединений последовательностей $\Omega^{l,s} = \{\Omega^{l-1,r}, \tilde{V}_2^{l,\omega}\}$, $l = 2, ..., L$, $w = 1, ..., W$, s, $r = 1, ..., R$, должны удовлетворять соотношениям (15). Для построенных множеств $\Omega^{l,s}$ вычисляется значение соответствующего критерия оптимальности (например, по формулам (16)). Среди построенных подмножеств объединений последовательностей $\Omega^{l,s}$ на основе правила отсева (17), сформулированного утверждением 4, осуществляется отсев объединений, не содержащих оптимальных решений.

После выполнения l-го шага построения допустимых и перспективных объединений последовательностей выполнения заданий на первых l линиях $\Omega^{L,r}$, $r = 1, ..., R$, среди допустимых последовательностей выполнения заданий на оставшихся линиях $\lambda = (l + 1), ..., L$ оставляем только последовательности $\tilde{V}_2^{\lambda,\omega}$, число выполняемых заданий в которых

$$P(\lambda, w) \geqslant N - \left[\max_{1 \le r \le R} P\{\Omega^r(l)\} + \sum_{\substack{\mu = (l+1), \\ \mu \ne \lambda}}^{L} \max_{1 \le \omega \le W} P(\mu, \omega)\right], \quad \lambda = (l + 1), ..., L.$$

Если существуют допустимые объединения последовательностей $\Omega^{L,s} = \{\Omega^{L-1,r}, \tilde{V}_2^{L,\omega}\}$, $s = 1, ..., S$, то задача имеет S различных допустимых решений, значения критериев оптимальности которых соответственно равны $F_p(\Omega^{L,s})$. Оптимальным решением задачи является расписание, удовлетворяющее соотношению

$$F_p(\bar{\Omega}^L) = \min_{1 \le s \le S} F_p(\Omega^{L,s}),$$

где $F_p(\Omega^{L,s})$ — соответствующий вид критерия оптимальности.

Так, например,

$$F_1(\bar{\Omega}^L) = \min_{1 \le s \le S} F_1(\Omega^{L,s}) = \min_{1 \le s \le S} \max_{1 \le l \le L} \sigma[v_{P(l,s)}^{l,s}, K, l],$$

$$F_3(\bar{\Omega}^L) = \min_{1 \le s \le S} F_3(\Omega^{L,s}) = \min_{1 \le s \le S} \sum_{l=1}^{L} \beta_l \sigma[v_{P(l,s)}^{l,s}, K, l].$$

4. ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

На трех поточных линиях, каждая из которых состоит из трех машин, необходимо выполнить восемь заданий. Каждое из заданий может выполняться только на одной из поточных линий и состоит из трех операций, которые должны выполнятся в строго заданной последовательности на последовательно расположенных машинах. Времена выполнения операций каждого из заданий на соответствующих машинах этих линий, допустимые времена начала и директивные сроки завершения выполнения каждого из заданий, а также допустимые времена работы всех машин каждой поточной линии приведены в табл. 1 и 2.

В результате выполнения первого этапа алгоритма получены следующие допустимые и перспективные расписания выполнения заданий на технологических линиях.

Первая технологическая линия:

1) $\tilde{V}^{1,1} = \{7\}$, $\sigma(\tilde{V}^{1,1}) = 28$;

2) $\tilde{V}^{1,2} = \{7, 1\}$, $\sigma(\tilde{V}^{1,2}) = 33$;

3) $\tilde{V}^{1,3} = \{7, 2\}$, $\sigma(\tilde{V}^{1,3}) = 37$;

4) $\tilde{V}^{1,4} = \{7, 5\}$; $\sigma(\tilde{V}^{1,4}) = 33$;

5) $\tilde{V}^{1,5} = \{7, 1, 3\}$, $\sigma(\tilde{V}^{1,5}) = 36$;

6) $\tilde{V}^{1,6} = \{7, 1, 5\}$, $\sigma(\tilde{V}^{1,6}) = 39$;

7) $\tilde{V}^{1,7} = \{7, 3, 5\}$, $\sigma(\tilde{V}^{1,7}) = 38$;

8) $\tilde{V}^{1,8} = \{7, 5, 3\}$, $\sigma(\tilde{V}^{1,8}) = 36$.

Так как $\sigma(\tilde{V}^{1,8}) < \sigma(\tilde{V}^{1,7})$, а $\tilde{I}^{1,8} = \tilde{I}^{1,7}$, то на основе правил предпочтения последовательность $\tilde{I}^{1,7}$ исключается из дальнейшего рассмотрения как неперспективная.

Таблица 1

Времена выполнения операций на машинах поточных линий

№ задания	Времена выполнения операций на машинах поточных линий									Допустимые сроки выполнения заданий	
	На машинах первой линии			На машинах второй линии			На машинах третьей линии			Начало	Завершение
1	4	8	5	6	7	6	3	9	7	5	38
2	5	7	10	6	6	12	7	8	9	10	40
3	10	2	3	8	1	4	9	5	4	3	50
4	6	7	8	7	5	8	6	7	9	1	25
5	3	5	6	2	7	4	4	4	4	4	60
6	6	10	3	6	9	7	5	8	6	5	27
7	7	8	8	6	9	10	10	8	8	2	28
8	3	6	7	5	5	9	4	5	7	3	20

Таблица 2

Допустимые времена работы машин

Времена работы машин	Первая линия (номера машин)			Вторая линия (номера машин)			Третья линия (номера машин)		
	№ 1	№ 2	№ 3	№ 1	№ 2	№ 3	№ 1	№ 2	№ 3
Начало	6	6	6	1	5	5	5	5	5
Завершение	40	40	40	40	40	40	40	40	40

Вторая технологическая линия:

1) $\tilde{V}^{2,1} = \{4\}$, $\sigma(\tilde{V}^{2,1}) = 20$;

2) $\tilde{V}^{2,2} = \{4, 1\}$, $\sigma(\tilde{V}^{2,2}) = 26$;

3) $\tilde{V}^{2,3} = \{4, 2\}$, $\sigma(\tilde{V}^{2,3}) = 33$;

4) $\tilde{V}^{2,4} = \{4, 3\}$, $\sigma(\tilde{V}^{2,4}) = 24$;

5) $\tilde{V}^{2,5} = \{4, 5\}$, $\sigma(\tilde{V}^{2,5}) = 24$;

6) $\tilde{V}^{2,6} = \{4, 1, 3\}$, $\sigma(\tilde{V}^{2,6}) = 32$;

7) $\tilde{V}^{2,7} = \{4, 1, 5\}$, $\sigma(\tilde{V}^{2,7}) = 32$;

8) $\tilde{V}^{2,8} = \{4, 2, 3\}$, $\sigma(\tilde{V}^{2,8}) = 37$;

9) $\tilde{V}^{2,9} = \{4, 2, 5\}$, $\sigma(\tilde{V}^{2,9}) = 37$;

10) $\tilde{V}^{2,10} = \{4, 3, 1\}$, $\sigma(\tilde{V}^{2,10}) = 34$;

11) $\tilde{V}^{2,11} = \{4, 3, 2\}$, $\sigma(\tilde{V}^{2,11}) = 39$;

12) $\tilde{V}^{2,12} = \{4, 3, 5\}$; $\sigma(\tilde{V}^{2,12}) = 28$;

13) $\tilde{V}^{2,14} = \{4, 5, 1\}$, $\sigma(\tilde{V}^{2,12}) = 32$;

14) $\tilde{V}^{2,14} = \{4, 5, 3\}$, $\sigma(\tilde{V}^{2,14}) = 28$.

15) $\tilde{V}^{2,15} = \{4, 3, 5, 1\}$, $\sigma(\tilde{V}^{2,15}) = 37$;

16) $\tilde{V}^{2,16} = \{4, 5, 1, 3\}$, $\sigma(\tilde{V}^{2,16}) = 36$;

17) $\tilde{V}^{2,17} = \{4, 5, 3, 1\}$, $\sigma(\tilde{V}^{2,17}) = 36$.

Так как $\sigma(\tilde{V}^{2,6}) < \sigma(\tilde{V}^{2,10})$, $\tilde{I}^{2,6} = \tilde{I}^{2,10}$, $\sigma(\tilde{V}^{2,8}) < \sigma(\tilde{V}^{2,11})$ и $\tilde{I}^{2,8} = \tilde{I}^{2,11}$, а также $\sigma(\tilde{V}^{2,13}) = \sigma(\tilde{V}^{2,7})$ и $\tilde{I}^{2,13} = \tilde{I}^{2,7}$, то последовательности $\tilde{V}^{1,10}$, $\tilde{V}^{2,11}$ и $\tilde{V}^{2,13}$ исключаются из дальнейшего рассмотрения как неперспективные. Так как $\sigma(\tilde{V}^{2,16}) = \sigma(\tilde{V}^{2,17}) < \sigma(\tilde{V}^{2,15})$, $\tilde{I}^{2,15} = \tilde{I}^{2,16} = \tilde{I}^{2,17}$, то на втором этапе алгоритма достаточно рассмотреть только последовательность $\tilde{V}^{2,16}$.

Третья технологическая линия:

1) $\tilde{V}^{3,1} = \{8\}$, $\sigma(\tilde{V}^{3,1}) = 20$;

2) $\tilde{V}^{3,2} = \{8, 6\}$, $\sigma(\tilde{V}^{3,2}) = 27$;

3) $\tilde{V}^{3,3} = \{8, 6, 1\}$, $\sigma(\tilde{V}^{3,3}) = 37$;

4) $\tilde{V}^{3,4} = \{8, 6, 2\}$, $\sigma(\tilde{V}^{3,4}) = 38$;

5) $\tilde{V}^{3,5} = \{8, 6, 3\}$, $\sigma(\tilde{V}^{6,5}) = 31$;

6) $\tilde{V}^{3,6} = \{8, 6, 5\}$, $\sigma(\tilde{V}^{3,6}) = 31$.

7) $\tilde{V}^{3,7} = \{8, 6, 3, 5\}$, $\sigma(\tilde{V}^{3,7}) = 35$;

8) $\tilde{V}^{3,8} = \{8, 6, 5, 3\}$, $\sigma(\tilde{V}^{3,8}) = 35$.

Так как $\sigma(\tilde{V}^{3,7}) = \sigma(\tilde{V}^{3,8})$, $\tilde{I}^{3,7} = \tilde{I}^{3,8}$, то на втором этапе алгоритма достаточно рассмотреть только последовательность $\tilde{V}^{3,7}$.

На втором этапе решения задачи получены следующие допустимые и перспективные объединения последовательностей заданий, выполняемых на различных поточных линиях:

1) $\bar{\Omega}_1 = \{\tilde{V}^{1,2}, \tilde{V}^{2,8}, \tilde{V}^{3,6}\}$, $\bar{T}(\bar{\Omega}_1) = (33, 37, 31)$, $F_1(\bar{\Omega}_1) = 37$;

2) $\bar{\Omega}_2 = \{\tilde{V}^{1,2}, \tilde{V}^{2,9}, \tilde{V}^{3,5}\}$, $\bar{T}(\bar{\Omega}_2) = (33, 37, 31)$, $F_1(\bar{\Omega}_2) = 37$;

3) $\bar{\Omega}_3 = \{\tilde{V}^{1,5}, \tilde{V}^{2,3}, \tilde{V}^{3,6}\}$, $\bar{T}(\bar{\Omega}_3) = (36, 33, 31)$, $F_1(\bar{\Omega}_3) = 36$;

4) $\bar{\Omega}_4 = \{\tilde{V}^{1,2}, \tilde{V}^{2,3}, \tilde{V}^{3,7}\}$, $\bar{T}(\bar{\Omega}_4) = (33, 33, 35)$, $F_1(\bar{\Omega}_4) = 35$.

Так как все остальные допустимые объединения последовательностей выполнения заданий дают не лучшие, чем $F_1(\bar{\Omega}_4)$, результаты, то получено оптимальное решение задачи $\bar{\Omega}_4 = \{\tilde{V}^{1,2} = (7, 1)$, $\tilde{V}^{2,3} = (4, 2)$, $\tilde{V}^{3,6} = (8, 6, 3, 5)\}$. Времена начала и завершения выполнения операций на различных машинах каждой из линий для построенного расписания приведены в табл. 3.

5. ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ АЛГОРИТМА

Система состоит из M технологических линий; $M_1 \leqslant M$ — число различных по техническим характеристикам технологических линий. Каждая технологическая линия содержит K машин, выполняющих N заданий, предусматривающих выполнение K операций. В условиях отсутствия системы ограничений требуемое число операций на первом этапе решения составляет Π_1 вычислений, рассчитываемых по формулам (1)—(3), а также Π_2 операций сравнения для отсева неперспективных продолжений. Значения Π_1 и Π_2 вычисляются по формулам:

$$\Pi_1 = O\left\{M_1\left[R_1 + \sum_{i=2}^{N} 0{,}5[R_{i-1}(R_{i-1} - 1)]\right]\right\},$$

$$\Pi_2 = M_1 \sum_{i=1}^{N} R_i!,$$

где $R_1 = N$; $R_i = 0{,}5R_{i-1}(R_{i-1} - 1)$, $i = 2, ..., N$.

Число операций на втором этапе решения задачи $\Pi_3 = O\left\{\left[\sum_{i=1}^{N} R_i\right]^M\right\}$.

В случае ограничений объем вычислений существенно сокращается. Так, например, если время работы технологических линий не может превышать минимального для времени выполнения $n < N$ заданий, и при наличии ограничений на сроки выполнения заданий в результате отсева недопустимых вариантов, значения R_i, $i = 1, ..., N$, становятся существенно меньшими. Вследствие этого при вычислении значения Π_1 число элементов суммирования сокращается, что приведет соответственно к уменьшению значений Π_1, Π_2 и Π_3.

Автором был выполнен вычислительный эксперимент на персональном компьютере с процессором Intel Core I-5 3230M, 2,6 ГГц, до 3,2 ГГц, 3 Мб. Решались модельные задачи теории расписаний по критерию F_1 — минимизации длины распи-

Таблица 3

Оптимальные последовательности выполнения заданий на поточных линиях

№ линии	№ задания	Времена выполнения операций заданий на различных машинах						
		Машина № 1		Машина № 2		Машина № 3		Граничное значение
		Начало	Завершение	Начало	Завершение	Начало	Завершение	
1	7	6	12	13	20	21	28	28
	1	13	16	21	28	29	33	38
	3	17	26	29	30	34	36	50
2	4	1	7	8	12	13	20	25
	2	10	15	16	21	22	33	40
3	8	5	8	9	13	14	20	20
	6	9	13	14	21	22	27	27
	5	14	17	22	25	28	31	60

Таблица 4

Результаты вычислительного эксперимента

№	Параметры задачи				Параметры ограничений		Время решения, с
	M	M_1	N	K	На время работы линий	На сроки выполнения заданий	
1	2	2	8	4	До 4—6 заданий	Слабые на 4 задания	12—15
2	3	2	10	5	До 3—5 заданий	Слабые на 6 заданий	28—42
4	4	2	12	4	До 3—6 заданий	Средние на 4 и жесткие на 3 задания	110—130
5	4	2	25	8	До 3—5 заданий	Жесткие на 10, средние на 7—8 и слабые на 5—7 заданий	320—440
6	5	3	15	3	До 3—4 заданий	Слабые на 2, средние на 3 и жесткие на 3 задания	230—270

сания. Данные времен выполнения операций выбирались случайным образом из диапазона 5—20. Данные граничных значений времен работы технологических линий и завершения выполнения, длина заданий выбирались также случайным образом из соответствующего диапазона, ширина которого зависела от числа операций в задании и от значения лингвистической переменной («слабые», «средние», «жесткие»). Значения b_i, B_i и h^{lk}, H^{lk} выбирались также случайным образом из соответствующего диапазона, длина которого зависела от числа операций в задании и от значения лингвистической переменной, соответствующий терм которой определялся также стохастически. Результаты вычислительного эксперимента сведены в табл. 4.

Результаты вычислительного эксперимента подтверждают полученные оценки сложности предлагаемых алгоритмов, так как решение задач даже большей размерности, но с более жесткой системой ограничений или с большим числом идентичных по техническим характеристикам технологических линий требуют меньших объемов вычислений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Автором были проведены вычислительные эксперименты по решению модельных задач размерностью до пяти поточных линий, включающих в себя до восьми машин и выполняющих до 25 заданий. Эксперименты показали, что предложенные точные методы эффективны при решении задач в условиях жесткой системы ограничений на сроки выполнения заданий и на времена работы машин либо в условиях применения идентичных поточных линий. В первом случае происходит интенсивный отсев недопустимых последовательностей выполнения работ на первом этапе алгоритма. Во втором случае — выполнение вычислений на первом этапе осуществляется для одной или небольшого числа систем машин. Для решения практических задач большой размерности могут успешно применяться эвристические и приближенные методы решения, основанные на свойствах допустимых и оптимальных расписаний, установленные в настоящей статье. Рассмотрение этих алгоритмов составляет предмет самостоятельной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Конвей Р.В., Максвелл В.А., Миллер Л.В.* Теория расписаний. — М.: Наука, 1975. — 359 с.
2. *Bruker P.* Scheduling Algorithms. — Leipzig: Springer, 2007. — 371 p.
3. *Domschke W., Scholl A., Voß S.* Produktionsplanung. Ablauforganisatorische Aspekte. — Berlin — Heidelberg: Springer Verlag, 2005. — 456 s.
4. *Зак Ю.А.* Прикладные задачи теории расписаний и маршрутизации перевозок. — М.: Кн. дом «Либроком», 2011. — 393 с.
5. *Salvador M.S.* A solution to special case of flow shop scheduling problems // Elmaghraby S.E. (Hrsg): Symposium of the Theory of Scheduling and its Applications. — Berlin: Springer, 1973. — P. 83—91.
6. *Quadt D., Kuhn H.* A taxonomy of flexible flow line scheduling procedures // European Journal of Operational Research. — 2007. — Vol. 178, iss. 3. — P. 686—698.
7. *Ribas I., Leisten R., Framinan J.M.* Review and classification of hybrid flow shop scheduling problems from a production system and a solutions procedure perspective. — Computers & Operations Research. — 2010. — Vol. 37, N 8. — P. 1439—1454.
8. *Зак Ю.А.* Решение обобщенной задачи Джонсона с ограничениями на сроки выполнения заданий и времена работы машин. Ч. 1. Точные методы решения // Проблемы управления. — 2010. — № 3. — С. 17—25. Ч. 2. Приближенные методы решения. — Там же. — № 4. — С. 12—19.
9. *Зак Ю.А.* Распределение множества заданий и определение оптимальных очередностей их выполнения на параллельных машинах методами динамического программирования // Информационные технологии. — 2012. — № 8. — С. 14—20.
10. *Беллман Р.* Динамическое программирование. — М.: Иностранная литература, 1960. — 400 с.
11. *Михалевич В.С., Трубин В.А., Шор Н.З.* Оптимизационные задачи производственно-транспортного планирования. — М.: Наука, 1986. — 260 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Н. Бурковым.

Юрий Александрович Зак — д-р техн. наук, науч. консультант, г. Аахен, Германия,
☎ +49/(0) 241-54-32-55, ✉ yuriy_zack@hotmail.com.