УДК 519.87

ВЫБОР ЭФФЕКТИВНОГО ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО РЕЖИМА В УСЛОВИЯХ НЕЧЕТКОЙ РЕГРЕССИОННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Ю.А. Зак

Рассмотрена задача выбора управляющих параметров технологического режима в условиях, когда зависимости выходных качественных показателей и экономических параметров производства в статическом режиме, на которые наложены ограничения, представлены в виде нечетких регрессионных математических моделей. Коэффициенты при входных переменных и управляющих воздействиях и свободные члены этих уравнений — нечеткие множества с функцией принадлежности прямоугольного, треугольного или трапециевидного вида, а значения всех переменных — действительные числа. Получены детерминированные эквиваленты сформулированных задач в виде нескольких задач линейного программирования и рассмотрены методы их решения, которые проиллюстрированы числовым примером.

Ключевые слова: управление производством, нечеткая регрессионная модель, функция принадлежности прямоугольного, треугольного или трапециевидного вида, линейное программирование.

ВВЕДЕНИЕ

Для многих технологических процессов аналитические математические модели статического режима функционирования производств получить очень сложно. Зависимость выходных качественных показателей выходного продукта и экономических показателей производства от значений входных параметров и управляющих воздействий может быть представлена в виде регрессионных математических моделей. Рассмотрим следующую постановку задачи выбора эффективных параметров технологического режима.

Зависимость выходных переменных от входных параметров и управляющих воздействий в статическом режиме представлена в виде линейной регрессионной модели

$$Y_i = \sum_{k=1}^{K} l_{ik} z_k + \sum_{j=1}^{m} t_{ij} x_j + r_i, \quad i = 1, ..., n, \qquad (1)$$

где Y_i — выходные переменные, на которые могут быть наложены двухсторонние ограничения $Y_i \in [H_i^1, H_i^2]$, z_k, $k = 1, ..., K$ — входные переменные и возмущающие воздействия, значения которых не зависят от воздействий управляющей системы, x_j, $j = 1, ..., m$ — управляющие воздействия, на выбор которых, как правило, также налагаются двухсторонние ограничения $x_j \in [h_j^1, h_j^2]$, l_{ik} и t_{ij} — коэффициенты математической модели, которая в ряде случае может быть получена в виде некоторой регрессионной модели на основе данных обработки экспериментальных данных, r_i — свободные члены уравнений модели.

Задача выбора наиболее эффективного технологического режима при данном значении входных переменных и возмущающих воздействий может быть сформулирована таким образом:

$$F = \sum_{k=1}^{K} p_k z_k + \sum_{j=1}^{m} c_j x_j + e_0 \to \text{extr} \qquad (2)$$

при ограничениях

$$H_i^1 \le Y_i = \sum_{k=1}^{K} l_{ik} z_k + \sum_{j=1}^{m} t_{ij} x_j + r_i \le H_i^2, \quad i = 1, ..., n; \qquad (3)$$

$$x_j \in [h_j^1, h_j^2], \quad j = 1, ..., m. \qquad (4)$$

Здесь F — критерий оптимальности, в качестве которого могут быть выбраны, например, максимальная производительность или минимум затрат на производство, а Y_i — значения качественных показателей выходного продукта.

Регрессионные модели позволяют определить значения выходных показателей Y_i с некоторой погрешностью δ_i. Следовательно, фактическое значение выходной переменной $\hat{Y}_i$ может отличаться от значения Y_i, рассчитанного по математической модели, на некоторую величину. Следовательно, $\hat{Y}_i \in [Y_i - \delta_i, Y_i + \delta_i]$, т. е. выбранный в результате решения задачи (2)—(4) технологический режим и реализация рассчитанных значений управляющих воздействий x_j, $j = 1, ..., m$, могут не обеспечить требуемого качества выходных показателей и соответствующих технико-экономических показателей производства.

В публикациях [1—3] задача выбора эффективного технологического режима в этих условиях была сформулирована и решена в виде задачи стохастического программирования с вероятностными ограничениями. В настоящей работе предлагается другой подход к решению сформулированной проблемы. Математическая модель задачи (1) может быть представлена в виде нечеткой (fuzzy) регрессионной модели, в которой выходные переменные, коэффициенты математической модели — нечеткие множества с функцией принадлежности заданного вида (RL-представления), а значения входных переменных z_k, $k = 1, ..., K$, и управляющих воздействий x_j, $j = 1, ..., m$, представлены действительными числами. В качестве примера возможности такой постановки задачи может рассматриваться выбор параметров технологического режима производства бумаги [4]. В зависимости от назначения выходные показатели качества бумажного полотна: вес и влажность 1 м^2 бумаги, которые могут быть определены с помощью датчиков, а также механическая прочность (разрывная длина), белизна, гладкость, зольность, диэлектрические свойства, впитывающая способность и др., которые, как правило, определяются только в лабораторных условиях, измеряются по всей ширине и длине бумажного полотна. Ширина бумажного полотна в современных бумагоделательных машинах — от 5 до 8 м, скорость — до 800 м/мин. Естественно, что значение этих показателей не может быть одинаковым по всей длине и ширине рулона выпускаемой продукции. В этих условиях представляется целесообразным значение всех выходных качественных показателей выпускаемой продукции описывать нечеткими множествами, а математическую модель задачи, которая не может быть получена аналитически, — fuzzy-регрессионными моделями.

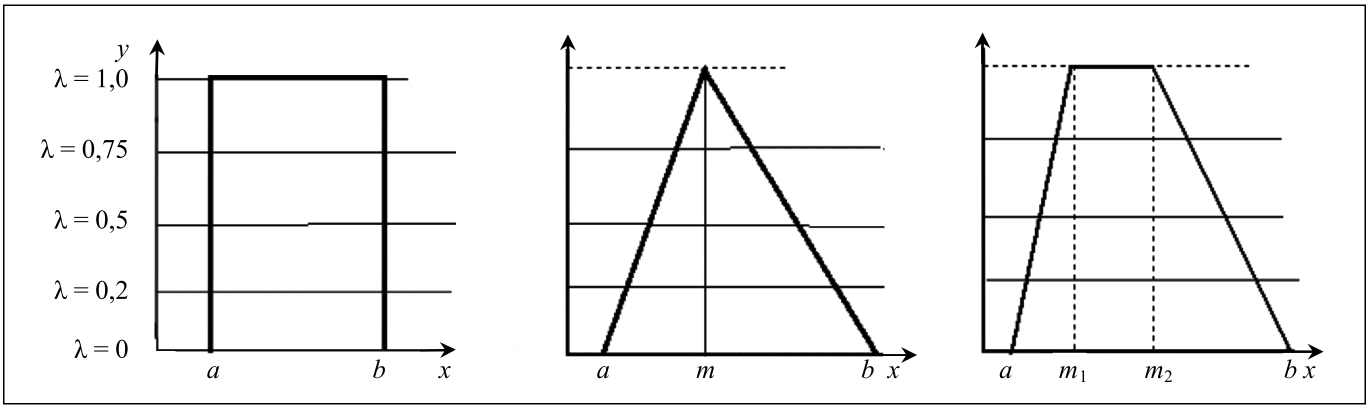
Задача управления в этих условиях формулируется как задача математического программирования, в условиях, когда коэффициенты математической модели и функции цели — нечеткие множества определенного вида. В результате решения этой задачи значения выходных переменных и критерия оптимальности также будут представлены нечеткими множествами. В данных условиях ограничения задачи могут быть сформулированы в форме принадлежности интервала расчетных значений абсцисс fuzzy-множеств выходных переменных заданным интервалам допустимых значений, а критерий оптимальности — в виде многокритериальной задачи оптимизации значений правых и левых частей установленных сечений этого нечеткого множества. Предложены детерминированные эквиваленты сформулированной задачи нечеткого математического программирования в виде модели линейного программирования.

1. ПОСТАНОВКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ

Рассмотрим математическую модель задачи (2), (3) в условиях, когда коэффициенты выражений ограничений, свободные члены и функции цели задачи, соответственно L_{ik} и T_{ij}, P_k и C_k, а также R_i и E_0, а иногда и H_i^1, H_i^2 — нечеткие множества с функциями принадлежности RL-представления. Остановимся в данной работе на случаях, когда нечеткими множествами всех рассматриваемых величин могут быть одного из трех видов: fuzzy-множество A с функцией принадлежности $\mu_A(x)$ прямоугольного, треугольного и трапециевидного видов (рисунок), где параметры $a(A)$, $b(A)$, $m(A)$, $m_1(A)$ и $m_2(A)$ являются элементами носителей соответствующих нечетких множеств.

При некотором фиксированном значении вектора входных и возмущающих воздействий $\bar{Z} = (\bar{z}_1, ..., \bar{z}_k, ..., \bar{z}_K)$ могут быть вычислены, пользуясь правилами fuzzy-арифметики, нечеткие множества соответственно уравнений ограничений и функции цели

$$\bar{Y}_i^0 = \sum_{k=1}^{K} \bar{z}_k L_{ik} + R_i, \quad i = 1, ..., n; \quad \bar{F}^0 = \sum_{k=1}^{K} \bar{z}_k P_k.$$



Функции принадлежности и различные сечения нечетких множеств

Следовательно, ограничения и критерий оптимальности задачи являются функциями детерминированного вектора переменных задачи X

$$\bar{Y}_i = \sum_{j=1}^{m} x_j T_{ij} + \bar{Y}_i^0, \quad i = 1, ..., n;$$

$$\bar{F} = \sum_{j=1}^{m} x_j C_j + \bar{F}^0. \qquad (5)$$

Правила fuzzy-арифметики (см., например, работы [5, 6]), которые для данных видов нечетких множеств аналогичны правилам интервальной арифметики [7], дают приведенные далее результаты.

Умножение параметров fuzzy-множества A с функцией принадлежности $\mu_A(x) = [a(A), m_1(A), m_2(A), b(A)]$ на некоторое действительное β — число

$$\mu_B(x) = [a(B), m_1(B), m_2(B), b(B)] = \beta\mu_A(x) =$$
$$= \begin{cases} [\beta a(A), \beta m_1(A), \beta m_2(A), \beta b(A)], \text{если } \beta > 0; \\ [\beta b(A), \beta m_2(A), \beta m_1(A), \beta a(A)], \text{если } \beta < 0. \end{cases} \qquad (6)$$

Выражение (6) иллюстрирует также результаты умножения fuzzy-множеств с функциями принадлежности треугольного и прямоугольного типа на некоторое действительное число (при этом $m(B) = \beta m(A)$).

Операция сложения двух функций принадлежности дает такие результаты:

— результат сложения fuzzy-множеств с функциями принадлежности прямоугольного вида $\mu_A(x) = [a(A), b(A)]$ и $\mu_B(x) = [a(B), b(B)]$ — это fuzzy-множество с функцией принадлежности прямоугольного вида

$$\mu_C(x) = [a(C), b(C)] =$$
$$= [a(A) + a(B), b(A) + b(B)]; \qquad (7)$$

— результат сложения fuzzy-множеств с функциями принадлежности треугольного вида $\mu_A(x) = [a(A), m(A), b(A)]$ и $\mu_B(x) = [a(B), m(B), b(B)]$ — fuzzy-множество с функцией принадлежности треугольного вида

$$\mu_C(x) = [a(C), m(C), b(C)] =$$
$$= [a(A) + a(B), m(A) + m(B), b(A) + b(B)]. \qquad (8)$$

— в результате сложения двух функций принадлежности трапециевидного вида $\mu_A(x) = [a(A), m_1(A), m_2(A), b(A)]$ и $\mu_B(x) = [a(B), m_1(B), m_2(B), b(B)]$ будет также получено fuzzy-множество с функций принадлежности трапециевидного вида

$$\mu_C(x) = [a(C), m_1(C), m_2(C), b(C)] =$$
$$= [a(A) + a(B), m_1(A) + m_1(B), m_2(A) + m_2(B),$$
$$(B)b(A) + b(B)]. \qquad (9)$$

Для выражений (7)—(9) справедливы следующие положения.

Если $a(C) > b(C)$, то полагаем $a(C) = b(C)$, $m_1(C) = m_2(C)$, $m_2(C) = m_1(C)$, $b(C) = a(C)$. Могут быть также определены координаты абсцисс различных λ-сечений всех fuzzy-множеств — $T_{ij}(\lambda)$, $C_k(\lambda)$, а также $\bar{Y}_i^0(\lambda)$ и $\bar{F}^0$, где λ — различные значения ординат функции принадлежности соответствующих fuzzy-множеств. Для нечетких множеств с функциями принадлежности RL-представления (например, для рассмотренных трех fuzzy-множеств, см. рисунок), как правило, каждому из этих сечений соответствует некоторый диапазон и, следовательно, двух граничных значений абсцисс, которые соответственно обозначим $d^1[T_{ij}(\lambda)]$, $d^2[T_{ij}(\lambda)]$; $d^1[C_k(\lambda)]$, $d^2[C_k(\lambda)]$, а также $d^1[\bar{Y}_i^0(\lambda)]$, $d^2[\bar{Y}_i^0(\lambda)]$ и $d^1[\bar{F}^0]$, $d^2[\bar{F}^0]$.

В результате выбора некоторого вектора детерминированных значений вектора управляющих воздействий $\bar{X} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_j, ..., \bar{x}_m)$ и подстановке этих значений в уравнения (5) будут получены fuzzy-множества значений выходных переменных $\bar{Y}_i$, $i = 1, ..., n$, и функции цели $\bar{F}$, для которых также определены их λ-сечения и координаты соответствующих абсцисс функций принадлежности этих сечений $d^1[\bar{Y}_i(\lambda)]$, $d^2[\bar{Y}_i(\lambda)]$ и $d^1[\bar{F}(\lambda)]$, $d^2[\bar{F}(\lambda)]$, которые определяются по формулам:

— для fuzzy-множеств прямоугольного вида

$$d^1[A(\lambda)] = d^2[A(\lambda)] = a(A) = b(A);$$

— для fuzzy-множеств треугольного вида

$$d^1[A(\lambda)] = \lambda[m(A) - a(A)] + a(A),$$

$$d^2[A(\lambda)] = b(A) - \lambda[b(A) - m(A)];$$

— для fuzzy-множеств трапециевидного вида

$$d^1[A(\lambda)] = \lambda[m_1(A) - a(A)] + a(A),$$

$$d^2[A(\lambda)] = b(A) - \lambda[b(A) - m_2(A)].$$

Здесь в качестве fuzzy-множества A могут рассматриваться все нечеткие множества $T_{ij}(\lambda)$ и $C_k(\lambda)$, $\bar{Y}_i^0(\lambda)$ и $\bar{F}^0$, а также $\bar{Y}_i$ и $\bar{F}$.

Следовательно, задача выбора оптимальных значений управляющих воздействий может быть сформулирована в виде многокритериальной задачи математического программирования:

$$\Phi(\lambda) = \min_{X \in [h^1, h^2]} \bar{F}(\lambda), \quad \lambda = 1, ..., \Lambda,$$

при ограничениях (4), а также системы ограничений на выходные переменные

$$d^1[\bar{Y}_i(\lambda)] \ge H_i^1(\lambda), \quad d^2[\bar{Y}_i(\lambda)] \le H_i^2(\lambda),$$

$$\lambda = 1, ..., \Lambda, \; i = 1, ..., n.$$

Здесь $H_i^1(\lambda)$ и $H_i^2(\lambda)$ — установленные граничные значения абсцисс соответствующих сечений функций принадлежности нечетких множеств выходных переменных.

Критерии оптимальности:

$$\min_{X \in [h^1, h^2]} \sum_{j=1}^{n} x_j \begin{Bmatrix} \lambda[m(C_j) - a(C_j)] + a(C_j), \text{ если } x_j \ge 0 \\ b(C_j) - \lambda[b(C_j) - m(C_j)], \text{ если } x_j \ge 0 \end{Bmatrix} + $$
$$+ \lambda[m(F_0) - a(F_0)] + a(F_0), \quad \lambda = 1, ..., \Lambda; \quad (10)$$

$$\min_{X \in [h^1, h^2]} \sum_{j=1}^{n} x_j \begin{Bmatrix} b(C_j) - \lambda[b(C_j) - m(C_j)], \text{ если } x_j \ge 0 \\ \lambda[m(C_j) - a(C_j)] + a(C_j), \text{ если } x_j < 0 \end{Bmatrix} + $$
$$+ \{b(F_0) - \lambda[b(F_0) - m(F_0)]\}, \quad \lambda = 1, ..., \Lambda. \quad (11)$$

Ограничения на значения выходных переменных:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \begin{Bmatrix} \lambda[m(T_{ij}) - a(T_{ij})] + a(T_{ij}), \text{ если } x_j \ge 0 \\ b(T_{ij}) - \lambda[b(T_{ij}) - m(T_{ij})], \text{ если } x_j < 0 \end{Bmatrix} + $$
$$+ \sum_{k=1}^{K} z_k \begin{Bmatrix} \lambda[m(L_{ik}) - a(L_{ik})] + a(L_{ik}), \text{ если } z_k \ge 0 \\ b(L_{ik}) - \lambda[b(L_{ik}) - m(L_{ik})], \text{ если } z_k < 0 \end{Bmatrix} + $$
$$+ \{\lambda[m(R_i) - a(R_i)] + a(R_i)\} \ge H_i^1,$$
$$i = 1, ..., n; \quad (12)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \begin{Bmatrix} b(T_{ij}) - \lambda[b(T_{ij}) - m(T_{ij})], \text{ если } x_j \ge 0 \\ \lambda[m(T_{ij}) - a(T_{ij})] + a(T_{ij}), \text{ если } x_j < 0 \end{Bmatrix} + $$
$$+ \sum_{k=1}^{K} z_k \begin{Bmatrix} b(L_{ik}) - \lambda[b(L_{ik}) - m(L_{ik})], \text{ если } z_k \ge 0 \\ \lambda[m(L_{ik}) - a(L_{ik})] + a(L_{ik}), \text{ если } z_k < 0 \end{Bmatrix} + $$
$$+ \{\lambda[m(R_i) - a(R_i)] + a(R_i)\} \le H_i^2,$$
$$i = 1, ..., n. \quad (13)$$

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Обозначим коэффициенты и свободные члены выражений, которые являются действительными числами:

$$\varphi_j^1(\lambda) = \begin{cases} \lambda[m(C_j) - a(C_j)] + a(C_j), \text{ если } x_j \ge 0, \\ b(C_j) - \lambda[b(C_j) - m(C_j)], \text{ если } x_j < 0; \end{cases}$$

$$\varphi_j^2(\lambda) = \begin{cases} b(C_{ij}) - \lambda[b(C_{ij}) - m(C_{ij})], \text{ если } x_j \ge 0, \\ a(C_{ij}) + \lambda[m(C_{ij}) - a(C_{ij})], \text{ если } x_j < 0; \end{cases}$$

$$\psi_0^1(\lambda) = \begin{cases} \lambda[m(F_0) - a(F_0)] + a(F_0), \text{ если } x_j \ge 0, \\ b(F_0) - \lambda[b(F_0) - m(F_0)], \text{ если } x_j < 0; \end{cases}$$

$$\psi_0^2(\lambda) = \begin{cases} b(F_0) - \lambda[b(F_0) - m(F_0)], \text{ если } x_j \ge 0, \\ a(F_0) + \lambda[mb(F_0) - a(F_0)], \text{ если } x_j < 0; \end{cases}$$

$$\tau_{ij}^1(\lambda) = \begin{cases} \lambda[m(T_{ij}) - a(T_{ij})] + a(T_{ij}), \text{ если } x_j \ge 0, \\ b(T_{ij}) - \lambda[b(T_{ij}) - m(T_{ij})], \text{ если } x_j < 0; \end{cases}$$

$$\tau_{ij}^2(\lambda) = \begin{cases} b(T_{ij}) - \lambda[b(T_{ij}) - m(T_{ij})], \text{ если } x_j \ge 0, \\ a(T_{ij}) + \lambda[m(T_{ij}) - a(T_{ij})], \text{ если } x_j < 0; \end{cases}$$

$$\vartheta_i^1(\lambda, Z) =$$
$$= \sum_{k=1}^{K} z_k \begin{cases} (b(L_{ik}) - \lambda[b(L_{ik}) - m(L_{ik})]), \text{ если } z_k \ge 0 \\ (a(L_{ik}) + \lambda[m(L_{ik}) - a(L_{ik})]), \text{ если } z_k < 0 \end{cases} +$$
$$+ \{\lambda[b(R_i) - b(R_i)] - m(R_i)\},$$

$$\vartheta_i^2(\lambda, Z) =$$
$$= \sum_{k=1}^{K} z_k \begin{cases} b(L_{ik}) - \lambda[b(L_{ik}) - m(L_{ik})], \text{ если } z_k \ge 0 \\ a(L_{ik}) + \lambda[m(L_{ik}) - a(L_{ik})], \text{ если } z_k \ge 0 \end{cases} +$$
$$+ \{b(R_i) - \lambda[b(R_i) - m(R_i)]\}.$$

Следовательно, в случае возможности значений $x_j < 0$ и $x_j \ge 0$ для $m_1 \le m$ переменных задача определения управляющих воздействий сводится к решению 2^{m_1} детерминированных многокритериальных задач линейного программирования [8, 9]

$$\Phi^1(\lambda) = \min_{X \in [h^1, h^2]} \sum_{j=1}^{m} \varphi_j^1(\lambda) x_j + \psi_0^1(\lambda),$$
$$\Phi^2(\lambda) = \min_{X \in [h^1, h^2]} \sum_{j=1}^{m} \varphi_j^2(\lambda) x_j + \psi_0^2(\lambda),$$
$$\lambda = 1, ..., \Lambda, \tag{14}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{m} \tau_j^1(\lambda) x_j + \vartheta_i^1(\lambda, Z) \ge H_i^1(\lambda),$$
$$\sum_{j=1}^{m} \tau_j^2(\lambda) x_j + \vartheta_i^2(\lambda, Z) \le H_i^2(\lambda),$$
$$\lambda = 1, ..., \Lambda, \quad i = 1, ..., n. \tag{15}$$

Отметим, что в самом общем случае H_i^1 и H_i^2 могут быть fuzzy-множествами.

В качестве одного из методов решения задачи (14), (15) рассмотрим метод введения комплексного критерия на основе аддитивной свертки локальных критериев. Введем вектор весовых коэффициентов локальных критериев $\eta(\lambda) = (\eta_1^1, \eta_2^1, ..., \eta_\lambda^1, ..., \eta_\Lambda^1, \eta_1^2, \eta_2^2, ..., \eta_\lambda^2, ..., \eta_\Lambda^2)$, где $\eta_\lambda^1 \ge 0$, $\eta_\lambda^2 \ge 0$, $\lambda = 1, ..., \Lambda$; $\sum_{\lambda=1}^{\Lambda} (\eta_\lambda^1 + \eta_\lambda^2) = 1{,}0$. Компромиссный критерий оптимальности имеет вид

$$\bar{\Phi} = \min_{X \in [h^1, h^2]} \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{s=1}^{2} \eta_\lambda^s \sum_{j=1}^{m} \varphi_j^s(\lambda) x_j + \psi_0^s(\lambda). \tag{16}$$

Задача оптимизации критерия (16) в условиях выполнения ограничений (4), (25) также является задачей линейного программирования относительно детерминированного вектора переменных X и может быть решена симплекс-методом линейного программирования.

В качестве другого критерия оптимальности может рассматриваться минимизация детерминированной величины координаты абсцисс центра тяжести fuzzy-множества критерия оптимальности. Для fuzzy-множества с функцией принадлежности самого общего вида значение этой величины определяется выражением [6]

$$C(F) = \int_{a(F)}^{b(F)} F\mu_F(F)dF \Big/ \int_{a(F)}^{b(F)} \mu_F(F)dF, \tag{17}$$

где $a(F)$ и $b(F)$ — граничные значения (абсциссы крайних левой и правой точек) функции принадлежности нечеткого множества критерия оптимальности.

Тогда критерий оптимальности задачи может быть представлен в виде

$$\bar{\Phi} = \min_{X \in [h^1, h^2]} \sum_{j=1}^{m} C(P_j)x_j + \sum_{k=1}^{k} C(L_k)z_k + C(F_0). \tag{18}$$

Здесь $C(P_j)$, $C(L_k)$ и $C(F_0)$ — соответственно координаты абсцисс центров тяжести коэффициентов при управляющих воздействиях, входных переменных и свободного члена fuzzy-множеств в выражении критерии оптимальности, которые являются детерминированными величинами и могут быть определены на этапе формулирования задачи. Так как выражение критерия оптимальности (18) линейно относительно вектора управляющих параметров, то задача (3), (15), (18) также является задачей линейного программирования. Для функций принадлежности рассматриваемых в работе трех видов выражение (17) существенно упрощается:

— для fuzzy-множеств прямоугольного вида $C(F) = 0{,}5[a(F) + b(F)]$;

— для fuzzy-множеств треугольного вида $C(F) = [a(F) + m(F) + b(F)]/3$.

Для fuzzy-множеств трапециевидного вида формула вычисления центра тяжести более сложная и нелинейна относительно основных параметров этой фигуры — $a(F)$, $m_1(F)$, $m_2(F)$, $b(F)$.

3. ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим простейший пример выбора оптимальных управляющих воздействий в условиях наличия одной входной и выходной переменных и одного управляющего воздействия в условиях, когда математическая модель задачи (выражения зависимости выходной переменной и критерия оптимальности от входной переменной и управляющего воздействия) представлены fuzzy-регрессионными моделями

$$\bar{Y} = z\bar{L} + x\bar{T} + \bar{R}, \quad \bar{F} = z\bar{P} + x\bar{C} + \bar{E}.$$

Коэффициенты уравнений — нечеткие множества с функциями принадлежности трапециевидного вида соответственно с параметрами

$$\bar{T} = \{a(\bar{T}), m_1(\bar{T}), m_2(\bar{T}), b(\bar{T})\} = \{1, 5, 7, 9\},$$

$$\bar{L}_{11} = \{a(L), m_1(L), m_2(L), b(L)\} = \{-2, 2, 3, 5\},$$

$$\bar{R} = \{a(R), m_1(R), m_2(R), b(R)\} = \{-1, 3, 4, 6\};$$

$$\bar{C} = \{a(C), m_1(C), m_2(C), b(C)\} = \{1, 3, 4, 6\},$$

$$\bar{P} = \{a(P), m_1(P), m_2(P), b(P)\} = \{-4, 0, 1, 3\},$$

$$\bar{E} = \{a(E), m_1(E), m_2(E), b(E)\} = \{-2, 2, 3, 7\}.$$

Входная переменная и управляющее воздействие — действительные числа. На управляющее воздействие наложено ограничение $-10{,}0 \le x \le 10{,}0$. При вычислении ограничения на выходную переменную и выражения критерия оптимальности рассматриваются три сечения нечетких множеств: $\mu_A[A(\alpha_1)] = 0$, $\mu_A[A(\alpha_2)] = 0{,}5$, $\mu_A[A(\alpha_3)] = 1{,}0$. Следовательно, учитываются только шесть координат абсцисс $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_6$, определяющие минимальные и максимальные координаты соответствующих отрезков. Весовые коэффициенты, учитывающие влияние соответствующих значений этих сечений в критерии, выбраны таким образом: $\eta_1 = \eta_6 = 0{,}05$, $\eta_2 = \eta_5 = 0{,}15$, $\eta_3 = \eta_4 = 0{,}3$. На значения абсцисс различных сечений fuzzy-множества выходной переменной наложены ограничения: $H^1 = 0$, $H^6 = 62$; $H^2 = 15$, $H^5 = 55$; $H^3 = 25$, $H^4 = 50$.

Вычислим по приведенным выше формулам значения абсцисс соответствующих функций принадлежности fuzzy-множеств $\bar{P}$, $\bar{C}$, $\bar{E}$ и $\bar{L}$, $\bar{T}$, $\bar{R}$, а также параметры свертки локальных критериев в комплексный аддитивный критерий оптимальности с соответствующими весовыми коэффициентами. Так как управляющее воздействие может принимать как отрицательное, так и положительное значение, рассматриваются две математические модели сформулированной задачи.

Задача 1. Детерминированный эквивалент задачи (10)—(13) при линейной свертке критериев оптимальности в этих условиях при значении входной переменной $z = 2$ при ограничениях $0 \le x \le 10{,}0$ имеет вид:

$$F_1 = \min_{0 \le x \le 10{,}0} (3{,}5x + 0{,}5 + 2{,}5),$$

в условиях ограничений

$$0 \le x \le 10{,}0; \quad x - 4 - 1 \ge 5; \quad 3x + 0 + 1 \ge 15;$$

$$5x + 4 + 3 \ge 25; \quad 7x + 6 + 4 \le 50;$$

$$8x + 8 + 5 \le 55; \quad 9x + 10 + 6 \le 62.$$

В результате решения этой задачи получаем оптимальное значение управляющих воздействий $x = 5{,}0$, $F_1 = 20{,}5$. Нечеткие множества значений критерия оптимальности и выходной переменной имеют вид: $\bar{Y} = [a(Y) = 0; m_1(Y) = 32; m_2(Y) = 45; b(Y) = 61]$; $\bar{F}_1 = [a(F) = 6{,}5; m_1(F) = 10{,}0; m_1(F) = 16{,}0; b(F) = 24{,}0]$.

Все ограничения по значениям абсцисс сечений выполняются:

$$\lambda_1 \to 0 = 0 \ \& \ 61 < 62; \quad \lambda_2 \to 16 > 15 \ \& \ 53 < 55;$$

$$\lambda_3 \to 32 > 25 \ \& \ 45 < 50.$$

Задача 2. Детерминированный эквивалент задачи (15)—(18) в условиях $-10{,}0 \le x < 0$ имеет вид

$$F_2 = \min_{-10 \le x < 0} (3{,}5x + 0{,}5 + 2{,}5)$$

при ограничениях

$$-10{,}0 \le x < 0; \quad 9x - 4 - 1 \ge 5; \quad 8x + 0 + 1 \ge 15;$$

$$7x + 4 + 3 \ge 25; \quad 5x + 6 + 4 \ge 50;$$

$$3x + 8 + 5 \le 55; \quad x + 10 + 6 \le 62.$$

Так как задача 2 не имеет допустимых решений, то оптимальным является решение сформулированной задачи — решение задачи 1, т. е. $x = 5{,}0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для сложных производств математическая модель выбора оптимальных параметров технологического режима может быть получена в виде линейных fuzy-регрессионных моделей. Коэффициенты при входных переменных и управляющих воздействий и свободные члены этих уравнений, а также выходные качественные показатели готовой продукции и экономические показатели производства представлены нечеткими множествами с функцией принадлежности прямоугольного, треугольного или трапециевидного вида. Значения входных переменных и управляющих переменных — действительные числа.

Задача выбора параметров технологического режима, обеспечивающего выполнение всех ограничений на выходные качественные показатели и оптимальное значение критерия оптимальности, определяющего технико-экономические показатели производства, формулируется в виде одно- и многокритериальной задачи нечеткого линейного программирования. На основе предложенных методов выбора предпочтений и условий выполнения ограничений нечетких множеств с использованием координат абсцисс функций принадлежности их сечений построены детерминированные эквиваленты сформулированных задач. В соответствии с правилами fuzzy-арифметики в случае возможности реализации как положительных, так и отрицательных значений некоторых управляющих переменных, вид детерминированной модели задачи меняется. Поэтому для получения результата необходимо решать не одну, а несколько задач линейного программирования с различными математическими моделями. Среди всех допустимых решений этих задач выбирается решение с лучшим значением критерием оптимальности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зак Ю.А.* Про деякі задачі оптимізації безперервних технологічних процесів // Автоматика. — 1968. — № 6. — С. 12—23.
2. *Зак Ю.А.* Про методи розвязання одного класу стохастичних задач керування технологічними процесами // Автоматика. — 1970. — № 6. — С. 38—48.
3. *Зак Ю.А., Фишбейн М.А.* Синтез стохастических систем управления сложными технологическими процессами // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. — 1973. — № 2. — С. 39—46.
4. *Рувинский А.А., Зак Ю.А., Рейдман Р.М.* Математические модели и алгоритмы в системах управления картонно-бумажным производством. — М.: Лесная промышленность, 1971. — 232 с.
5. *Ибрагимов В.А.* Элементы нечеткой математики. — Баку, 2010. — 392 с.
6. *Зак Ю.А.* Принятие решений в условиях размытых и нечетких данных. — М.: URSS, 2013. — 352 с.
7. *Алефелд Г., Херцбергер Ю.* Введение в интервальные вычисления. — М.: Мир, 1987. — 358 с.
8. *Кормен Т.Х., Лейзерсон Ч.И., Ривест Р.Л.* Алгоритмы: построение и анализ. — 3-е изд. — М.: Вильямс, 2017. — 1328 с.
9. *Лунгу К.Н.* Линейное программирование. Руководство к решению задач. — М.: Физматлит, 2005. — 128 с.

Статья представлена к публикации руководителем РРС В.Ю. Столбовым.

Зак Юрий Александрович — д-р техн. наук,
науч. эксперт и консультант, г. Аахен, Германия,
✉ yuriy_zack@hotmail.com.