УДК 51-74;519-85 DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2019.2.7

ПОСТРОЕНИЕ РАСПИСАНИЙ РАБОТЫ СБОРОЧНЫХ КОНВЕЙЕРОВ В МЕЛКО- И СРЕДНЕСЕРИЙНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ

Ю.А. Зак

Приведены алгоритмы решения актуальной для мелко- и среднесерийного производства задач построения расписаний выполнения сборочных работ для некоторого множества различных по технологии производства изделий. Критерием оптимальности сформулированной задачи служит выполнение всего комплекса работ в кратчайшие сроки. Предложен эвристический алгоритм приближенного решения задачи. Определены эффективная для практических приложений и близости к нижней границе оптимального решения последовательность включения изделий в сборочный процесс, времена начала и окончания выполнения операций сборки всех изделий на каждом из сборочных постов, а также время завершения выполнения планового задания. Разработанные алгоритмы проиллюстрированы числовыми примерами.

Ключевые слова: сборочный конвейер, оптимальная последовательность, сборочные работы, алгоритм построения расписаний.

ВВЕДЕНИЕ

Сборочный конвейер и конвейерная организация производства — это одна из форм организации технологического процесса в автомобиле- и машиностроении, в электронной, деревообрабатывающей и приборостроительной отраслях промышленности. Изделие перемещается по сборочным постам, постепенно проходя все этапы сборки. За каждым постом сборки любого изделия закреплен определенный объем работ. Темп сборки строго регламентирован. Оснащенные оборудованием, измерительной аппаратурой, необходимым инструментом и обслуживающим персоналом сборочные посты конвейера расположены последовательно в направлении движения обрабатываемого изделия. В каждый момент времени на сборочном конвейере осуществляется одновременно сборка сразу нескольких изделий, число которых меньше или равно числу последовательно работающих сборочных постов. После завершения выполнения всех операций на каждом сборочном посту обрабатываемое изделие перемещается на следующий стоящий в последовательной цепочке сборочный пост. Все операции должны выполняться в определенной технологической последовательности, которая и определяет разбиение всего множества технологических операций на непересекающиеся подмножества и назначение выполнения этих подмножеств операций на различные посты сборочного конвейера. Перемещение изделия на следующую стадию обработки происходит на всех постах одновременно после заключительного момента завершения процесса обработки на последнем из них.

Проблемы построения расписаний и балансировки сборочных конвейеров возникают при решении различных задач разработки технологии, аппаратурного оснащения, проектирования, организации и оперативного управления конвейерным производством [1—8]. Эффективное решение этих проблем позволяет повысить производительность работы конвейерных линий, сократить затраты на основное и вспомогательное оборудование сборочных постов и заработную плату обслуживающего персонала, а также число сборочных постов и требуемые объемы производственных площадей.

Основная задача организации сборочного производства заключается в оптимальном распределении всего множества технологических операций по постам сборочного конвейера, что обеспечит правильную организацию технологического процесса, наиболее равномерную загрузку во времени и синхронизацию работы всех сборочных постов конвейерной линии. Решение данной задачи наиболее актуально для массового и крупносерийного производства. В течение последних 60 лет решению этой задачи, которая относится к классу NP-сложных, посвящено большое количество публикаций (см., например, [1, 5—7, 9, 10]). До настоящего времени не предложены эффективные алгоритмы получения точных решений сформулированной задачи в условиях большой размерности с учетом всех ограничений, которые должны учитываться в реальных производственных ситуациях. Применяемые на практике методы решения, основанные на методах глобального случайного поиска, генетических алгоритмах и эволюционных стратегиях, требуют больших объемов вычислений, не гарантируют получения точных решений и не дают оценки точности полученного приближенного решения. Эффективные приближенные методы решения предложены в публикациях [1, 2, 5—7, 9, 10].

В данной работе рассматривается другая задача, актуальная для мелко- и среднесерийного производства, которой уделено недостаточное внимание в литературе: построение расписаний выполнения сборочных работ для некоторого множества различных по технологии сборки изделий, обеспечивающих выполнение всех производственных операций в кратчайшие сроки.

На сборочном конвейере, содержащем K, $k = 1, ..., K$, последовательно расположенных в линию сборочных постов, необходимо осуществить сборку n изделий, $i = 1, ..., n$, различных по техническим характеристикам и множествам выполняемых на каждом посту технологических операций. Времена выполнения всех операций на каждом сборочном посту различны и равны t_i^k, а следовательно, и времена такта конвейерной линии для сборки каждого изделия τ_i также различны. Поступая на первый пост сборки, каждое изделие не может быть снято со сборочного конвейера и должно затем пройти все последующие сборочные посты. Таким образом, в каждый момент времени на различных постах сборочного конвейера может осуществляться сборка нескольких различных изделий. Необходимо найти последовательность включения изделий в сборочный процесс, времена начала и завершения сборки всех изделий на каждом и на последнем сборочном посту, обеспечивающих выполнение расписания всех сборочных работ в кратчайшие сроки.

1. ПОСТАНОВКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Обозначим $i = 1, ..., n$ — число изделий, сборка каждого из которых производится в установленной технологической последовательности; $k = 1, ..., K$ — число сборочных постов, одинаковое для каждого изделия; τ_i — время такта сборки i-го изделия; x_i^k θ_i^k, $i = 1, ..., n$, $k = 1, ..., K$ — соответственно время начала и завершения работ по сборке i-го изделия на k-м сборочном посту, T_i — время завершения сборки i-го изделия.

Тогда, если производится сборка только одного изделия, для вычисления времен начала и завершения процесса сборки на каждом посту справедливы соотношения:

$$x_1^1 = 1, \quad x_1^k = \theta_1^{k-1} + 1, \quad k = 2, ..., K;$$
$$\theta_1^1 = x_1^1 + \tau_1, \quad x_1^2 = \theta_1^1 + 1,$$
$$\theta_1^2 = x_1^2 + \tau_1, ..., x_1^k = \theta_1^{k-1} + 1,$$
$$\theta_1^k = x_1^k + \tau_1, ..., x_1^K = \theta_1^{K-1} + 1,$$
$$\theta_1^K = x_1^K + \tau_1 + 1.$$

Если учитывается время g перемещения изделия с одного сборочного поста на другой, то времена θ_i^l определяются по формулам:

$$x_1^1 = 1; \quad x_i^k = \theta_i^k - 1 + 1 + g, \; k = 2, ..., K;$$
$$\theta_i^k = x_i^k + \tau_1, \;\; k = 1, ..., K; \quad T_i = \theta_i^K, \;\; i = 1, ..., n.$$

Рассмотрим случай, когда на одном сборочном конвейере на различных его постах производится сборка сразу нескольких изделий. При этом возможны случаи, кода на k_1-м посту выполняются работы по сборке i_1-го изделия, а на k_2-м посту — i_2. Времена начала и завершения выполнения всех операций на каждом посту, кратные соответствующим временам такта сборки соответствующих изделий τ_i, определяются соотношениями

$$\theta_2^1 = \theta_1^1 + \tau_2 + 1, \quad \theta_2^2 = \max(\theta_1^2, \, x_2^1 + \tau_2) + \tau_2,$$
$$x_i^1 = 1; \quad x_i^1 = \theta_{i-1}^1 + 1; \quad \theta_i^1 = \theta_{i-1}^1 + \tau_i + 1,$$
$$\theta_i^2 = \max(\theta_{i-1}^2, \, x_i^1 + \tau_i) + \tau_i, ..., \theta_n^1 = x_{n-1}^1 + \tau_n,$$
$$\theta_n^2 = \max(x_{n-1}^2, \, x_n^1 + \tau_n) + \tau_n, ..., \theta_n^k =$$
$$= \max(x_{n-1}^k, \, x_n^{k-1} + \tau_n) + \tau_n,$$
$$\theta_n^K = \max(x_{n-1}^K, \, x_i^{K-1} + \tau_n) + \tau_n.$$

Время завершения всего комплекса работ по сборке всех n изделий

$$T = \max_{1 \le i \le n} \theta_n^K.$$

Пусть число сборочных постов для каждого из изделий различно, т. е. равно $K_1, K_2, ..., K_i, ..., K_n$ (причем $K_i \leqslant K$ и $\max\limits_{1 \le i \le n} K_i = K$), и процесс сборки изделий ведется в той же последовательности, т. е.

если ведется сборка каждого i-го изделия, то процесс сборки проходит последовательно на всех K_i сборочных постах. Работы по сборке каждого из изделий на всех постах сборочного конвейера завершаются в соответствии с формулами:

$$x_1^1 = 1,\quad x_1^k = \theta_1^{k-1} + g + 1,\quad k = 2, ..., K;$$

$$\theta_1^k = x_1^k + \tau_1,\quad k = 1, ..., K_1.$$

Времена завершения обработки других изделий $i = 2, ..., n$ на всех постах сборочного конвейера $k = 1, ..., K$ определяются по формулам:

$$x_1^1 = 1;\quad x_1^k = \theta_1^{k-1} + \gamma_2^k g + 1,\quad k = 2, ..., K;$$

$$\theta_2^k = x_2^k + q_2^k \tau_2,\quad k = 2, ..., K_2;$$

$$x_i^k = \max\left(\theta_{i-1}^2, \theta_{i-2}^3, ..., \theta_{\min(i-2,\, K-2)}^{\max[2+\min(i-2,\, K-2)]}\right) + g + 1,\quad k = 1, ..., K_i;$$

$$\theta_i^k = x_i^k + q_i^k t_i,\quad k = 1, ..., K_i;$$

где $q_i^k = \begin{cases} 1, \text{если } K_{i-1} \ge k, \\ 0, \text{если } K_{i-1} \le k, \end{cases}$ $\gamma_i^k = \begin{cases} 1, \text{если } K_i \ge k, \\ 0, \text{если } K_i \le k; \end{cases}$

$k = 1, ..., K$, $i = 2, ..., n$.

Следовательно,

$$T = \max_{1 \le i \le n} \theta_i^{K_i}.$$

2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ПОДАЧИ ИЗДЕЛИЙ НА СБОРОЧНЫЙ КОНВЕЙЕР

Обозначим $\tilde{J} = \{i_1, i_2, ..., i_k, ..., i_n\}$ — заданная последовательность сборки изделий; K — число сборочных постов сборочного конвейера, $k = 1, ..., K$. Пусть время сборки i-го изделия на k-м сборочном посту равно t_i^k, а время такта сборочного конвейера при сборке этого i-го изделия $\tau_i = \max_{1 \le k \le K_i} t_i^k$. Определим в этих условиях более точно времена такта сборочного конвейера при одновременной работе по сборке на различных постах сразу множества изделий, запускаемых в заданной последовательности $\tilde{J}$, которые обозначим по индексу i собираемого на первом сборочном посту изделия переменной σ_i,

$$\sigma_i = \max(t_i^1, q_{i-1}^2 t_{i-1}^2, ..., q_{i-k-1}^k t_{i-k}^{k+1}, q_{i-k}^{k+1} t_{i-k}^{k+1}, ..., q_{i-K}^{k+1} t_{i-K-1}^K),\quad k = 1, ..., K,\quad i = 1, ..., n.$$

При сделанных предположениях времена начала и завершения сборки каждого стоящего в последовательности $\tilde{J}$ изделия на всех постах сборочного конвейера определяются по формулам:

$$x_{i_1}^1 = x_1^1 = 1,\quad \theta_{i_1}^1 = x_{i_1}^1 + t_{i_1}^1;\quad \theta_i^1 = x_i^k + t_i^k;$$

для пар индексов $(i, k) = (i_1 - r, k)$, $r = 0, 1, ..., k - R$; $k = 1, ..., R$:

$$\theta_{i_1}^k = \theta_{i_1-1}^{k-1} = ... = \theta_{i_1-k+1}^1 = \theta_{i_1+1}^{k-1} = \theta_{i_1+r}^{k-r+1} = ... = \theta_{i_1+R-1}^R = \theta_{i_1}^{k-1} + g + \max\Big(\bar{t}_{i_1}^k, \bar{t}_{i_1-1}^{k+1}, ..., \bar{t}_{i_1-r}^{k+r}, ..., \bar{t}_{t_1-R}^R, \bar{t}_{t_1+1}^{k-1}, ..., \bar{t}_{i_1+k-1}^1\Big),$$

$$k = 1, ..., n;\quad r = 1, ..., R,$$

где R — число одновременно находящихся на сборочном конвейере изделий, которое может быть меньше или равно числу сборочных постов конвейера.

Здесь

$$\bar{t}_l^r = \begin{cases} t_l^r, \text{если } r \ge 1, r \le K, \\ 0, \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$r = (i_1 - k + 1), (i_1 - k + 2), ..., i_1, (i_1 + 1), ..., (i_1 + R - 1),\quad k = 1, 2, ..., K.$$

Время завершения сборки всех n изделий определяется выражением $T = \theta_n^R$.

Пример 1. Производится сборка 3-х изделий в заданной последовательности на 4-х сборочных постах. Времена сборки каждого изделия на различных сборочных постах приведены в табл. 1. Временем перемещения изделия с одного поста на другой можно пренебречь.

Далее приведены расчеты времен начала и завершения сборки каждого изделия на каждом посту сборочного конвейера в указанной в табл. 1 последовательности:

$$x_1^1 = 1,\quad \theta_1^1 = 5 + 1 = 6;$$

$$x_2^1 = x_1^2 = 6 + 1 = 7;\ \theta_1^2 = 7 + 6 = 13;\ \theta_2^1 = 7 + 6 = 13;$$

$$x_3^1 = x_2^2 = x_1^3 = \max(\theta_1^2, \theta_2^1) + 1 = \max(13, 13) + 1 = 14;$$

$$\theta_1^3 = 14 + 7 = 21;\ \theta_2^2 = 14 + 7 = 21;\ \theta_3^1 = 14 + 8 = 22;$$

$$x_3^2 = x_2^3 = x_1^4 = \max(\theta_1^3, \theta_2^2, \theta_3^1) + 1 = \max(21, 21, 22) + 1 = 23;$$

Таблица 1

Времена выполнения операций на сборочных постах

Номер изделия	Времена сборки изделий на постах				Время такта сборки
	1	2	3	4	
1	5	6	7	4	7
2	6	7	5	7	7
3	8	6	9	5	9

$\theta_1^4 = 23 + 4 = 27,\ \theta_2^3 = 23 + 5 = 28,\ \theta_3^2 = 23 + 6 = 29;$

$$x_3^3 = x_2^4 = \max(\theta_1^4,\ \theta_2^3,\ \theta_3^2) + 1 = \max(27,\ 28,\ 29) + 1 = 30;$$

$$\theta_2^4 = 30 + 7 = 37; \quad \theta_3^3 = 30 + 9 = 39.$$

3. АЛГОРИТМ ВЫБОРА ЭФФЕКТИВНЫХ РАСПИСАНИЙ СБОРОЧНЫХ РАБОТ

Определим S тактов перемещения изделий по постам сборочного конвейера в процессе выполнения всех работ $s = 1, ..., S$, причем $S = n + K - 1$. В первые n тактов перемещения сборочного конвейера на первый пост сборки поступает некоторое новое изделие, а все изделия, уже находящиеся в процессе сборки, кроме изделия, находящегося на K-м посту, перемещаются на следующий $(k + 1)$-й пост конвейера. На последних $(K - 1)$ тактах сборки происходит только перемещение всех изделий, оставшихся в процессе сборки, на следующий $(k + 1)$-й пост.

Определим достаточно грубую нижнюю границу минимального значения критерия оптимальности. Длина расписания не может быть меньше времени сборки изделия, требующего максимального времени выполнения операций на всех постах сборки, т. е. времени $L_{\bar{j}} = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{k=1}^{K} t_i^k$. Сборка каждого из других изделий подмножества $\tilde{J} = (\tilde{I}/\bar{j})$ может начинаться либо раньше, либо после времени начала сборки этого $\bar{j}$-го изделия, увеличивая при этом суммарное время выполнения всего расписания, по крайней мере, на величину $\bar{d}_i = \min(t_i^1,\ t_i^K),\ i \in \tilde{J}$. Следовательно, время выполнения расписания не может быть меньше величины

$$\xi(\bar{T}) = \max_{1 \le i \le n} \sum_{k=1}^{K} t_i^k + \sum_{i \in \tilde{J}} \min(t_i^1,\ t_i^K).$$

Введем обозначения $\tilde{I}_1^s$ и $\tilde{I}_2^s$, где $\tilde{I}_1^s \cup \tilde{I}_2^s = \bar{I} = \{1, ..., n\}$ и $\tilde{I}_1^s \cap \tilde{I}_2^s = \varnothing$ соответственно подмножества индексов изделий, включенных и невключенных в процесс сборки на s-м шаге перемещения сборочного конвейера. В начале процесса положим $\tilde{I}_1^s = \varnothing,\ \tilde{I}_2^s = \tilde{I}$. Алгоритм решения задачи предусматривает выполнение следующих шагов.

Шаг 1. Среди всех изделий $i = 1, ..., n$ выбираем j-е изделие, для которого справедливо соотношение $t_j^1 = \min\limits_{1 \le i \le n} t_i^1$. Если таких изделий некоторое подмножество $j \in \tilde{J}^1$, то определяем $t_{j_1}^2 = \min\limits_{i \in \tilde{J}^1} t_i^2$. В случае наличия подмножества таких изделий $j_1 \in \tilde{J}^2$ находим изделия, удовлетворяющие соотношению $t_{j_2}^3 = \min\limits_{i \in \tilde{J}^2} t_i^3$. Эту процедуру выполняем до тех пор, пока на некотором k-м шаге расчета не получим подмножество $\tilde{J}^{k-1}$, состоящее из одного элемента. Если выполнено $k = (K - 1)$ таких вычислений и подмножество $j \in \tilde{J}^{(K-1)}$ состоит не из одного, а из нескольких элементов, то среди них выбирается элемент (изделие) с наименьшим индексом. Обозначим индекс этого изделия $\bar{j}_1$, время сборки которого на первом сборочном посту равно $t_{\bar{j}_1}^1$. Включаем изделие с индексом $\bar{j}_1$ в процесс сборки, устанавливая его на первый пост сборочного конвейера, перемещаем все изделия, уже находящихся в процессе сборки, на следующий пост. Определяем $\tilde{I}_1^1 = \bar{j}_1,\ \tilde{I}_2^1 = \tilde{I}_2^1/\bar{j}_1$.

Выполняем вычисления

$$x_{\bar{j}_1}^1 = 1, \quad \theta_{\bar{j}_1}^1 = x_{\bar{j}_1}^1 + t_{\bar{j}_1}^1; \quad x_{\bar{j}_1}^2 = x_i^1 = \theta_{\bar{j}_1}^1 + g + 1,$$
$$T^1 = \theta_{\bar{j}_1}^1.$$

Переходим к шагу 2.

Шаг 2. Этот шаг выполняется в течение первых из $s = 2, ..., n$ тактов перемещения изделий на постах сборочного конвейера. Определим время σ^s такта сборочного конвейера на данном шаге его перемещения по формуле

$$\sigma^s = \max_{1 \le p \le (K-1)} q^{(s-p),\, p} t^{(s-p),\, p}.$$

Среди подмножества изделий $\tilde{I}_1^s \ne \varnothing$ находим подмножество изделий $\tilde{Y}_1^s \subseteq \tilde{I}_1^s$, для которых справедливы неравенства

$$t_{\bar{j}_s} = \{t_i^s \le \sigma^s \mid i \in \tilde{I}_1^s\}.$$

Если $\tilde{Y}_1^s \ne \varnothing$, то в случае, если множество $\tilde{Y}_1^s$ включает в себя только одно изделие с индексом $\bar{j}_s$, переходим к шагу 3. Если же $\tilde{Y}_1^s \ne \varnothing$ и оно состоит из некоторого подмножества изделий, то находим индексы изделий, удовлетворяющих соотношению $t_{\bar{j}_s}^2 \le t_{\bar{j}_s}$, определяем $t_{\bar{j}_s}^2 = \min\limits_{i \in \tilde{Y}_1^s} t_i^2$. Находим подмножество изделий $\tilde{Z}_1^s \subseteq \tilde{I}_1^s$, для которых справедливо соотношение $\bar{t}_r^{2s} \le t_{\bar{j}_s}^2$.

Если $\tilde{Y}_1^s \ne \varnothing$, то находим подмножество изделий $\tilde{Z}_1^s \subseteq \tilde{I}_1^s$, для которых справедливо соотношение $\bar{t}_r^{1s} = \min_{i \in \tilde{I}_1^s} t_i^s$. Если подмножество $\tilde{Z}_1^s$ включает в себя только одно изделие с индексом $\bar{j}_s$, то переходим к шагу 3. В противном случае, если $\tilde{Z}_1^s \ne \varnothing$, то находим индексы изделий, удовлетворяющих соотношению $t_{\bar{j}_s}^2 \le t_{\bar{j}_s}$, определяем $t_{\bar{j}_s}^2 = \min_{i \in \tilde{Z}_1^s} t_i^2$. Находим подмножество изделий $\tilde{Z}_1^s \subseteq \tilde{I}_1^s$, для которых справедливо соотношение $\bar{t}_r^{2s} \le t_{\bar{j}_s}^2$. Если подмножество $\tilde{Z}_1^s$ включает в себя только одно изделие с индексом $\bar{j}_s$, то переходим к шагу 3.

Как и на первом шаге, эту процедуру для подмножеств $\tilde{Y}_l^s$ или $\tilde{Z}_l^s$ выполняем до тех пор, пока на некотором k-м шаге расчета не получим некоторое подмножество $\tilde{J}^{k-1} = \tilde{Z}_l^s$ или $\tilde{J}^{k-1} = \tilde{Z}_l^s$, состоящее из одного элемента. Если выполнено $k = (K - 1)$ таких вычислений и подмножество $j \in \tilde{J}^{(K-1)}$ состоит не из одного, а из нескольких элементов, то среди них выбирается элемент (изделие) с наименьшим индексом $\bar{j}_s$. Переходим к шагу 3.

Шаг 3. Включаем изделие с индексом $\bar{j}_s$ в процесс сборки, устанавливая его на 1-й пост сборочного конвейера, перемещаем все изделия, уже находящиеся в процессе сборки, на следующий пост. Определяем $\tilde{I}_1^1 = \bar{j}_s$, $\tilde{I}_2^1 = \tilde{I}_2^1/\bar{j}_s$. Выполняем вычисления:

$$x_{\bar{j}_s}^1 = x_{\bar{j}_{s-1}}^2 = x_{\bar{j}_{s-2}}^3 = \ldots = x_{\bar{j}_{s-K+1}}^K = \theta_{\bar{j}_s}^1 + g + 1,$$
$$\theta_{\bar{j}_{s-1}}^2 = \theta_{\bar{j}_{s-2}}^3 = \ldots = \theta_{\bar{j}_{s-K+2}}^{K-1} =$$
$$= x_{\bar{j}_{s-1}}^1 + \max(t_{\bar{j}_{s-1}}^1, \sigma^s); \quad T^s = \theta_{\bar{j}_{s-1}}^2. \qquad (1)$$

Если $\tilde{I}_1^1 \ne \varnothing$, то переходим к шагу 2. В противном случае, если $\tilde{Y}_1^1 \ne \varnothing$, то переходим к шагу 4.

Шаг 4. На s-м шаге, где $n < s \le n + K - 1$, перемещаем все изделия, еще находящиеся в процессе сборки, на следующий пост. Выполняем вычисления в соответствии с выражением (1). Если $s = n + K - 1$, то положив $\bar{T}_{\bar{j}_s} = \theta_{\bar{j}}^K$, $T = \max_{1 \le i \le n} \theta_i^K$, алгоритм заканчивает свою работу.

Если $s < n + K - 1$, то вновь выполняем шаг 4 алгоритма.

Пример 2. На 5-ти сборочных постах производится сборка 4-х изделий. Времена сборки каждого изделия на различных сборочных постах приведены в табл. 2. Время перемещения изделия с одного поста на другой равно 1. Необходимо найти последовательность подачи изделий на сборочный конвейер, времена начала и завершения сборки всех изделий на каждом сборочном посту, а также времена завершения сборки каждого изделия, минимизирующие время выполнения всего планового задания.

Ниже приведены результаты выполненных расчетов в соответствии с описанным алгоритмом.

Число тактов перемещения изделий по постам сборочного конвейера $S = 4 + 5 - 1 = 8$, $\tilde{I}_1 = \tilde{I} = \{1, 2, 3, 4\}$; $\tilde{I}_2 = \varnothing$.

Шаг 1. $s = 1$; $t_j^1 = \min_{1 \le i \le n} t_i^1 = \min(7, 5, 6, 8) = 5$. Следовательно, первым в процесс сборки включается 2-е изделие.

Шаг 3. $x_2^1 = 1$, $\theta_2^1 = x_2^1 + t_2^1 = 1 + 5 = 6$; $x_2^2 = \theta_2^1 + g = 6 + 1 + 1 = 8$; $\tilde{I}_1^1 = \{1, 3, 4\}$, $\tilde{I}_2^1 = \{2\}$.

Так как $\tilde{I}_1^2 \ne \varnothing$, то выполняем шаг 2.

Шаг 2. $s = 2$; $\lambda_s = t_2^2 = 6$; $\{i | \tilde{Y}_1^2 \subseteq \tilde{I}_1^1;\ t_i^1 \le \lambda_1\} = \{3\}$, $t_3^1 = 6$. Выбираем 3-е изделие.

Шаг 3. $x_3^1 = 8$, $\theta_3^1 = 8 + 6 = 14$; $\theta_2^2 + t_2^2 = 8 + 6 = 14$; $x_3^1 = x_3^2 = \max(12, 14) + 1 + 1 = 16$; $\tilde{I}_1^2 = \{1, 4\}$, $\tilde{I}_2^2 = \{2, 3\}$.

Так как $\tilde{I}_1^2 \ne \varnothing$, то выполняем шаг 2.

Шаг 2. $s = 3$; $\sigma^2 = \max(t_2^3, t_3^2) = \max(7, 7) = 7$; $\{i | \tilde{Y}_1^3 \subseteq \tilde{I}_1^2;\ t_i^1 \le \sigma^2\} = \{1\}$, $t_1^1 = 7$. Выбираем 1-е изделие.

Шаг 3. $x_1^1 = 16$; $\theta_1^1 = x_1^1 + t_1^1 = 16 + 7 = 23$; $\theta_3^2 = x_3^2 + t_3^2 = 16 + 7 = 23$; $\theta_2^3 + t_2^3 = 16 + 7 = 23$; $x_1^2 = x_3^3 = x_2^4 = \max(23, 23, 23) + 1 + 1 = 25$; $\tilde{I}_1^3 = \{4\}$, $\tilde{I}_2^3 = \{1, 2, 3\}$. Так как $\tilde{I}_1^3 \ne \varnothing$, то выполняем шаг 2.

Таблица 2

Времена сборки изделий на различных постах

Номер изделия	Времена сборки изделий на постах					Время такта сборки
	1	2	3	4	5	
1	7	4	6	5	7	7
2	5	6	7	5	6	7
3	6	7	7	6	5	7
4	8	7	8	7	6	8

Шаг 2. $s = 4$; $\lambda_3 = \max(t_2^4,\ t_3^3,\ t_2^1) = \max(5, 7, 4) = 7$. Подмножество $\tilde{I}_1^3 = \{4\}$, т. е. включает в себя только одно изделие. Несмотря на то, что $\sigma^3 < t_4^1$, выбираем 4-е изделие.

Шаг 3. $x_4^1 = 25$; $\theta_4^1 = x_4^1 + t_4^1 = 25 + 8 = 33$, $\theta_1^2 = x_1^2 + t_1^2 = 25 + 4 = 29$; $\theta_3^3 = x_3^3 + t_3^3 = 25 + 7 = 32$; $\theta_2^4 = t_2^4 = 25 + 7 = 32$; $x_2^3 = x_3^4 = x_2^5 = \max(29, 32, 32) + + 1 + 1 = 34$.

$\tilde{I}_1^4 \neq \varnothing$, $\tilde{I}_2^4 = \{1, 2, 3, 4\}$. Так как $\tilde{I}_1^4 = \varnothing$, то выполняем шаг 4.

Шаг 4. $s = 5$. Перемещаем изделия 1, 3, 4, еще находящиеся в процессе сборки, на следующий пост. Сборка второго изделия завершена, $T_2 = \theta_2^5 = 40$. Переходим к шагу 3.

Шаг 3. Вычисляем $x_2^4 = 34$; $\theta_4^2 = x_4^2 + t_4^2 = 34 + 7 = = 41$, $\theta_1^3 = x_1^3 + t_1^3 = 34 + 6 = 40$, $\theta_3^4 = x_3^4 + t_3^4 = 34 + + 6 = 40$, $\theta_2^5 + t_2^5 = 34 + 6 = 40$; $x_4^2 = x_1^3 = x_3^5 = \max(40, 40, 40) + 1 + 1 = 42$.

Шаг 4. $s = 6$. Перемещаем изделия 1, 4, еще находящиеся в процессе сборки, на следующий пост. Сборка 3-го изделия завершена, $T_3 = \theta_3^5 = 47$. Переходим к шагу 3.

Шаг 3. Вычисляем $\theta_4^3 = x_4^3 + t_4^3 = 42 + 6 = 48$, $\theta_1^4 = x_1^4 + t_1^4 = 42 + 4 = 46$, $\theta_3^5 = x_3^5 + t_3^5 = 42 + 5 = 47$; $x_4^4 = x_1^5 = \max(48, 46, 47) + 1 + 1 = 50$. Переходим к шагу 4.

Шаг 4. $s = 7$. Перемещаем 4-е изделие на 5-й пост сборочного конвейера.

Сборка 1-го изделия завершена, $T_1 = \theta_1^5 = 57$.

Шаг 3. Вычисляем $\theta_1^5 = x_1^5 + t_1^5 = 50 + 7 = 57$; $\theta_4^4 = x_4^4 + t_4^4 = 50 + 7 = 57$; $x_4^5 = \max(57, 57) + 1 + 1 = 59$.

Шаг 4. $s = 8$; $\theta_4^5 = x_4^5 + t_4^5 = 59 + 6 = 65$. Сборка последнего в последовательности 4-го изделия завершена, $T_4 = \theta_2^5 = 65$.

Время завершения выполнения расписания, т. е. всех работ по сборке изделий, $\bar{T} = \max(T_1, T_2, T_3, T_4) = (55, 40, 47, 65) = 65$. ♦

Предлагаемый эвристический алгоритм приближенного решения задачи представляет собой алгоритм полиномиальной сложности с объемом вычислений порядка $O(n^2)$ и позволяет получить хорошее для практических приложений решение задачи.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для мелкосерийного производства в машиностроении чрезвычайно актуально построение расписаний выполнения сборочных работ на одном сборочном конвейере нескольких изделий, различных по техническим характеристикам, а также по количеству, составу и времени выполнения технологических операций. В условиях, когда определено распределение технологических операций каждого изделия по постам сборочного конвейера, в данной работе приведены алгоритмы выбора эффективной для практических приложений и близости к нижней границе оптимального решения последовательности и времен включения изделий в сборочный процесс, а также времена начала и окончания выполнения операций сборки всех изделий на каждом из сборочных постов с целью завершения времени выполнения планового задания в кратчайшие сроки. Точные методы решения задачи могут быть сконструированы на основе метода ветвей и границ, но они потребуют существенно большего объема вычислений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Конвей Р.В., Максвелл В.Л., Миллер Л.В.* Теория расписаний. — М.: Наука, 1975. — 359 с.
2. *Танаев В.С., Ковалев М.Я., Шафранский Я.М.* Теория расписаний. Групповые технологии. — Минск, Институт технической кибернетики НАН Беларуси, 1998. — 289 с.
3. *Евгенев Г.Б., Гаврюшин С.С., Хоботов Е.Н.* Основы автоматизации технологических процессов и производств. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2015. — 479 с.
4. *Ермолова М.А., Хоботов Е.Н.* Система планирования и построения расписаний работ для предприятий с конвейерной сборкой изделий // Автоматизация в промышленности. — 2014. — № 8. — С. 3—8.
5. *Зак Ю.А.* Оптимальное распределение технологических операций на сборочном конвейере // Кибернетика. — 1990. — № 4. — С. 45—54.
6. *Зак Ю.А.* Оптимизация работы сборочного конвейерного производства. — Математические модели и алгоритмы. — Saarbrьcken: Palmarium Academic Publishing, 2016. — 92 с.
7. *Зак Ю.А.* Повышение эффективности работы сборочных конвейерных линий // Научное обозрение: экономика и управление. — 2012. — № 4. — С. 123—134.
8. *Joldbauer H.* Produktionsoptimierung: Wirtschaffende sowie kunden-orientierte Planung und Steuerung. — Berlin—Wien: Springer, 2008. — 390 s.
9. *Domschke W., Scholl A., Voβ S.* Produktionsplanung. Ablauforganisatorische Aspekte. — Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2005. — 456 s.
10. *Brucker P.* Scheduling Algorithms. — Berlin, Heidelberg und N.-Y.: Springer-Verlag, 2007. — 367 p.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.А. Лазаревым.

Зак Юрий Александрович — д-р техн. наук,
науч. эксперт и консультант, г. Аахен, Германия,
✉ yuriy_zack@hotmail.com.

Поступила в редакцию 14.06.2018, после доработки 03.10.2018.
Принята к публикации 17.10.2018.