УДК 681.5.075 DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2022.5.2

УСЛОВИЕ ОГРАНИЧЕННОСТИ АНИЗОТРОПИЙНОЙ НОРМЫ ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ

А.В. Юрченков

Аннотация. Проводится анизотропийный анализ для линейных дискретных стационарных систем с мультипликативными шумами. Используется описание динамики системы в пространстве состояний. Внешнее возмущение принадлежит классу последовательностей случайных векторов с ограниченным уровнем средней анизотропии. Мультипликативные шумы центрированы и имеют единичные дисперсии. Внешнее возмущение и мультипликативные шумы предполагаются взаимно независимыми. Для рассматриваемой системы получено условие ограниченности анизотропийной нормы в терминах неравенства типа Риккати на основе леммы о вещественной ограниченности в рамках анизотропийной теории. Показано, что с помощью специального преобразования можно свести задачу анализа ограниченности анизотропийной нормы к задаче выпуклой оптимизации с дополнительными ограничениями. Из существования решения задачи выпуклой оптимизации будет следовать ограниченность анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами, а минимальная верхняя граница анизотропийной нормы может быть получена после решения соответствующей задачи выпуклой оптимизации.

Ключевые слова: анизотропийная теория, анизотропийная норма, мультипликативные шумы, стационарные системы, лемма о вещественной ограниченности.

ВВЕДЕНИЕ

Подавление влияния внешних возмущений до сих пор остается одной из наиболее актуальных задач в теории управления [1, 2]. Впервые появившись в середине прошлого века, когда сложность технических систем достигла уровня, при котором высокая точность была одним из приоритетов, направление, связанное с парированием возмущений, сформировало целый раздел в современной теории управления с множеством приложений для различного вида систем [3–5]. При этом в задачах движения по заданной траектории на объект управления могут действовать возмущения, стохастические характеристики которых существенно влияют на выбор закона управления. Варианты решения задачи подавления влияния внешних возмущений с ограниченной энергией рассмотрены в работах [6, 7]. Этот подход обеспечивает оптимальность синтезированного управления, но обладает и недостатком: регуляторы имеют большую размерность. Особенности технической реализации оптимальных законов управления для непрерывных систем с ограниченными возмущениями проанализированы в статье [8].

В теории управления решены задачи управления не только для случая ограниченных возмущений. В $\mathcal{H}_2$-теории рассмотрены случайные возмущения с известными стохастическими характеристиками, для $\mathcal{H}_\infty$-законов управления выбираются квадратично интегрируемые в непрерывном и квадратично суммируемые в дискретном случае возмущения [9]. Выбор критерия оптимальности во многом зависит от вида возмущений, поскольку $\mathcal{H}_\infty$-регуляторы обладают повышенным консерватизмом из-за предположения о том, что вход системы является «наихудшим», и дают результаты, далекие от оптимальных, при слабо окрашенных возмущениях в противовес $\mathcal{H}_2$-законам управления, ориентированным на случай отсутствия неопределенности в стохастических параметрах гауссовских возмущений.

Несмотря на предложенную смешанную $\mathcal{H}_2 / \mathcal{H}_\infty$-постановку задачи, направленную на нивелирование недостатков каждого упомянутого метода борьбы с возмущениями [10, 11], где разные типы воздействия на систему разделены по каналам, был разработан стохастический подход к $\mathcal{H}_\infty$-оптимизации [12–14]. Этот подход был предложен И.Г. Владимировым и получил название *анизотропийная теория управления*. Введенное понятие *анизотропии* случайного вектора, представляющее собой меру неопределенности для функции распределения этого вектора, позволило уменьшить консерватизм, свойственный $\mathcal{H}_\infty$-теории. Для стационарных гауссовских последовательностей случайных векторов было введено определение уровня *средней анизотропии*. Критерий качества – *анизотропийная норма* – выбран в виде стохастической $\mathcal{H}_\infty$-нормы системы. В рамках анизотропийной теории управления для линейных стационарных и нестационарных детерминированных моделей были решены задачи анализа и синтеза фильтров и регуляторов. Впервые задача анализа со случайными матрицами в описании объекта в пространстве состояний была поставлена в работе [15], что позволило позднее рассмотреть системы с мультипликативными шумами. Такой вид описания динамики характерен для механических систем, финансовых моделей, химических реакций [16, 17], сетевых систем [18, 19], что стимулирует интерес к изучению систем с мультипликативными шумами.

Первые работы в рамках анизотропийной теории, касающиеся формирования управления для системы с мультипликативными шумами, были оценочными и основывались на подходе мажорирования анизотропийной нормы сверху, для которой был предложен один из способов формирования управления [20]. В работе [21] рассматривалась задача анализа, но точный метод вычисления анизотропийной нормы был разработан в статье [22] на основе подхода, изложенного в работе [15]. После решенной задачи анализа естественным образом удалось получить решение задачи построения оценки в случае коррекции отказа в измерениях [23] и оценки на основе сети датчиков [24]. В случае использования сети датчиков в задачах оценки одним из возможных способов повышения эффективности полученной оценки является настройка схемы обмена информации между датчиками, что отражено в работе [25]. Перечисленные результаты относятся к нестационарным системам; в свою очередь, для стационарных систем в статье [26] решена задача анализа, на основе которой в настоящей работе будет показано, что решение задачи анизотропийного анализа может быть сведено к разрешимости систем матричных неравенств с выпуклыми ограничениями.

В § 1 приводятся краткие сведения из анизотропийной теории, в § 2 – постановка задачи, в § 3 – основной результат, в § 4 представлено моделирование.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В данном параграфе перечислены только базовые определения анизотропийной теории для дискретных нестационарных систем. Более полное описание можно найти в работах [27, 28].

1.1. Средняя анизотропия и анизотропийная норма

Определение средней анизотропии последовательности случайных векторов было введено в работе [13]. Для функции плотности распределения вероятностей $f(x)$ случайного m-мерного вектора $w \in \mathbb{R}^m$ анизотропия определяется следующим образом:

$$\mathcal{A}(w) = \min_{\lambda>0} \mathcal{D}(f \,\|\, p_\lambda),$$

где эталонная функция распределения вероятностей $p_\lambda(x)$ – центрированная гауссовская со скалярной ковариационной матрицей λI_m

$$p_\lambda(x) = (2\pi\lambda)^{-m/2} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2\lambda}\right),$$

а $\mathcal{D}(f \,\|\, p_\lambda)$ представляет собой информационное уклонение Кульбака – Лейблера для функции f относительно p_λ:

$$\mathcal{D}(f \,\|\, p_\lambda) = E\left[\ln \frac{f}{p_\lambda}\right],$$

где $E[\cdot]$ – оператор математического ожидания.

Средняя анизотропия последовательности случайных векторов $W = \{w_k\}$ представляет собой усреднение по времени анизотропии неограниченно растущего фрагмента последовательности

$$\bar{\mathcal{A}}(W) = \lim_{N\to\infty} \frac{\mathcal{A}(W_{0:N-1})}{N},$$

где $W_{0:N-1} = \left(w_0^{\mathrm{T}}, \ldots, w_{N-1}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$ – расширенный вектор. Более развернутый материал, касающийся определения и свойств средней анизотропии, изложен в работе [28].

Рассмотрим линейную систему F с входной $W \in \mathbb{L}_2^m$ и выходной $Z \in \mathbb{L}_2^p$ последовательностями соответственно. Если последовательность W получена с помощью линейного фильтра G из белошумной гауссовской последовательности V, то каждый случайный вектор w_j из последовательности может быть представлен в виде

$$w_j = \sum_{k=0}^{\infty} g_k v_{j-k}, \quad j \in \mathbb{Z},$$

где $g_k \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $k \geq 0$ – импульсная функция. Генерирующий фильтр G связан со своей передаточной функцией $G(z)$ следующим образом:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k$$

для $|z| < 1$, $z \in \mathbb{C}$. Передаточная функция $G(z)$ имеет конечную $\mathcal{H}_2$-норму $\|G\|_2$, которую можно вычислить, пользуясь выражением

$$\|G\|_2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{tr}\left(g_k g_k^{\mathrm{T}} \right) \right)^{1/2}.$$

Обозначим в качестве $F(z)$ передаточную функцию линейной системы F, имеющую конечную $\mathcal{H}_\infty$-норму

$$\|F\|_\infty = \sup_{|z|<1} \bar{\sigma}\left(F(z)\right) = \operatorname{ess}\sup_{-\pi\leq\omega\leq\pi} \bar{\sigma}\left(\hat{F}(\omega)\right),$$

где $\bar{\sigma}(\cdot)$ – максимальное сингулярное число матрицы, $\hat{F}(\omega) = \lim_{\rho\to 1-} F\left(\rho e^{i\omega}\right)$.

В анизотропийной теории управления множество линейных фильтров, генерирующих последовательности с ограниченной средней анизотропией, обозначают следующим образом:

$$\mathcal{G}_a = \left\{ G \in \mathcal{H}_2^{m\times m} :\ W = GV,\ \bar{\mathcal{A}}\left(W\right) \leq a \right\},$$

где $\mathcal{H}_2^{m\times m}$ – пространство Харди комплекснозначных матричных функций, аналитичных внутри единичного круга, $V = \{v_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ – центрированная гауссовская последовательность с единичной ковариационной матрицей [12]. Анизотропийная норма линейной стационарной системы F со входом W, генерируемым фильтром G, имеет вид

$$|||\,F\,|||_a = \sup\left\{ \frac{\|FG\|_2}{\|G\|_2} : G \in \mathcal{G}_a \right\}.$$

Для причинной системы $F \in \mathcal{H}_\infty^{p\times m}$, для которой выполнено условие $\frac{\|F\|_2}{\sqrt{m}} < \|F\|_\infty$, анизотропийная норма всегда принимает промежуточное значение

$$\frac{1}{\sqrt{m}}\|F\|_2 = \lim_{a\to 0} |||\,F\,|||_a \leq |||\,F\,|||_a \leq \lim_{a\to\infty} |||\,F\,|||_a = \|F\|_\infty .$$

Указанное свойство позволяет говорить об анизотропийной теории как об обобщающей для $\mathcal{H}_2$- и $\mathcal{H}_\infty$-теорий, поскольку в качестве предельных случаев, когда средняя анизотропия равна нулю или стремится к бесконечности, можно получить либо масштабированную $\mathcal{H}_2$-норму, либо $\mathcal{H}_\infty$-норму линейной стационарной системы. В случае, когда средняя анизотропия принимает промежуточные значения, анизотропийную норму можно назвать компромиссной между указанными нормами.

Для возмущающих последовательностей с уровнем средней анизотропии, отличным от нуля, анизотропийная норма представляет собой стохастический аналог $\mathcal{H}_\infty$-нормы, позволяющей использовать информационный критерий о неравномерности распределения внешнего возмущения для уменьшения консервативности классической $\mathcal{H}_\infty$-нормы системы, рассчитанной на «наихудший» случай.

1.2. Вычисление анизотропийной нормы

Рассмотрим описание системы в пространстве состояний:

$$F:\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bw_k, \\ z_k = Cx_k + Dw_k, \end{cases} \tag{1}$$

где $x_k \in \mathbb{R}^{n_x}$ – состояние, $w_k \in \mathbb{R}^{m_w}$ – возмущение, $z_k \in \mathbb{R}^{p_z}$ – выход системы. Матрицы системы A, B, C, D стационарны и имеют соответствующие размерности, система считается устойчивой, когда спектральный радиус матрицы A ограничен единицей: $\rho(A) < 1$. Внешнее возмущение представляет собой окрашенную последовательность, т. е. она получена с помощью генерирующего фильтра из белошумной последовательности V. Состояние w_k фильтра G является линейной комбинацией состояния системы (1) и элемента гауссовской последовательности V:

$$w_k = Lx_k + \Sigma^{1/2} v_k,$$

где $\Sigma \in \mathbb{R}^{m_w\times m_w}$ – симметричная положительно определенная матрица, $L \in \mathbb{R}^{m_w\times n_x}$ – матрица, обеспечивающая асимптотическую устойчивость для $A + BL$. Существует параметр $q \in \left[0, \|F\|_\infty^{-2}\right)$, связывающий через уравнение специального вида уровень средней анизотропии a и анизотропийную норму линейной стационарной системы с решениями уравнений Риккати и Ляпунова, выраженных через матрицы пространства состояний [14]:

$$|||\,F\,|||_a = \left(\frac{1}{q}\left(1 - \frac{m_w}{\operatorname{tr}\left(LPL^{\mathrm{T}} + \Sigma\right)} \right) \right)^2,$$

при этом генерирующий фильтр G гарантирует уровень средней анизотропии, равный a, связанный с ковариационной матрицей Σ следующим образом:

$$a = -\frac{1}{2}\ln\det\left(\frac{m_w\Sigma}{\mathrm{tr}\left(LPL^{\mathrm{T}} + \Sigma\right)}\right), \qquad (2)$$

где $P \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ – решение уравнения Ляпунова

$$P = \left(A + BL\right)P\left(A + BL\right)^{\mathrm{T}} + B\Sigma B^{\mathrm{T}}, \qquad (3)$$

параметры q, L, Σ связаны с решением уравнения Риккати:

$$\begin{gathered} R = A^{\mathrm{T}}RA + qC^{\mathrm{T}}C + L^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}L, \\ \Sigma = \left(I_{m_w} - qD^{\mathrm{T}}D - B^{\mathrm{T}}RB\right)^{-1}, \\ L = \Sigma\left(B^{\mathrm{T}}RA + qD^{\mathrm{T}}C\right). \end{gathered} \qquad (4)$$

Более подробно вопросы анализа в анизотропийной теории управления изложены в работах [13, 14]. Перечисленные понятия относятся только к линейным стационарным системам, что составляет лишь часть моделей, рассматриваемых в анизотропийной теории.

1.3. Субоптимальная задача

Система матричных связанных уравнений (2)–(4) является нелинейной, что затрудняет поиск численного решения. По этой причине вместо решения оптимальных задач в анизотропийной теории часто останавливаются на решении субоптимальных, для которых разработан эффективный численный метод решения. Этот метод на основе выпуклой оптимизации позволяет найти такое значение γ, которое служит ограничением сверху на анизотропийную норму $|||F|||_a$ системы (1). Более подробно материал о численных методах решения субоптимальных задач в анизотропийной теории управления изложен в работах [29, 30].

Для линейной системы вида (1) анизотропийная норма ограничена числом γ, если неравенства

$$\eta - \left(\exp\left(-2a\right)\det\Xi\right)^{1/m_w} < \gamma^2, \qquad (5)$$

$$\begin{bmatrix} \Xi - \eta I_{m_w} & * & * \\ B & -\Theta & * \\ D & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0, \qquad (6)$$

$$\begin{bmatrix} -\Theta & * & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * \\ A & B & -\Theta & * \\ C & D & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} \prec 0 \qquad (7)$$

имеют положительно определенные решения $\Xi \in \mathbb{R}^{m_w \times m_w}$, $\Theta \in \mathbb{R}^{p_z \times p_z}$ и параметр $\eta > 0$, симметричные относительно главной диагонали блоки обозначены символом $*$. Достаточные условия ограниченности анизотропийной нормы заданным числом γ вида (5)–(7) можно получить из уравнений (2)–(4) при переходе к неравенству с помощью леммы Шура, соответствующих замен переменных и свойств решений уравнений и неравенств Риккати [29]. Здесь и далее неравенства типа (6) и (7) понимаются в смысле положительной или отрицательной определенности.

Линейные матричные неравенства (6) и (7) получены путем конгруэнтных преобразований: после применения леммы Шура необходимо умножить эти неравенства слева и справа на матрицы $\mathrm{blockdiag}\left(I_{m_w}, \Theta, I_{p_z}\right)$ и $\mathrm{blockdiag}\left(I_{p_z}, I_{m_w}, \Theta, I_{p_z}\right)$ соответственно.

Замечание 1. Указанный прием перехода к матричным неравенствам является не единственным способом получения субоптимального решения на основе исходной оптимальной задачи. При использовании замены $\Theta^{-1} = \Pi$ можно ввести неравенство

$$\begin{bmatrix} \Theta & I_{p_z} \\ I_{p_z} & \Pi \end{bmatrix} \succ 0, \qquad (8)$$

что позволяет избавиться от нелинейности в неравенствах (6) и (7) и воспользоваться алгоритмом вычисления взаимообратных матриц Θ и Π [31, 32].

Сама задача оптимизации формулируется следующим образом:

$$\gamma^2 \underset{\Theta, \Xi, \eta, \gamma^2}{\rightarrow} \min$$

при условиях (5)–(8). Поиск минимального значения γ^2 может быть проведен с помощью стандартных процедур оптимизации в прикладных пакетах программ.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим линейную дискретную стационарную систему F с реализацией в пространстве состояний вида (1), $w_k \in \mathbb{R}^{m_w}$ – возмущение, средняя анизотропия которого ограничена заданным числом a, матрица собственной динамики системы представляется в виде линейной комбинации известных матриц со случайными коэффициентами

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_{i,k} A_i, \qquad (9)$$

случайные величины $\xi_{i,k}$, $i = \{1, \ldots, n\}$, имеют нулевое среднее и единичную ковариацию, существования первых двух моментов этих величин достаточно для применения методов анизотропийной теории. Матрицы $A_i,\ i=\{0,\dots,n\}, B,\ C,\ D$ известны и имеют соответствующие размерности. Дополнительное условие, которое является аналогом гурвицевости матрицы в классическом случае стационарных дискретных систем, имеет вид

$$\lim_{k\to\infty}\rho\left(\left(E\left[A^k\right]\right)^{\frac{1}{k}}\right)<1, \qquad (10)$$

где $\rho(\cdot)$ – спектральный радиус.

Задача состоит в поиске условия для матриц системы (1), (9), при выполнении которого анизотропийная норма будет ограничена заданным числом γ:

$$|||F|||_a \le \gamma.$$

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В общем случае все матрицы системы (1) могут содержать мультипликативные шумы, но мы остановимся именно на представленной постановке задачи, поскольку одним из практических приложений для таких моделей является исследование систем датчиков со случайными отказами, где в замкнутой системе мультипликативные шумы содержатся только в матрице A.

Следующая лемма будет использоваться как инструмент для вывода условия ограниченности анизотропийной нормы системы (1) при условии (9).

Лемма [26]**.** *Анизотропийная норма* $|||F|||_a$ *системы* (1) *с дополнительными условиями* (9), (10) *ограничена положительным числом* γ*, если существуют положительно определенные матрицы* $R_1,\ R_2\in\mathbb{R}^{n_x\times n_x}$ и *параметр* $q\in\left[0,\|F\|_\infty^{-2}\right)$*, удовлетворяющие системе модифицированных уравнений типа Риккати*

$$\begin{gathered}R_1=\sum_{i=0}^{n}A_i^{\mathrm T}R_1A_i+qC^{\mathrm T}C,\\ R_2=A_0^{\mathrm T}R_2A_0+L^{\mathrm T}S^{-1}L,\\ S=\left(I_{m_w}-qD^{\mathrm T}D-B^{\mathrm T}R_1B-B^{\mathrm T}R_2B\right)^{-1},\\ L=S\left(qD^{\mathrm T}C+B^{\mathrm T}R_1A_0+B^{\mathrm T}R_2A_0\right),\end{gathered} \qquad (11)$$

и неравенству специального вида

$$-\frac{1}{2}\ln\det\left(\left(1-q\gamma^2\right)S\right)\ge a, \qquad (12)$$

где $a>0$ *– граница уровня средней анизотропии для входной последовательности случайных векторов* $\{w_k\}$.

Данная лемма является модифицированным аналогом леммы о вещественной ограниченности для стационарных систем в рамках анизотропийной теории управления [33]. Для того чтобы нелинейность в формулах (11) и (12) не помешала найти решение поставленной задачи, необходимо свести уравнения к линейным матричным неравенствам с дополнительным выпуклым ограничением. Перед тем, как сформулировать этот результат в виде теоремы, докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Если средняя анизотропия возмущения* $\{w_k\}$ *системы* (1) *ограничена числом* $a\ge 0$ *при условии* (10)*, то при существовании решения неравенства*

$$\begin{gathered}\tilde R\succ\sum_{i=0}^{n}A_i^{\mathrm T}RA_i+qC^{\mathrm T}C+L^{\mathrm T}S^{-1}L,\\ S=\left(I_{m_w}-qD^{\mathrm T}D-B^{\mathrm T}\tilde RB\right)^{-1},\\ L=S\left(B^{\mathrm T}\tilde RA_0+qD^{\mathrm T}C\right),\end{gathered} \qquad (13)$$

в совокупности с неравенством специального вида

$$-\frac{1}{2}\ln\det\left(\left(1-q\gamma^2\right)S\right)\ge a,$$

где решение $\tilde R\succ 0$, $S\succ 0$, $q\in\left[0,\|F\|_\infty^{-2}\right)$, *анизотропийная норма системы* (1) *при условии* (9) *будет ограничена числом* $\gamma>0$.

Доказательство теоремы 1. Введем новую матричную переменную вида

$$R=R_1+R_2,$$

которая будет удовлетворять уравнению, подобному уравнению Риккати

$$\begin{gathered}R=\sum_{i=0}^{n}A_i^{\mathrm T}RA_i+qC^{\mathrm T}C+L^{\mathrm T}S^{-1}L-\sum_{i=1}^{n}A_i^{\mathrm T}R_2A_i,\\ S=\left(I_{m_w}-qD^{\mathrm T}D-B^{\mathrm T}RB\right)^{-1},\\ L=S\left(qD^{\mathrm T}C+B^{\mathrm T}RA_0\right),\end{gathered}$$

полученному на основе формулы (11) с учетом введенной переменной R. Тогда согласно свойствам решений уравнений и неравенств Риккати [34] будет существовать матрица $\tilde R=\tilde R^{\mathrm T}\succ 0$, удовлетворяющая неравенству (13). ♦

Несмотря на то, что теорема 1 содержит достаточные условия ограниченности анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами, их проверка осложняется нелинейностью, присутствующей в формулах (12) и (13). Следующее утверждение содержит условие ограниченности анизотропийной нормы в терминах линейных матричных неравенств с выпуклым ограничением.

Теорема 2. *Для системы с мультипликативными шумами* (1) *и дополнительными условиями* (9) *и* (10) *при ограниченности уровня средней анизотропии внешнего возмущения числом* $a \geq 0$ *анизотропийная норма системы не будет превышать порогового значения* γ

$$|||F|||_a \leq \gamma,$$

если неравенства

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} A_i^{\mathrm{T}} R A_i - R + C^{\mathrm{T}} C & * \\ B^{\mathrm{T}} R A_0 + D^{\mathrm{T}} C & \eta I_{m_w} - D^{\mathrm{T}} D - B^{\mathrm{T}} R B \end{bmatrix} \prec 0, \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi - D^{\mathrm{T}} D & * \\ RB & R \end{bmatrix} \succ 0, \quad (15)$$

$$\ln\det\Psi \geq 2a + \ln\left(\eta - \gamma^2\right) \quad (16)$$

имеют решения $R = R^{\mathrm{T}} \succ 0$, $\Psi = \Psi^{\mathrm{T}} \succ 0$, $\eta > 0$.

Доказательство теоремы 2. В качестве новой переменной обозначим $\eta = q^{-1}$, тогда после соответствующей замены $R = q^{-1}\tilde{R}$ неравенство (14) может быть получено из неравенства (13) путем применения леммы Шура. Далее введем матрицу Θ, удовлетворяющую соотношению $0 \prec \Theta \prec S^{-1}$. Для матрицы $\Psi = q^{-1}\Theta$ будет выполняться неравенство (15) после применения леммы Шура. Выпуклое ограничение (16) – переписанное в терминах новых переменных неравенство специального вида (14). ♦

Как нетрудно заметить, система (14)–(16) является выпуклой по переменной γ^2. Вследствие этого можно сформулировать задачу выпуклой оптимизации в виде

$$\gamma^2 \underset{R,\Psi,\eta,\gamma^2}{\rightarrow} \min$$

при условии существования решений линейных матричных неравенств (14) и (15) с выпуклым ограничением (16). Указанная задача выпуклой оптимизации может быть решена с помощью стандартных средств для задач полуопределенного программирования.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ

В качестве примера рассмотрим двухмассовую колебательную систему грузов, описанную в работе [35]. Указанная модель была замкнута стандартным линейно-квадратичным регулятором и дисретизована. В пространстве состояний такая модель имеет реализацию

$$x_{k+1} = \left(A_0 + \xi_1 A_1 + \xi_2 A_2\right) x_k + B w_k,$$
$$z_k = C x_k + D w_k,$$

где внешнее возмущение в виде последовательности случайных векторов $\{w_k\}$ имеет ограниченную числом a среднюю анизотропию, случайные величины ξ_1, ξ_2 центрированы и имеют единичную дисперсию. Числовые матрицы известны:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0,9918 & 0,0444 & 0,0031 & -0,0043 \\ -0,3177 & 0,7829 & 0,1190 & -0,1651 \\ 0,0012 & 0,0000 & 0,9988 & 0,0500 \\ 0,0498 & 0,0012 & -0,0499 & 0,9987 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,0992 & 0,0044 & 0,0003 & -0,0004 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0001 & 0,0000 & 0,1492 & 0,0075 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 \\ -6,0545 & -4,7020 & 1,5823 & -2,7857 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -0,0001 \\ -0,0043 \\ 0,0012 \\ 0,0507 \end{bmatrix}, \quad D = 0.$$

В таблице приведены значения границы γ анизотропийной нормы $|||F|||_a$, вычисленные при разных значениях уровня средней анизотропии a возмущения.

Зависимость границы анизотропийной нормы от средней анизотропии

Средняя анизотропия a	0,0	0,01	0,05	0,10	0,20	0,50	1,00	1,50	2,00	3,00
Граница анизотропийной нормы γ	0,3035	0,3048	0,3124	0,3211	0,3363	0,3655	0,3737	0,4299	0,9739	2,9180

При этом $\mathcal{H}_\infty$-норма системы оказалась равной 3,3244, т. е. с точки зрения среднеквадратичного коэффициента усиления гораздо лучшее качество оценивания обеспечивается путем применения анизотропийного оценивателя.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье рассмотрена проблема анализа линейных дискретных стационарных систем с мультипликативными шумами в рамках анизотропийной теории. Показано, что на основе леммы о вещественной ограниченности и специальной замены переменных можно получить условие ограниченности анизотропийной нормы в терминах матриц реализации системы в пространстве состояний, при этом численное решение задачи минимизации верхней границы анизотропийной нормы можно получить стандартными средствами полуопределенного программирования. В качестве демонстрации рассмотрен численный пример вычисления верхней границы анизотропийной нормы колебательной системы. Показано, что использование оценивания на основе анизотропийного подхода может значительно улучшить качество оценивания при априорной информации об ограниченности уровня средней анизотропии внешнего возмущения, особенно в случаях слабо окрашенных возмущений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wang, L., Guan, R.P.* Disturbance Rejection and Reference Tracking via Observer Design / State Feedback Control and Kalman Filtering with MATLAB/Simulink Tutorials. – IEEE, 2022. – P. 195–251.
2. *Kondratenko, Yu.P., Kuntsevich, V.M., Chikrii, A.A., Gubarev, V.F.* 5 Inverse Model Approach to Disturbance Rejection Problem / Advanced Control Systems: Theory and Applications. – River Publishers, 2021. – P. 129–166.
3. *Gómez-León, B.C., Aguilar-Orduña, M.A., Sira-Ramírez, H.J.* A Disturbance Observer Based Control Scheme Using an Active Disturbance Rejection Controller: An Underactuated Moving Crane Example // 18th Int. Conf. on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE). – Mexico City, Mexico, 2021. – P. 1–6.
4. *Mylvaganam, T., Sassano, M.* Disturbance Attenuation by Measurement Feedback in Nonlinear Systems via Immersion and Algebraic Conditions // IEEE Transactions on Automatic Control. – Vol. 65, no. 2. – P. 854–860.
5. *Lu, P., Sandy, T., Buchli, J.* Nonlinear Disturbance Attenuation Control of Hydraulic Robotics // 2018 IEEE Int. Conf. on Robotics and Biomimetics (ROBIO). – Kuala Lumpur, Malaysia, 2018. – P. 1451–1458.
6. *Якубович Е.Д.* Решение одной задачи оптимального управления дискретной линейной системой // Автоматика и телемеханика. – 1975. – № 9. – С. 73–79. [*Yakubovich, Ye.D.* Solving One Problem of Optimal Control for a Discrete Linear System // Automation and Remote Control. – 1975. – Vol. 36, no. 9. – P. 1447–1453.]
7. *Vidyasagar, M.* Optimal Rejection of Persistent Bounded Disturbances // IEEE Trans. Automat. Control. – 1986. – Vol. 31. – P. 527–535.
8. *Назин С.А., Поляк Б.Т., Топунов М.В.* Подавление ограниченных внешних возмущений с помощью метода инвариантных эллипсоидов // Автоматика и телемеханика. – 2007. – № 3. – С. 106–125. [*Nazin, S.A., Polyak, B.T., Topunov, M.V.* Rejection of Bounded Exogenous Disturbances by the Method of Invariant Ellipsoids // Automation and Remote Control. – 2007. – Vol. 68, no. 3. – P. 467–486.]
9. *Doyle, J.C., Glover, K., Khargonekar, P.P., Francis, B.A.* State-space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems // IEEE Trans. Automat. Control. – 1989. – Vol. 34, no. 8. – P. 831–847.
10. *Doyle, J.C., Zhou, K, Bodenheimer, B.* Optimal Control with Mixed H_2 and H_∞ Performance Objectives // Proc. of the American Control Conference. – Pittsburg, 1989. – P. 2065–2070.
11. *Steinbuch, M., Bosgra, O.H.* Necessary Conditions for Static and Fixed Order Dynamic Mixed H_2/H_∞ Optimal Control // Proc. of the American Control Conference. – Boston, 1991. – P. 1137–1142.
12. *Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdyukov A.P.* Stochastic Approach to H_∞ Optimization // Proc. of the 33rd IEEE Conf. Decision and Control. – Lake Buena Vista, 1994. – Vol. 3. – P. 2249–2250.
13. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем // Доклады РАН. – 1995. – Т. 342, № 5. – С. 583–585. [*Vladimirov, I.G., Kurdjukov, A.P., Semyonov, A.V.* Anisotropy of Signals and the Entropy of Linear Stationary Systems // Doklady Math. – 1995. – Vol. 51. – P. 388–390.]
14. *Vladimirov, I.G., Kurdjukov, A.P., Semyonov, A.V.* State-Space Solution to Anisotropy-Based Stochastic H_∞-optimization Problem // Proc. of the 13 IFAC World Congess. – San Francisco, 1996. – P. 427–432.
15. *Kustov, A.Yu.* State-Space Formulas for Anisotropic Norm of Linear Discrete Time Varying Stochastic Systems // Proc. of the 15th Int. Conf. on Electrical Eng., Comp. Science and Aut. Control. – Mexico City, Mexico, 2018. – P. 1–6.
16. *Gershon, E., Shaked, U., Yaesh, I.* H_∞ Control and Filtering of Discrete-Time Stochastic Systems with Multiplicative Noise // Automatica. – 2001. – Vol. 37. – P. 409-417.
17. *Gershon, E., Shaked, U., Yaesh, I.* H_∞ Control and Estimation of State-multiplicative Linear Systems. – Lecture Notes in Control and Information Sciences. – Springer-Verlag, 2005. – Vol. 318.
18. *Shen, B., Wang, Z., Hung, Y.S.* Distributed H_∞-consensus Filtering in Sensor Networks with Multiple Missing Measurements: The Finite-Horizon Case // Automatica. – 2010. – Vol. 46. – P. 1682–1688.
19. *Liu, S., Zhao, G., He, Y., Gao, C.* Decentralized Moving Horizon Estimation for Networked Navigation System with Packet Dropouts // 39th Chinese Control Conference (CCC). – Shenyang, China, 2020. – P. 3381–3384.

20. *Юрченков А.В.* Синтез анизотропийного управления для линейной дискретной системы с мультипликативными шумами // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2018. – № 6. – С. 33–44. [*Yurchenkov, A.V.* Anisotropy-Based Controller Design for Linear Discret-Time Systems with Multiplicative Noise // Journal of Computer and Systems Sciences Int. – 2018. – Vol. 57, no. 6. – P. 864–873.]
21. *Юрченков А.В., Кустов А.Ю., Курдюков А.П.* Условия ограниченности анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами // Доклады Академии наук. – 2016. – Т. 467, № 4. – С. 396–399. [*Yurchenkov, A.V., Kustov, A.Yu, Kurdyukov, A.P.* Anisotropy-based Bounded Real Lemma for Discrete-time Systems with Multiplicative Noise // Doklady Mathematics. – 2016. – Vol. 93, no. 2. – P. 238–240.]
22. *Belov, I.R., Yurchenkov, A.V., Kustov, A.Yu.* Anisotropy-Based Bounded Real Lemma for Multiplicative Noise Systems: the Finite Horizon Case // Proc. of the 27th Med. Conf. on Control and Automation. – Akko, 2019. – P. 148–152.
23. *Kustov, A.Yu., Yurchenkov, A.V.* Finite-horizon Anisotropy-based Estimation with Packet Dropouts // IFAC-PapersOnLine. – 2020. – Vol. 53, no. 2. – P. 4516–4520.
24. *Kustov, A.Yu., Yurchenkov, A.V.* Finite-horizon Anisotropic Estimator Design in Sensor Networks // Proc. of the 59th IEEE Conf. on Decision and Control. – Jeju: IEEE, 2020. – P. 4330–433.
25. *Yurchenkov, A.V., Kustov, A.Yu.* Sensor Network Adjusting Based on Anisotropic Criterion // Proc. of the 2021 9th Int. Conf. on Systems and Control. – Caen, 2021. – P. 268–273.
26. *Kustov, A.Yu., Timin, V.N., Yurchenkov, A.V.* Boundedness Condition for Anisotropic Norm of Linear Discrete Time-invariant Systems with Multiplicative Noise // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 1864. – P. 1–5.
27. *Diamond, P., Vladimirov, I.G., Kurdyukov, A.P., Semenov, A.V.* Anisotropy-Based Performance Analysis of Linear Discrete Time Invariant Control Systems // Int. Journ. of Control. – 2001. – Vol. 74, no. 1. – P. 28–42.
28. *Diamond, P., Kloeden, P., Vladimirov, I.G.* Mean Anisotropy of Homogeneous Gaussian Random Fields and Anisotropic Norms of Linear Translation-Invariant Operators on Multidimensional Integer Lattices // Journ. of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. – 2003. – Vol. 16, no. 3. – P. 209–231.
29. *Tchaikovsky, M.M., Kurdyukov, A.P., Timin, V.N.* Strict Anisotropic Norm Bounded Real Lemma in Terms of Inequalities // Proc. of the 18th IFAC World Congr. – Milan, 2011. – P. 2332–2337.
30. *Tchaikovsky, M.M.* Static Output Feedback Anisotropic Controller Design by LMI-based Approach: General and Special Cases // Proc. of the American Control Conference. – Montreal, 2012. – P. 5208–5213.
31. *Iwasaki, T. and Skelton, R.E.* The XY-centering Algorithm for the Dual LMI Problem: A New Approach to Fixed Order Design // Int. Journ. of Control. – 1995. – Vol. 62. – P. 1257–1272.
32. *Apkarian, P. and Tuan, H.D.* Concave Programming in Control Theory // Journ. of Global Optimization. – 1999. – Vol. 15. – P. 343–370.
33. *Maximov, E.A., Kurdyukov, A.P., Vladimirov, I.G.* Anisotropic Norm Bounded Real Lemma for Linear Discrete Time Varying Systems // Proc. of the 18th IFAC World Congr. – Milan, 2011. – P. 4701–4706.
34. *de Souza, C.E.* On Stabilizing Properties of Solutions of the Riccati Difference Equation // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1989. – Vol. 34. – P. 1313–1316.
35. *Chilali, M., Gahinet, P.* H_∞ Design with Pole Placement Constraints: An LMI Approach // IEEE Trans. on Automatic Control. – 1996. – Vol. 41, no. 3. – P. 358–367.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 14.07.2022,
после доработки 30.10.2022.
Принята к публикации 9.11.2022.

Юрченков Александр Викторович – канд. физ.-мат. наук, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, г. Москва, ✉ alexander.yurchenkov@yandex.ru.

AN ANISOTROPY-BASED BOUNDEDNESS CRITERION FOR TIME-INVARIANT SYSTEMS WITH MULTIPLICATIVE NOISES

A.V. Yurchenkov

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ alexander.yurchenkov@yandex.ru

Abstract. This paper presents an anisotropy-based analysis of linear time-invariant systems with multiplicative noises. The system dynamics are described in the state space. The external disturbance belongs to the set of stationary sequences of random vectors with bounded mean anisotropy. The multiplicative noises are centered and have unit variance; the external disturbance and noises are mutually independent. We derive a boundedness criterion for the anisotropic norm in terms of Riccati-like inequalities using the bounded real lemma of the anisotropy-based theory. With a special change of variables, we reduce the analysis problem to a convex optimization problem with additional constraints. The existence of the latter's solution implies the bounded anisotropic norm of the system with multiplicative noises, and the minimal upper bound of the anisotropic norm can be obtained by solving this convex optimization problem.

Keywords: anisotropy-based theory, anisotropic norm, multiplicative noises, time-invariant systems, bounded real lemma.