

ПОСТРОЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ С МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМИ ШУМАМИ: АНИЗОТРОПИЙНЫЙ ПОДХОД[#]

А. В. Юрченков

Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва

✉ alexander.yurchenkov@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрена линейная дискретная стационарная система с мультипликативными шумами и управлением, находящаяся под влиянием внешнего возмущения из специального класса. Описание динамики выбранного объекта управления производится в пространстве состояний. Класс внешних возмущений содержит множество стационарных гауссовских последовательностей с ограниченным уровнем средней анизотропии. В качестве критерия качества управления выбрана анизотропийная норма замкнутой управлением системы. Требуется предложить схему управления на основе динамического звена, при замыкании которым анизотропийная норма была бы ограничена минимально возможным числом. На первом этапе решения задачи выписывается динамика управления и производится расширение рассматриваемого объекта. На основе критерия ограниченности анизотропийной нормы в терминах матричных неравенств выписываются достаточные условия существования решения выпуклой задачи оптимизации, в которой минимизируется верхняя граница анизотропийной нормы. В полученных неравенствах производится специальная замена переменных, чтобы избавиться от нелинейной зависимости по неизвестным матрицам регулятора. После линеаризующей обратимой замены переменных производится численное решение задачи оптимизации стандартными методами. На последнем этапе производится вычисление матриц регулятора в пространстве состояний, гарантирующего ограниченность анизотропийной нормы замкнутой этим регулятором системы.

Ключевые слова: стационарные дискретные системы, анизотропийная теория, динамический регулятор, линейные матричные неравенства, выпуклая оптимизация.

ВВЕДЕНИЕ

Активное развитие теории автоматического управления в XX в. обусловило разработку инструментария для решения задач подавления влияния внешних возмущений, которые стали одними из наиболее важных в этой теории. С тех пор, как был разработан подход для подавления гауссовских возмущений с линейно-квадратичным критерием качества [1], было предложено множество методов борьбы с внешними воздействиями. Неко-

торые из таких методов настроены на случай, когда стохастические характеристики входных сигналов известны. С другой стороны, подход на основе \mathcal{H}_∞ -оптимизации [2] предлагает способ парирования «наихудшего» варианта возмущения. Однако \mathcal{H}_∞ -управление отличается чрезмерным консерватизмом, а оптимальные \mathcal{H}_2 -регуляторы чувствительны к малым вариациям параметров, что делает их неробастными, вследствие чего оптимальность управления нарушается. Несмотря на принципиальные отличия \mathcal{H}_2 - и \mathcal{H}_∞ -теорий, были опубликованы некоторые исследования, объединяющие эти два метода [3–6].

[#] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 24-21-20055).



Одна из областей теории управления, исследующая способы подавления влияния внешних возмущений, была разработана И. Г. Владимировым около тридцати лет назад [7, 8], она объединяет как \mathcal{H}_2 -, так и \mathcal{H}_∞ -оптимальные теории в качестве предельных случаев. Эта теория, названная автором анизотропией теории управления, предлагает стохастический подход к \mathcal{H}_∞ -управлению и одновременно тесно связана своими терминами с теорией информации. Центральным понятием анизотропией теории является анизотропия случайного вектора, которая изначально соответствовала относительной энтропии нормированной функции распределения случайного вектора на единичной сфере относительно равномерного распределения. Таким образом, для равномерного распределения анизотропия равна нулю, и чем более плотным вдоль определенных осей становится распределение, тем выше уровень анизотропии, вплоть до бесконечности. Позже эта концепция была модифицирована [9]. В последнее время под анизотропией случайного вектора понимают отклонение Кульбака – Лейблера между двумя плотностями распределения, одна из которых принадлежит фиксированному случайному вектору, а вторая – гауссову семейству случайных векторов с нулевым средним значением и скалярной ковариационной матрицей. Основываясь на этом определении, можно дать простую геометрическую интерпретацию анизотропии: это мера отличия (расстояния) случайного вектора от набора центрированных гауссовых векторов со скалярной ковариационной матрицей. Функционал качества в анизотропией теории связан с анизотропией нормой – стохастическим аналогом \mathcal{H}_∞ -нормы динамической системы.

В рамках теории, основанной на анизотропии случайных векторов, были решены многие задачи анализа и синтеза как для нестационарных [9], так и для стационарных систем [10]. Однако до недавнего времени рассматривались только линейные и детерминированные объекты. Первая попытка изучения стохастических объектов с точки зрения анизотропией теории была предпринята в работе [11]. Этот анализ позволил заменить подход, предложенный в статьях [12, 13], который основывался на мажорантах норм для систем с мультипликативным шумом.

Системы с мультипликативным шумом являются важным примером стохастических систем. Они описывают механические, гибридные, биологические системы, финансовые модели и многие другие объекты и процессы [14, 15]. Основанный на анизотропии анализ робастного качества нестационарных систем был изучен в работе [16], а стационарные системы были рассмотрены в статье [17]. Задача построения оценки выхода для нестационарной системы уже успешно решена [18], а настройка матрицы смежности сети датчиков с отказами выполнена в работе [19]. С учетом результатов, полученных в рамках анизотропией анализа для стационарных систем [17], задача синтеза управления тоже может быть поставлена и решена. В данной статье рассматривается динамический регулятор и формулируется задача выпуклой оптимизации для вычисления матриц этого регулятора в пространстве состояний. Линеаризация матричных неравенств выполняется аналогично описанной в публикации [20] процедуре. Разработанный регулятор может быть применен для автоматического управления любыми подвижными объектами. В § 1 содержится краткое изложение анизотропией теории, § 2 включает описание системы и постановку задачи, в § 3 описывается решение рассматриваемой задачи, § 4 демонстрирует результаты численного моделирования.

1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В данном разделе будут упомянуты базовые понятия анизотропией теории относительно стационарных систем. Более подробную информацию можно найти в работах [10, 21–23].

Анизотропия случайного вектора W со значениями из пространства \mathbb{R}^m с функцией плотности распределения вероятностей f определяется как

$$A(W) = \min_{\lambda > 0} D(f // p_\lambda),$$

где

$$D(f // p_\lambda) = \mathbf{E} \left[\ln \frac{f}{p_\lambda} \right]$$

представляет собой относительную энтропию (или информационное уклонение Кульбака – Лейблера) по отношению к эталонной функции плотности распределения вероятностей

$$p_\lambda(x) = (2\pi\lambda)^{-m/2} \exp\left(-\frac{\|x\|^2}{2\lambda}\right),$$

которая выбрана в виде гауссовской с нулевым средним и скалярной ковариационной матрицей вида λI_m , где I_m – единичная матрица порядка m . Здесь и далее обозначение $\mathbf{E}[\cdot]$ соответствует оператору математического ожидания, $\|\cdot\|$ – евклидова норма вектора. Анизотропия случайного вектора не является нормой из-за нарушения аксиом нормы, при этом анизотропия является мерой близости случайного вектора к векторам, распределенным по стандартному нормальному закону.

Рассмотрим расширенный вектор из элементов последовательности случайных векторов $\{w_k\}$:

$$W_{s:t} = (w_s^T, w_{s+1}^T, \dots, w_t^T)^T, \quad s \leq t.$$

Для расширенного вектора $W_{s:t}$ вводится предел [10]

$$\bar{\mathbf{A}}(W) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{A}(W_{0:N-1})}{N},$$

который называется средней анизотропией последовательности $\{w_k\}$. В анизотропийной теории вводится собственный показатель качества – анизотропийная норма. Для начала рассмотрим среднеквадратичный коэффициент усиления

$$Q(Z, W) = \sqrt{\frac{\mathbf{E}(\|Z\|^2)}{\mathbf{E}(\|W\|^2)}},$$

где Z и W – выход и вход линейной системы с передаточной матрицей $F \in \mathbb{C}^{p \times m}$ соответственно. Выражение

$$\sup_{W \in \mathcal{L}_2^m} Q(Z, W) = \sqrt{\max_{1 \leq k \leq m} \lambda_k(F^T F)} = \|F\|_\infty$$

представляет собой определение \mathcal{H}_∞ -нормы, где \mathcal{L}_2^m соответствует суммируемым с квадратом сигналам, λ_k – k -е собственное число. Если входной сигнал для системы F имеет ограниченную числом a среднюю анизотропию, то анизотропийная норма может быть определена в виде

$$\sup_{\bar{\mathbf{A}}(W) \leq a} Q(Z, W) = \|F\|_a.$$

Если рассматривается несферичная система (т. е. система, масштабированная \mathcal{H}_2 -норма кото-

рой меньше \mathcal{H}_∞ -нормы), то анизотропийная норма имеет одно замечательное свойство: в качестве предельных случаев можно получить либо масштабированную \mathcal{H}_2 -, либо \mathcal{H}_∞ -норму:

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|F\|_2 \leq \|F\|_a \leq \|F\|_\infty.$$

При этом левая граница достигается при условии нулевого значения средней анизотропии, в то время как правая граница будет достигаться при стремлении средней анизотропии к бесконечности, что соответствует случаю, когда последовательность утрачивает свойство случайности.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В работе будет применен способ описания динамических объектов (как объекта управления, так и управляющего устройства) во временной области с помощью пространства состояний. Рассмотрим линейную дискретную стационарную систему с мультипликативными шумами

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B_1 w(k) + B_2 u(k), \\ z(k) &= C_1 x(k) + D_{12} u(k), \\ y(k) &= C_2 x(k) + D_{21} w(k) \end{aligned} \quad (1)$$

с нулевым начальным условием $x(0) = 0$. Здесь $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – состояние; $\{w(k)\}_{k \geq 0}$, $w(k) \in \mathbb{R}^{m_w}$ – окрашенная последовательность с известным ограничением a на уровень средней анизотропии; $u(k) \in \mathbb{R}^{m_u}$ – управляющее воздействие; $z(k) \in \mathbb{R}^{p_z}$ – управляемый выход; $y(k) \in \mathbb{R}^{p_y}$ – наблюдаемый выход; размерности матриц в системе (1) имеют согласующиеся с входными и выходными векторами размерности. Предполагается также, что система (1) является управляемой. В отличие от системы, рассмотренной в работе [13], где мультипликативные шумы входили в коэффициент при управлении, в текущей постановке матрица A системы представима в виде

$$A = A_0 + \sum_{i=1}^n \mu_i(k) A_i,$$

где матрицы A_i известны и имеют соответствующие размерности. Случайные величины $\mu_i(k)$, $i = 1, \dots, n$, имеют стандартное нормальное распределение с нулевым средним и единичной ковариацией, взаимно независимы



между собой и векторами внешнего возмущения $w(t)$ для всех моментов времени k, t .

Задача состоит в поиске матриц A_c, B_c, C_c и D_c реализации в пространстве состояний такого динамического регулятора полного порядка

$$\begin{aligned} \xi(k+1) &= A_c \xi(k) + B_c y(k), \\ u(k) &= C_c \xi(k) + D_c y(k), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\xi_i(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ – внутреннее состояние регулятора, при котором анизотропийная норма системы, замкнутой данным регулятором, была бы ограничена сверху числом $\gamma > 0$.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Перед тем как перейти к формулировке основного результата, рассмотрим линейную дискретную стационарную систему F с мультипликативными шумами следующего вида:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A_0 + \sum_{i=1}^n \mu_i(k) A_i) x(k) + Bw(k), \\ z(k) &= Cx(k) + Dw(k), \end{aligned} \quad (3)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^{n_x}$ обозначает состояние, $w(k) \in \mathbb{R}^{m_w}$ – возмущение, а $z(k) \in \mathbb{R}^{p_z}$ – выход системы. Действительные матрицы имеют соответствующие размерности. Предполагается, что входная последовательность является случайной с заданным ограничением a на среднюю анизотропию. В работе [17] было получено условие ограниченности для анизотропийной нормы в терминах решения специальной системы уравнений и неравенства. А анализ систем с мультипликативным шумом был сведен к задаче выпуклой оптимизации в статье [24].

Для системы (3) ограниченность анизотропийной нормы будет гарантирована, если будут выполнены условия следующего утверждения.

Теорема 1 [24]. Для заданного порогового значения γ и известного ограничения на уровень средней анизотропии $a \geq 0$ внешнего возмущения анизотропийная норма системы (3) имеет ограничение сверху на анизотропийную норму

$$\| \| F \| \|_a \leq \gamma,$$

если система неравенств

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n A_i^T R A_i - R + C^T C & * \\ B^T R A_0 + D^T C & -\eta I_{m_w} + D^T D + B^T R B \end{bmatrix} \prec 0, \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - S - D^T D & * \\ R B & R \end{bmatrix} \succ 0, \quad (5)$$

$$\ln \det S \geq 2a + m_w \ln(\eta - \gamma^2)$$

разрешима относительно симметричных положительно определенных матриц R, S и скалярного параметра $\eta > \gamma^2$.

В неравенствах (4), (5) и далее по тексту выражение $[\cdot] \prec 0$ следует понимать в смысле отрицательной определенности соответствующей матрицы, * обозначает симметричный относительно главной диагонали блок.

Сформируем замкнутую управление (2) систему (1):

$$\begin{aligned} \zeta(k+1) &= (A_0 + \sum_{i=0}^n \mu_i(k) A_i) \zeta(k) + Bw(k), \\ z(k) &= C\zeta(k) + Dw(k), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\zeta(k) \in \mathbb{R}^{2n_x}$ обозначает расширенное состояние

$$\zeta(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \xi(k) \end{bmatrix},$$

а матрицы $A_i \in \mathbb{R}^{2n_x \times 2n_x}$, $i = 0, \dots, n$, $B \in \mathbb{R}^{2n_x \times m_w}$, $C \in \mathbb{R}^{p_z \times 2n_x}$, $D \in \mathbb{R}^{p_z \times m_w}$ имеют следующую блочную структуру:

$$\begin{aligned} A_0 &= \begin{bmatrix} A_0 + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c \\ B_c C_2 & A_c \end{bmatrix}, \\ A_i &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_2 D_c D_{21} \\ B_c D_{21} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$C = [C_1 + D_{12} D_c C_2 \quad D_{12} C_c], \quad D = D_{12} D_c D_{21}.$$

Теперь для замкнутой системы (6) сформулируем утверждение об ограниченности анизотропийной нормы в виде выпуклой задачи на основе результатов, описанных в работах [20, 25].

Теорема 2. Пусть для системы с мультипликативными шумами (1) внешнее возмущение имеет среднюю анизотропию, ограниченную заданным числом $a \geq 0$. Тогда для фиксированного числа $\gamma > 0$ динамический регулятор вида (2) гарантирует ограниченность анизотропийной нормы $\| \| F \| \|_a < \gamma$, если система неравенств

$$\begin{bmatrix}
 -\Pi_{11} & * & * & * & * & * & * & \dots & * & * & * \\
 -I_{n_x} & -\Phi_{11} & * & * & * & * & * & \dots & * & * & * \\
 0 & 0 & -\eta I_{m_w} & * & * & * & * & \dots & * & * & * \\
 A_0 \Pi_{11} + B_2 C & A_0 + B_2 D C_2 & B_1 + B_2 D D_{21} & -\Pi_{11} & * & * & * & \dots & * & * & * \\
 \mathbf{A} & \Phi_{11} A_0 + B C_2 & \Phi_{11} B_1 + B D_{21} & -I_{n_x} & -\Phi_{11} & * & * & \dots & * & * & * \\
 A_1 \Pi_{11} & A_1 & 0 & 0 & 0 & -\Pi_{11} & * & \dots & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Pi_{12}^T & -\Pi_{22} & * & * & * & * \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 A_n \Pi_{11} & A_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\Pi_{11} & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\Pi_{12}^T & -\Pi_{22} & * \\
 C_1 \Pi_{11} + D_{12} C & C_1 + D_{12} D C_2 & D_{12} D D_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -I_{p_z}
 \end{bmatrix} \succ 0, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix}
 \Psi - \eta I_{m_w} & * & * & * \\
 B_1 + B_2 D D_{21} & -\Pi_{11} & * & * \\
 \Phi_{11} B_1 + B D_{21} & -I_{n_x} & -\Phi_{11} & * \\
 D_{12} D D_{21} & 0 & 0 & -I_{p_z}
 \end{bmatrix} \succ 0, \quad (9)$$

$$\eta > \gamma^2, \Pi_{11} \succ 0, \Phi_{11} \succ 0, \begin{bmatrix} \Pi_{11} & I_{n_x} \\ I_{n_x} & \Phi_{11} \end{bmatrix} \succ 0, \quad (10)$$

$$\ln \det \Psi \geq 2a + m_w \ln (\eta - \gamma^2), \quad (11)$$

разрешима относительно переменных $\eta > 0$, $\Psi = \Psi^T$, $\Phi_{11} = \Phi_{11}^T$, $\Pi_{11} = \Pi_{11}^T$, $\Pi_{22} = \Pi_{22}^T$, Π_{12} , \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} , причем матрицы регулятора связаны с решением неравенств (8)–(11) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 A_c &= \Phi_{12}^{-1} (\mathbf{A} + \Phi_{11} B_2 D C_2 \Pi_{11} - B C_2 \Pi_{11} - \\
 &\quad - \Phi_{11} B_2 C - \Phi_{11} A_0 \Pi_{11}) \Pi_{12}^{-T}, \\
 B_c &= \Phi_{12}^{-1} (\mathbf{B} - \Phi_{11} B_2 D_c), \\
 C_c &= (\mathbf{C} - D_c C_2 \Phi_{11}) \Pi_{12}^{-T}, \\
 D_c &= \mathbf{D}
 \end{aligned} \quad (12)$$

с учетом обозначения

$$\Phi_{12} = (I_{n_x} - \Phi_{11} \Pi_{11}) \Pi_{12}^{-T},$$

где матрицы Φ_{12} , Π_{12} являются обратимыми, а $\Pi_{12}^{-T} = (\Pi_{12}^T)^{-1}$.

Доказательство этого утверждения приведено в приложении.

Замечание 1. Важным является требование о совпадении размерностей векторов состояния объекта управления $x(k)$ и динамического регулятора $\xi(k)$. В этом случае матрицы

регулятора (2) могут быть найдены единственным образом. В работе [25] указано, что при полном столбцовом ранге матриц Φ_{12} и Π_{12} матрицы регулятора A_c , B_c , C_c , D_c существуют, но не единственны. ♦

На основе теоремы 2 легко сформулировать утверждение, ставшее уже классическим для задач анизотропной теории, решаемых в терминах выпуклой оптимизации.

Теорема 3. *Анизотропная норма системы (6) ограничена минимальным пороговым значением γ , если существует решение задачи выпуклой оптимизации*

$$\gamma^2 \xrightarrow{(8)-(11)} \min$$

относительно переменных γ^2 , η , $\Psi = \Psi^T \succ 0$, $\Phi_{11} = \Phi_{11}^T \succ 0$, $\Pi_{11} = \Pi_{11}^T \succ 0$, $\Pi_{22} = \Pi_{22}^T \succ 0$, Π_{12} , \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} . Матрицы динамического регулятора (2) при этом вычисляются согласно выражениям (12).

Замечание 2. Благодаря присутствию мультипликативных шумов в системе (1) выпуклая задача оптимизации содержит матрицу Π , что позволяет обойти условие проверки существования двух матриц, удовлетворяющих уравнению $\Phi_{12} \Pi_{12}^T = I_{n_x} - \Phi_{11} \Pi_{11}$, появляющееся в случае рассмотрения систем без мультипликативных шумов [23]. ♦

4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В этом разделе будет проанализирован численный эксперимент, проведенный на модели взлета – посадки летательного аппарата, рассмотренной в работе [26]. Управление осуществляется путем изменения угла наклона заднего сопла самолета, тяги через заднее сопло и



тяги через переднее сопло, положение которого постоянно; в качестве состояния выбраны угол тангажа и положение центра масс летательного аппарата, а также скорости их изменения. Линейная дискретная модель в пространстве состояний описывается с помощью матриц

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0,0004 & -0,0536 & -0,0976 \\ -0,0007 & 0,9966 & 0,4938 & -0,0100 \\ 0,0000 & 0,0001 & 0,9980 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0100 & 1,0000 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0,0003 & 0,0000 & -0,0001 \\ -0,0002 & 0,0005 & 0,0008 \\ -0,0006 & 0,0000 & 0,0034 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0001 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0,0021 & 0,0000 & -0,0003 \\ 0,0000 & 0,0020 & 0,0004 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0012 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [0,7071 \ 0 \ 0 \ 0], \quad D_{12} = [0 \ 0 \ 0,7071],$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 57,2958 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 57,2958 \\ 0,1045 & -0,9945 & 0,1375 & 51,5791 \\ -0,0002 & 0,0045 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0,0212 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

мультипликативный шум в виде одного слагаемого входит в уравнение динамики с матричным коэффициентом $A_1 = A_0 \cdot 10^{-2}$. Средний уровень анизотропии выбран равным 5. При расчете были получены следующие матрицы анизотропийного динамического регулятора:

$$A_c = \begin{bmatrix} 1,9773 & -2,3361 & -7,8981 & 49,2172 \\ -0,0232 & 1,7152 & -1,1628 & 4,7785 \\ -0,0368 & 0,6143 & -0,1482 & 0,1708 \\ -0,1262 & 0,4600 & 0,2936 & -2,2690 \end{bmatrix},$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0,0078 & 0,5486 & -1,0382 & -0,0013 \\ 0,0024 & -0,8364 & 0,08879 & 0,0003 \\ 0,0115 & -0,2878 & 0,3202 & -0,0187 \\ 0,0017 & -0,1795 & 0,2283 & -0,0028 \end{bmatrix},$$

$$C_c \cdot 10^{-4} = \begin{bmatrix} -0,0640 & -1,9133 & 1,2458 & -5,1640 \\ -0,0311 & -0,0188 & 0,1100 & -0,6393 \\ 0,0000 & -0,0068 & 0,0039 & -0,0149 \end{bmatrix},$$

$$D_c \cdot 10^{-3} = \begin{bmatrix} -0,0250 & 9,3135 & -9,8997 & -0,0111 \\ -0,0067 & -0,2866 & 0,3740 & 0,0037 \\ -0,0001 & 0,0329 & -0,0353 & 0,000 \end{bmatrix}.$$

Решение задачи выпуклой оптимизации производилось с помощью стандартных средств MATLAB с дополнительными пакетами численного решения задач полуопределенного программирования [27, 28].

На рис. 1 приведены ЛАФЧХ для двух уровней анизотропии, равных 1 и 5, соответственно. Стоит отметить, что при любых значениях средней анизотропии, превосходящих 10, моделирование дает примерно одни и те же результаты, характерные для \mathcal{H}_∞ -управления.

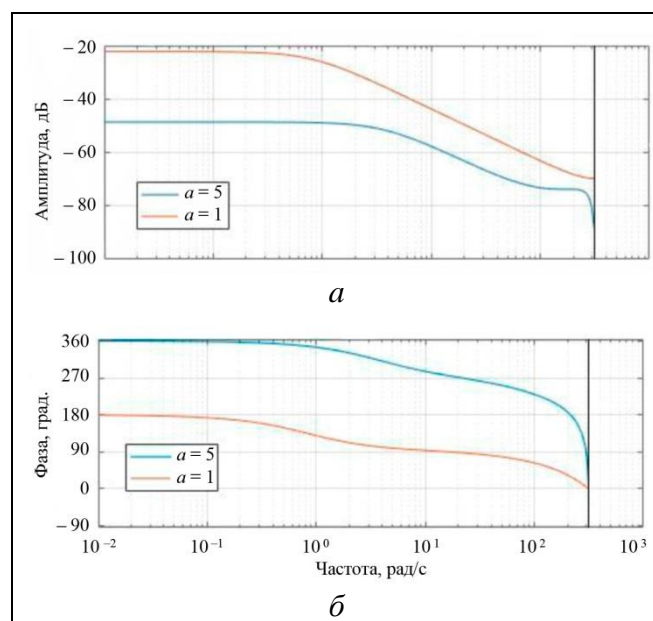


Рис. 1. ЛАФЧХ замкнутых управлением систем

В таблице приводятся результаты по вычислению верхней границы анизотропийной нормы замкнутой системы при различных значениях уровня средней анизотропии.

Границы анизотропийной нормы

a	0	1	5	10	15
γ	0,0012	0,2197	0,3087	0,3142	0,3142

Также интерес представляет сравнение управляемых выходов при использовании

анизотропийного управления и стандартного \mathcal{H}_2 -управления. Зафиксируем среднюю анизотропию, равную 5. Вычислим евклидову норму для управляемого выхода, графики которого приведены на рис. 2, где применение анизотропийного управления обозначено через сокращение АВ. Оказывается, что для анизотропийного управления такая норма равна 0,0158, в то время как для \mathcal{H}_2 -подхода – 0,0856. То есть при использовании анизотропийного управления можно улучшить квадратичный критерий качества на 72 %.

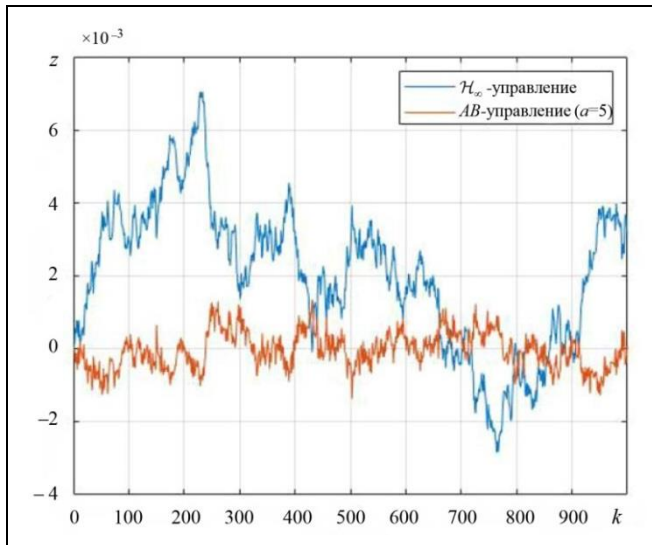


Рис. 2. Управляемые выходы системы при различных типах управления

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе был рассмотрен алгоритм вычисления матриц динамического регулятора в пространстве состояний на основе анизотропийного подхода. В качестве основного инструмента использовалась лемма о вещественной ограниченности для стационарных систем. Предполагалось, что динамический регулятор имеет полную размерность, что гарантирует единственность такого регулятора. Для замкнутой системы были получены достаточные условия существования анизотропийного динамического регулятора в терминах решения специальной системы нелинейных матричных неравенств. Была использована линеаризующая обратимая замена переменных, позволившая свести условия ограниченности анизотропийной нормы замкнутой системы к условию разрешимости специальной системы неравенств. В процессе решения выпуклой задачи оптимизации получено поро-

говое ограничение на границу сверху анизотропийной нормы замкнутой системы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 2. Согласно теореме 1, замкнутая управлением на основе динамического регулятора (2) система (6) будет иметь ограниченную анизотропийную норму, если неравенства

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^n A_i^T \Phi A_i - \Phi + C^T C & * \\ B^T \Phi A_0 + D^T C & -\eta I_{m_w} + D^T D + B^T \Phi B \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{П1})$$

$$\begin{bmatrix} \eta I_{m_w} - \Psi - D^T D & * \\ \Phi B & \Phi \end{bmatrix} \succ 0, \quad (\text{П2})$$

$$\ln \det \Psi \geq 2a + m_w \ln(\eta - \gamma^2) \quad (\text{П3})$$

имеют решения, при этом $\eta > 0$, $\Psi = \Psi^T$, $\Phi = \Phi^T$. Система неравенств (П1)–(П3) является нелинейной относительно матриц системы, зависящих от матриц регулятора (7). Для того, чтобы исправить это, применим лемму Шура [29] к неравенству (П1):

$$\begin{bmatrix} -\Phi & * & * & * & \dots & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * & \dots & * & * \\ A_0 & B & -\Phi^{-1} & * & \dots & * & * \\ A_1 & 0 & 0 & -\Phi^{-1} & \dots & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n & 0 & 0 & 0 & \dots & -\Phi^{-1} & * \\ C & D & 0 & 0 & \dots & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} < 0. \quad (\text{П4})$$

Обозначим Φ^{-1} в качестве новой матричной переменной Π . Очевидно, что $\Phi \Pi = I_{2n_x}$, а сами матрицы Φ и Π имеют блочную структуру:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^T & \Phi_{22} \end{bmatrix}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} \\ \Pi_{12}^T & \Pi_{22} \end{bmatrix}.$$

Введем в рассмотрение матрицы

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} I_{n_x} & \Phi_{11} \\ 0 & \Phi_{12}^T \end{bmatrix}, \quad \Pi_1 = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & I_{n_x} \\ \Pi_{12}^T & 0 \end{bmatrix}.$$

Легко показать, что имеют место следующие равенства:

$$\Pi_1^T \Phi \Pi_1 = \Phi_1^T \Pi_1 = \Phi_1^T \Pi \Phi_1 = \Pi_1^T \Phi_1 = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & I_{n_x} \\ I_{n_x} & \Phi_{11} \end{bmatrix}. \quad (\text{П5})$$

Теперь применим конгруэнтное преобразование с матрицей

$$\text{block diag} (\Pi_1^T, I_{m_w}, \Phi_1^T, I_{n_x}, \dots, I_{n_x}, I_{p_z})$$



к неравенству (П4). Получим новое неравенство:

$$\begin{bmatrix} -\Pi_1^T \Phi \Pi_1 & * & * & * & \dots & * & * \\ 0 & -\eta I_{m_w} & * & * & \dots & * & * \\ \Phi_1^T A_0 \Pi_1 & \Phi_1^T B & -\Phi_1^T \Pi \Phi_1 & * & \dots & * & * \\ A_1 \Pi_1 & 0 & 0 & -\Pi & \dots & * & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n \Pi_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\Pi & * \\ C \Pi_1 & D & 0 & 0 & \dots & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} < 0. \quad (\text{П6})$$

Можно заметить, что неравенство (П6) все еще является нелинейным по некоторым матричным переменным. Блоки $-\Pi_1^T \Phi \Pi_1$ и $-\Phi_1^T \Pi \Phi_1$ можно переписать согласно обозначению (П5). Рассмотрим третий блок в первом столбце, он также имеет блочную структуру:

$$\Phi_1^T A_0 \Pi_1 = \begin{bmatrix} A_0 \Pi_{11} + B_2 C & A + B_2 D C_2 \\ \mathbf{A} & \Phi_{11} A_0 + \mathbf{B} C_2 \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \Phi_{12} A_c \Pi_{12}^T + \Phi_{12} B_c C_2 \Pi_{11} + \\ &+ \Phi_{11} B_2 C_c \Pi_{12}^T + \Phi_{11} (A_0 + B_2 D_c C_2) \Pi_{11}, \\ \mathbf{B} &= \Phi_{12} B_c + \Phi_{11} B_2 D_c, \\ \mathbf{C} &= C_c \Pi_{12}^T + D_c C_2 \Phi_{11}, \\ \mathbf{D} &= D_c \end{aligned}$$

представляет собой линеаризующую замену переменных, аналогичную предложенной в работах [20, 30]. Блоки $\Phi_1^T B$ и $C \Pi_1$ можно представить в виде

$$\Phi_1^T B = \begin{bmatrix} B_1 + B_2 D D_{21} \\ \Phi_{11} B_1 + \mathbf{B} D_{21} \end{bmatrix},$$

$$C \Pi_1 = [C_1 \Pi_{11} + D_{12} \mathbf{D} \quad D_{12} D D_{21}].$$

Таким образом, получено неравенство (8). Далее можно применить лемму Шура к неравенству (П2), после чего оно преобразуется к виду

$$\begin{bmatrix} \Psi - \eta I_{m_w} & * & * \\ \Phi B & -\Phi & * \\ D & 0 & -I_{p_z} \end{bmatrix} < 0.$$

Теперь произведем конгруэнтное преобразование последнего неравенства с помощью матрицы

$$\text{block diag}(I_{m_w}, \Pi_1^T, I_{p_z}).$$

Можно убедиться, что после указанного преобразования получено неравенство вида (9). При этом неравенство специального вида (11) меняться не будет. Обратная замена переменных (12) будет однозначно определена при условии невырожденности матриц Φ_{12} , Π_{12} .

ЛИТЕРАТУРА

1. Astrom, K.J. Introduction to Stochastic Control Theory. – Academic Press, 1970. – 322 p.
2. Zames, G. Feedback and Optimal Sensitivity: Model Reference Transformations, Multiplicative Seminorms, and Approximate Inverses // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1981. – Vol. 26, no. 2. – P. 301–320.
3. Haddad, W.M., Bernstein, D.S., Mustafa, D. Mixed-Norm H2/H ∞ Regulation and Estimation: The Discrete-Time Case // Systems & Control Letters. – 1991. – Vol. 16, no. 4. – P. 235–247.
4. Zhou, K., Glover, K., Bodenheimer, B., Doyle, J. Mixed H2 and H ∞ Performance Objectives I: Robust Performance Analysis // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1994. – Vol. 38. – P. 1564–1574.
5. Khargonekar, P.P., Rotea, M.A., Baeyens, E. Mixed H2/H ∞ Filtering // International Journal of Robust and Nonlinear Control. – 1996. – Vol. 6. – P. 313–330.
6. Scherer, C.W. Mixed H2/H ∞ Control. – Springer-Verlag, 1995. – 216 p.
7. Semyonov, A.V., Vladimirov, I.G., Kurdyukov, A.P. Stochastic Approach to H ∞ -optimization // Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control. – 1994. – P. 2249–2250.
8. Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В. Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем // Доклады РАН. – 1995. – Т. 342, № 5. – С. 583–585. [Vladimirov, I.G., Kurdyukov, A.P., Semyonov, A.V. Anisotropy Signals and the Entropy of Linear Stationary Systems // Doklady Mathematics. – 1995. – Vol. 51, no. 3. – P. 388–390.]
9. Владимиров И.Г., Даймонд Ф., Клоеден П.Е. Анизотропийный анализ робастного качества линейных нестационарных дискретных систем на конечном временном интервале // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 8. – С. 92–111. [Vladimirov, I.G., Diamond, P., Kloeden, P. Anisotropy-based Robust Performance Analysis of Finite Horizon Linear Discrete Time Varying Systems // Automation and Remote Control. – 2006. – Vol. 67, no. 7. – P. 1265–1282.]
10. Vladimirov, I.G., Kurdyukov, A.P., Semyonov, A.V. On Computing the Anisotropic Norm of Linear Discrete-time-invariant Systems // Proceedings of 13th IFAC World Congr. – San Francisco, 1996. – P. 179–184.
11. Kustov, A.Yu. State-Space Formulas for Anisotropic Norm of Linear Discrete Time Varying Stochastic System // Proceedings of 15th Int. Conf. on Electr. Eng., Comp. Science and Autom. Control. – Porto, 2018. – P. 1–6.
12. Юрченков А.В., Кустов А.Ю., Курдюков А.П. Условия ограниченности анизотропийной нормы системы с мультипликативными шумами // Доклады Академии наук. – 2016. – Т. 467, № 4. – С. 396–399. [Yurchenkov, A.V., Kustov, A.Yu., Kurdyukov, A.P. Anisotropy-based Bounded Real Lemma for Discrete-Time Systems with Multiplicative Noise // Doklady Mathematics. – Vol. 93, no. 2. – P. 238–240.]
13. Юрченков А.В. Синтез анизотропийного управления для линейной дискретной системы с мультипликативными шумами // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2018. – № 6. – С. 33–44. [Yurchenkov, A.V. Anisotropy-Based Controller Design for Linear Discrete-Time Systems with Multiplicative Noise // Journal of Computer and Systems Sciences Int. – 2018. – Vol. 57, no. 6. – P. 864–873.]

14. *Won, M. and Ranade, G.* Control of systems with multiplicative observation noise // Proceedings of the 62nd IEEE Conference on Decision and Control. – Singapore, 2023. – P. 3950–3955.
15. *Lu, C., Lu, X., Wang, H., et al.* Control for Multiplicative Noise Systems with Packet Dropouts and Multiple Delays // Proceedings of the 40th Chinese Control Conference. – Shanghai, 2021. – P. 1544–1549.
16. *Belov, I.R., Yurchenkov, A.V., Kustov, A.Yu.* Anisotropy-Based Bounded Real Lemma for Multiplicative Noise Systems: The Finite Horizon Case // Proceedings of the 27th Med. Conf. on Control and Automation. – Akko, 2019. – P. 148–152.
17. *Kustov, A.Yu., Timin, V.N., Yurchenkov, A.V.* Boundedness Condition for Anisotropic Norm of Linear Discrete Time-invariant Systems with Multiplicative Noise // Journal of Physics: Conference Series. – 2021. – Vol. 1864. – Art. no. 012068.
18. *Yurchenkov, A.V., Kustov, A.Yu., Timin, V.N.* The Sensor Network Estimation with Dropouts: Anisotropy-Based Approach // Automatica. – 2023. – Vol. 151. – Art. no. 110924.
19. *Юрченков А.В.* Настройка сети датчиков с отказами на основе анизотропного критерия // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки. – 2023. – № 1. – С. 45–63. [*Yurchenkov, A.V.* Default Sensor Network Setup based on the Anisotropic Criterion // Herald of the Bauman Moscow State Technical University, Series Natural Sciences. – 2023. – Vol. 106, no. 1. – P. 45–63. (In Russian)]
20. *Gahinet, P.* Explicit controller formulas for LMI-based H_∞ synthesis // Automatica. – 1996. – Vol. 32. – P. 1007–1014.
21. *Diamond, P., Vladimirov, I.G., Kurdyukov, A.P., Semyonov, A.V.* Anisotropy-Based Performance Analysis of Linear Discrete Time Invariant Control Systems // International Journal of Control. – 2001. – Vol. 74, no. 1. – P. 28–42.
22. *Diamond, P., Kloeden, P., Vladimirov, I.G.* Mean Anisotropy of Homogeneous Gaussian Random Fields and Anisotropic Norms of Linear Translation-Invariant Operators on Multidimensional Integer Lattices // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. – 2003. – Vol. 16, no.3. – P. 209–231.
23. *Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В.* Стохастическая проблема H_∞ -оптимизации. // Доклады РАН. – 1995. – Т. 343, № 5. – С. 607–609. [*Vladimirov, I.G., Kurdyukov, A.P., Semyonov, A.V.* The Stochastic Problem of H_∞ -Optimization // Doklady Mathematics. – 1995. – Vol. 52. – P. 155–157.]
24. *Юрченков А.В.* Условие ограниченности анизотропной нормы для стационарных систем с мультипликативными шумами // Проблемы управления. – 2022. – № 5. – С. 16–24. [*Yurchenkov, A.V.* An Anisotropy-Based Boundedness Criterion for Time-Invariant Systems with Multiplicative Noises // Control Sciences. – 2022. – No. 5. – P. 13–20.]
25. *Scherer, C.W., Gahinet, P., Chilali, M.* Multiobjective Output-Feedback Control via LMI Optimization // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1997. – Vol. 42. – P. 896–911.
26. *Toffner-Clausen, S.* System Identification and Robust Control: A Case Study Approach. – Berlin: Springer-Verlag, 1996. – 311 p.
27. *Lofberg, J.* YALMIP: A Toolbox for Modeling and Optimization in MATLAB // Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics and Automation. – New Orleans, 2004. – P. 284–289.
28. *Sturm, J.F.* Using SeDuMi 1.02, a MATLAB Toolbox for Optimization over Symmetric Cones // Optimization Methods and Software. – 1999. – Vol. 11. – P. 625–653.
29. *Boyd, S., Vandenberghe, L.* Convex Optimization. – Cambridge: Cambridge University Press, 2004. – 730 p.
30. *Чайковский М.М.* Синтез анизотропных регуляторов методами выпуклой оптимизации и полуопределенного программирования // Управление большими системами. – 2013. – Вып. 42. – С. 100–152. [*Tchaikovsky, M.M.* Synthesis of Anisotropic Controllers via Convex Optimization and Semidefinite Programming // Large-Scale Systems Control. – 2013. – Iss. 42. – P. 100–152. (In Russian)]

Статья представлена к публикации членом редколлегии
М.В. Хлебниковым.

Поступила в редакцию 03.11.2024,
после доработки 31.01.2025.
Принята к публикации 06.02.2025.

Юрченков Александр Викторович – канд. физ.-мат. наук,
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН,
Москва,
✉ alexander.yurchenkov@yandex.ru,
ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-2088-5577>

© 2025 г. Юрченков А. В.



Эта статья доступна по [лицензии Creative Commons «Attribution» \(«Атрибуция»\) 4.0 Всемирная](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/).



DYNAMIC ANISOTROPY-BASED CONTROLLER DESIGN FOR TIME-INVARIANT SYSTEMS WITH MULTIPLICATIVE NOISE

A. V. Yurchenkov

Trapeznikov Institute of Control Sciences, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

✉ alexander.yurchenkov@yandex.ru

Abstract. This paper considers a linear discrete time-invariant system with multiplicative noise and a control input under an external disturbance from a special class. The plant's dynamics are described in the state space. The class of external disturbances contains a set of stationary Gaussian sequences with a bounded mean anisotropy. The anisotropic norm of the closed-loop control system is chosen as the performance criterion. It is required to design a dynamic link-based control scheme under which the anisotropic norm of the closed-loop control system will be bounded by the minimum possible threshold. At the first stage of solving this problem, the controller's dynamics are written out and the plant under consideration is augmented. The boundedness criterion of the anisotropic norm in terms of matrix inequalities is used to derive sufficient conditions for the existence of a solution of a convex optimization problem to minimize the upper bound of the anisotropic norm. A special change of variables is performed in the resulting inequalities to eliminate the nonlinear dependence on the unknown controller matrices. After a linearizing invertible change of variables, the optimization problem is solved numerically using standard methods. At the last stage, the desired controller matrices are calculated in the state space to ensure the bounded anisotropic norm of the closed-loop control system.

Keywords: linear discrete time-invariant systems, anisotropy-based theory, dynamic control, LMI, convex optimization.

Acknowledgments. This work was supported by the Russian Science Foundation, project no. 24-21-20055.