УДК 519.3:62-50

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО И ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЙ И ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ФУНКЦИОНАЛА КАЧЕСТВА ПРИ ИЗВЕСТНЫХ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Т.К. Юлдашев

Изучены вопросы однозначной разрешимости и приближенного решения системы нелинейного параболического и обыкновенного дифференциального уравнений при начальных и граничных условиях. Доказана сходимость функционала качества. Приведены формулы приближенного расчета функционала качества при известных управляющих воздействиях.

Ключевые слова: параболическое уравнение, начальные и граничные условия, оптимальное управление, обобщенная разрешимость, приближенное решение, минимизация функционала.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие теории оптимального управления связано с ростом требований к быстродействию и точности систем регулирования. На основе математической теории оптимального управления разработаны способы построения оптимальных по быстродействию систем и процедуры аналитического конструирования оптимальных регуляторов. Современные методы решения задач управления в значительной степени основаны на концепции оптимальности, что определяет широкое применение методов и алгоритмов теории оптимизации при проектировании и совершенствовании систем управления. Многие задачи управления формулируются как конечномерные оптимизационные задачи. К таким задачам, в частности, относятся и задачи адаптивных систем управления [1—5].

Сложность задач теории оптимального управления потребовала более широкой математической базы для ее построения. Теория оптимального управления для систем с распределенными параметрами, описываемых уравнениями с частными производными, стала разрабатываться сравнительно недавно. За короткое время она получила бурное развитие, все шире проникая в различные области техники и технологических процессов. К системам с распределенными параметрами относятся задачи аэрогазодинамики, химических реакций, диффузии, фильтрации, процессов горения, нагрева и др. [6—11].

Разработка математических методов и создание на их основе пакетов прикладных программ и программных комплексов, ориентированных на автоматизацию проектно-конструкторских и научно-исследовательских работ с применением современных компьютеров, являются важными задачами. Их успешному решению в значительной мере способствует разработка эффективных численных методов и программных средств для решения задач динамики и управления. При приближенном решении задач оптимального управления системами с распределенными параметрами применяется широкий спектр разных методов [12—14].

Во многих системах нелинейного оптимального управления процессом теплопередачи часто приходится учитывать вспомогательные элементы, без которых невозможно управлять процессом. Эти элементы обычно описываются сосредоточенными параметрами. Поведение таких систем в общем случае описывается совокупностью нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и параболических уравнений при начальных и граничных условиях.

В данной работе рассматриваются вопросы приближенного решения задачи оптимального управления для системы нелинейного параболического и обыкновенного дифференциального уравнений.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим нелинейную задачу управления процессом распространения тепла по стержню конечной длины

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = P(t, x) + f(t, x, u(t, x), \tau(t)) \quad (1)$$

при смешанных условиях

$$u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad (2)$$

$$u(t, x)|_{x=0} = u(t, x)|_{x=l} = 0, \quad (3)$$

где f — функция внешнего источника, $f(t, x, u, \tau) \in C(D \times R \times D_T)$, $u(t, x)$ — функция состояния управляемого процесса, $\varphi(x)$ — функция распределения тепла по стрежню в начальный момент времени, $\varphi(x)|_{x=0} = \varphi(x)|_{x=l} = 0$, $\varphi(x) \in C^3(D_l)$, $D \equiv D_T \times D_l$, $D_T = [0, T]$, $D_l = [0, l]$, $0 < l < \infty$, $0 < T < \infty$, $P(t, x)$ — управляющая функция, а функция $\tau(t)$ определяется как решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\tau'(t) = h(t, \tau(t), \theta(t)) \quad (4)$$

при начальном условии

$$\tau(0) = \tau_0 = \text{const}, \quad (5)$$

$\theta(t) \in C(D_T)$ — вторая управляющая функция.

В настоящей работе при фиксированном управлении $P(t, x)$ применяется метод разделения переменных, основанный на поиске решения смешанной задачи (1)—(3) в виде ряда Фурье

$$u(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) b_i(x),$$

где $b_i(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_i x$, $\lambda_i = \frac{i\pi}{l}$, $i = 1, 2, ...$

Рассмотрим пространства С.Л. Соболева $W_2^1(D)$, $\overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$ (см., например, работы [15—17]). Следуя О.А. Ладыженской, рассмотрим обобщенное решение задачи (1)—(3) из класса $W_2^1(D)$ (см. например, работу [15]).

Определение. Если функция $u(t, x) \in W_2^1(D)$ удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_0^l\left\{u(t, y)\left[\frac{\partial\Phi(t,y)}{\partial t} - \frac{\partial^2\Phi(t,y)}{\partial y^2}\right] - [P(t, y) + f(t, y, u(t, y), \tau(t))]\Phi(t, y)\right\}dydt = \int_0^l \varphi[\Phi(t, y)]_{t=0}dy$$

для любого $\Phi(t, x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, то она называется обобщенным решением смешанной задачи (1)—(3). ♦

Задача. Найти состояния: $u^*(t, x)$ — обобщенное решение смешанной задачи (1)—(3) и $\tau^*(t)$ — решение начальной задачи (4), (5) при заданных управляющих функциях $P^*(t, x) \in \{P^*: |P^*(t, x)| \le \Omega_1^*$, $(t, x) \in D\}$, $\theta^*(t) \in \{\theta^*: |\theta^*(t)| \le \Omega_2^*$, $t \in D_T\}$, что доставляют минимум функционалу

$$J[P, \theta] = \int_0^T g(t, x, u(t, x), \tau(t), P(t, x), \theta(t))dt,$$

где $0 < \Omega_i^* = \text{const}$, $i = 1, 2$.

2. УКОРОЧЕННОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ (1)—(3)

Во множестве

$$\{a(t) = (a_i(t)) | a_i(t) \in C(D_T),\ i = 1, 2, 3, ...\}$$

с помощью нормы

$$\|a(t)\|_{B_2(T)} = \left[\sum_{i=1}^{\infty}\max_{t \in D_T}|a_i(t)|^2\right]^{1/2}$$

вводится банахово пространство $B_2(T)$. Наряду с ним рассматривается и конечномерное банахово пространство $B_2^N(T)$ с нормой

$$\|a^N(t)\|_{B_2^N(T)} = \left[\sum_{i=1}^{N}\max_{t \in D_T}|a_i^N(t)|^2\right]^{1/2}.$$

Для произвольной функции $\zeta(x)$, $x \in D_l$, в пространстве $L_2(D_l)$ вводится норма

$$\|\zeta(x)\|_{L_2(D_l)} = \left\{\int_0^l |\zeta(y)|^2 dy\right\}^{1/2} < \infty.$$

Для числовой последовательности φ_i в пространстве l_2 используется норма

$$\|\varphi\|_{l_2} = \left\{\sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i|^2\right\}^{1/2} < \infty.$$

Также рассмотрим и норму

$$\|\varphi^N\|_{l_2^N} = \left\{\sum_{i=1}^{N} |\varphi_i^N|^2\right\}^{1/2} < \infty.$$

Предполагается также, что $P(t, x)$ допускает разложение в ряд Фурье по собственным функциям $b_i(x)$: $P(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i(t) b_i(x)$, где $p_i(t) = \int_0^l P(t, y) b_i(y) dy$. Функцию $g(t, y, u(t, y), \tau(t), P(t, y), \theta(t))$ разложим в ряд Фурье:

$$J[p_i, \theta] = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^T \int_0^l g\left(t, y, \sum_{j=1}^{\infty} a_j(t) b_j(y), \tau(t), \sum_{j=1}^{\infty} p_j(t) b_j(y), (t)\right) b_i(y) dy dt \cdot b_i(x). \quad (6)$$

Из работы [18] в частном случае следует, что обобщенное решение смешанной задачи (1)—(3) представимо в виде

$$u(t, x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\{\omega_i(t) + \int_0^t \int_0^l G_i(t, s)\left[p_i(s) + f\left(s, y, \sum_{j=1}^{\infty} a_j(s) b_j(y), \tau(s)\right) b_i(y) dy\right] ds\right\} b_i(x), \quad (7)$$

где $a_i(t)$ определяется как решение счетной системы нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ):

$$a_i(t) = \omega_i(t) + \int_0^t \int_0^l G_i(t, s) \times \left[p_i(s) + f\left(s, y, \sum_{j=1}^{\infty} a_j(s) b_j(y), \tau(s)\right) b_i(y) dy\right] ds, \quad (8)$$

$$\omega_i(t) = \varphi_i \exp\{-\lambda_i^2 t\}, \; G_i(t, s) = \exp\{-\lambda_i^2 (t - s)\},$$

$$\varphi_i = \int_0^l \varphi(y) b_i(y) dy.$$

Будем пользоваться обозначениями: $Bnd(M)$ — класс непрерывных функций, ограниченных по норме с положительным числом M; $Lip\{L_{|u, v, \ldots}\}$ — класс непрерывных функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменным u, v, ... и с положительным коэффициентом L. Для функций одной переменной индекс опускается.

Из работы [19] в частном случае следует, что задача Коши (4), (5) при фиксированных значениях управления $\theta(t)$ имеет единственное решение на отрезке D_T, если выполняются условия:

$$h(t, \tau(t), \theta(t)) \in \in C(D_T \times X_1 \times X_2) \cap Bnd(M_0) \cap Lip\{H_0(t)|_\tau\},$$

где $0 < \int_0^T |H_0(t)| dt < \infty$; X_1, X_2 — отрезки прямой, $0 < M_0 = \text{const}$. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений

$$\tau^0(t) = \tau_0, \; \tau^{(k+1)}(t) = \tau_0 + \int_0^t h(s, \tau^k(s), \theta(s)) ds, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad (9)$$

Вместо уравнений (7) и (8) рассмотрим укороченную систему интегральных уравнений

$$u^N(t, x) = \sum_{i=1}^{N} \left\{\omega_i^N(t) + \int_0^t \left[p_i^N(s) + \int_0^l f\left(s, y, \sum_{j=1}^{N} a_j^N(s) b_j^N(y), \tau(s)\right) b_i^N(y) dy\right] \times G_i^N(t, s) ds\right\} b_i^N(x), \quad (10)$$

где $a_i^N(t)$ определяется как решение конечной системы нелинейных интегральных уравнений (КСНИУ):

$$a_i^N(t) = \omega_i^N(t) + \int_0^t \left[p_i^N(s) + \int_0^l f\left(s, y, \sum_{j=1}^{N} a_j^N(s) b_j^N(y), \tau(s)\right) b_i^N(y) dy\right] \times G_i^N(t, s) ds, \quad (11)$$

где $\omega_i^N(t) = \varphi_i^N \exp\{-\lambda_i^{2N} t\}$, $G_i^N(t, s) = \exp\{-\lambda_i^{2N}(t - s)\}$

А начальные данные φ_i^N подбираются из условия (2) так, что при $N \to \infty$ сумма $\varphi^N(x) = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i^N b_i^N(x)$

аппроксимирует функцию $\varphi(x) \in L_2(D_l)$, а сумма $P^N(t, x) = \sum_{i=1}^{N} p_i^N(t) b_i^N(x)$ — функцию $P(t, x)$.

Аналогично вместо выражения (6) рассмотрим укороченный функционал

$$J[p_i^N, \theta] = \sum_{i=1}^{N} \int_0^T \int_0^l g\left(t, y, \sum_{j=1}^{N} a_j^N(t) b_j^N(y), \tau(t), \sum_{j=1}^{N} p_j^N(t) b_j^N(y), \theta(t) b_i^N(y)\right) dydt \cdot b_i^N(x). \quad (12)$$

3. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ КСНИУ (11)

Теорема 1. *Пусть выполняются условия:*

1) $\Delta = \int_0^T \|f(t, x, u^N, \tau)\|_{L_2(D_l)} dt < \infty$, $0 < \Delta = \text{const}$;

2) $f(t, x, u^N, \tau) \in Lip\{H(t, x)|_{u^N}\}$, где $0 < \int_0^t \|H(s, x)\|_{L_2(D_l)} ds < \infty$;

3) $\|\varphi^N\|_{l_2^N} < \infty$.

Тогда при фиксированных значениях управления $p_i^N(t)$ *и функции* $\tau(t)$ *КСНИУ* (11) *имеет единственное решение на отрезке* D_T.

Доказательство. Рассмотрим итерационный процесс:

$$\begin{cases} a_i^{N0}(t) = \omega_i^N(t) + \int_0^t p_i^N(s) G_i(t, s) ds, \\ a_i^{N_{k+1}}(t) = a_i^{N0}(t) + \int_0^t \int_0^l f\left(s, y, \sum_{j=1}^{N} a_j^{N_k}(s) b_j^N(y), \tau(s)\right) \times \\ \times b_i^N(y) G_i^N(t, s) dyds, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, \quad t \in D_T, \end{cases} \quad (13)$$

где $\omega_i^N(t) = \varphi_i^N \exp\{-\lambda_i^{2N} t\}$, $G_i^N(t, s) = \exp\{-\lambda_i^{2N}(t - s)\}$, $a_i^{N_k}(t)$ является k-м приближением КСНИУ (11).

В силу условий теоремы, из формул (13) по индукции получаем оценки

$$\|a^{N1}(t) - a^{N0}(t)\|_{B_2^N(T)} \le$$
$$\le \int_0^t \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left| \int_0^l f\left(s, y, \sum_{j=1}^{N} a_j^{N0}(s) b_j^N(y)\right) b_i^N(y) dy \right|^2 \right\}^{1/2} \times$$
$$\times \left\{ \sum_{i=1}^{N} \left| G_i^N(t, s) \right|^2 \right\}^{1/2} ds \le M_1 M_2 \sqrt{l}\, \Delta, \quad (14)$$

$$\|a^{Nk+1}(t) - a^{Nk}(t)\|_{B_2^N(T)} \le$$
$$\le M_1^{k+1} M_2^{2k+1} l^{\frac{k+1}{2}} \Delta \left[\left| \int_0^t \|H(s, x)\|_{L_2(D_l)} ds \right| \right]^k \frac{1}{k!}, \quad (15)$$

где $M_1 = \|G^N(t, s)\|_{B_2^N(T)}$, $M_2 = \|b^N(x)\|_{B_2^N(l)}$, $M_1^{k+1} M_2^{2k+1} = = (M_1)^{k+1}(M_2)^{2k+1}$.

Существование решения КСНИУ (11) следует из справедливости оценок (14) и (15), так как при $k \to \infty$ последовательность функций $\{a^{N_k}(t)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно по t к функции $a^N(t) \in B_2^N(T)$. Для доказательства единственности решения в пространстве $B_2^N(T)$ предположим, что КСНИУ (11) имеет два решения: $a^N(t) \in B_2^N(T)$ и $\vartheta^N(t) \in B_2^N(T)$. Тогда для их разности справедлива оценка

$$\|a^N(t) - \vartheta^N(t)\|_{B_2^N(T)} \le$$
$$\le M_1 M_2^2 l^{\frac{1}{2}} \int_0^t \|H(s, x)\|_{L_2(D_l)} \|a^N(s) - \vartheta^N(s)\|_{B_2^N(t)} ds. \quad (16)$$

Применение к оценке (16) неравенства Гроноулла — Беллмана дает $\|a^N(t) - \vartheta^N(t)\|_{B_2^N(T)} \equiv 0$ для всех $t \in D_T$. Отсюда следует единственность решения КСНИУ (11) в пространстве $B_2^N(T)$. Теорема доказана. ♦

Подставляя КСНИУ (11) в формулу $u^N(t, x) = = \sum_{i=1}^{N} a_i^N(t) b_i^N(x)$, получаем систему уравнений (10). Если $a^N(t) \in B_2^N(T)$, то справедлива оценка

$$|u^N(t, x)| \le \sum_{i=1}^{N} |a_i^N(t)| \cdot |b_i^N(x)| \le M_2 \|a^N(t)\|_{B_2^N(T)} < \infty.$$

4. СХОДИМОСТЬ РЯДА ФУРЬЕ (7) ПРИ ИЗВЕСТНЫХ УПРАВЛЯЮЩИХ ФУНКЦИЯХ, В ТОМ ЧИСЛЕ ОПТИМАЛЬНЫХ

Пусть $P^*(t, x)$ и $\theta^*(t)$ — известные оптимальные управляющие воздействия. Тогда из формул (9)—(12) приходим к итерационным процессам

$$u^{N(k+1)*}(t, x) = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \omega_i^N(t) + \int_0^t \left[p_i^{Nk*}(s) + \int_0^l f\left(s, y, \sum_{j=1}^{N} a_j^{Nk*}(s) b_j^N(y), \tau^{k*}(s)\right) \times b_i^N(y) dy \right] G_i^N(t, s) ds \right\} b_i^N(x), \quad (17)$$

$$a_i^{N(k+1)*}(t) = \omega_i^N(t) + \int\limits_0^t \Bigg[p_i^{Nk*}(s) + \\ + \int\limits_0^l f\left(s,\ y,\ \sum_{j=1}^N a_j^{Nk*}(s) b_j^N(y),\ \tau^{k*}(s)\right) \times \\ \times\ b_i^N(y)dy \Bigg] G_i^N(t,\ s)ds, \quad (18)$$

$$\tau^{(k+1)*}(t) = \tau_0 + \int\limits_0^t h(s,\ \tau^{k*}(s),\ \theta^{k*}(s))ds, \quad (19)$$

$$J[p_i^{Nk*},\ \theta^{k*}] = \sum_{i=1}^N \int\limits_0^T \int\limits_0^l g\Bigg(t,\ y,\ \sum_{j=1}^N a_j^{Nk*}(t) b_j^N(y),\ \tau^{k*}(t), \\ \sum_{j=1}^N p_j^{Nk*}(t) b_j^N(y),\ \theta^{k*}(t)\Bigg) b_i^N(y)dydt \cdot b_i^N(x), \\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ . \quad (20)$$

Предположим, что для оптимальных управлений справедливы оценки

$$|P^*(t,\ x) - P^{Nk*}(t,\ x)| \le Q_{N_k}(t),\ \lim_{\substack{N\to\infty \\ k\to\infty}} Q_{N_k}(t) = 0, \quad (21)$$

$$|\theta^*(t) - \theta^{k*}(t)| \le q_k(t),\ \lim_{k\to\infty} q_k(t) = 0. \quad (22)$$

Для оценки допускаемой погрешности по состоянию $\tau^*(t)$ докажем, что справедлива

Теорема 2. *Пусть выполняются условие* (22) *и*

$$h(t,\ \tau(t),\ \theta(t)) \in Bnd(M_0) \cap Lip\{H_{01}(t)_{|\tau};\ H_{02}(t)_{|\tau}\},$$

где $0 < M_0 = \mathrm{const},\ 0 < \int\limits_0^T |H_{0i}(t)|dt < \infty,\ i = 1,\ 2.$

Тогда справедливо соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \|\tau^*(t) - \tau^{(k+1)*}(t)\| = 0. \quad (23)$$

Доказательство. Рассмотрим итерационный процесс (19). В силу условия теоремы, имеем

$$\|\tau^*(t) - \tau^{(k+1)*}(t)\| \le \|\tau^*(t) - \tau^{(k+2)*}(t)\| + \\ + \|\tau^{(k+2)*}(t) - \tau^{(k+1)*}(t)\| \le \int\limits_0^t H_{01}(s)\|\tau^*(s) - \tau^{(k+1)*}(s)\|ds + \\ + \int\limits_0^t H_{02}(s)\|\theta^*(s) - \theta^{(k+1)*}(s)\|ds + \int\limits_0^t H_{01}(s)\|\tau^{(k+1)*}(s) - \\ - \tau^{k*}(s)\|ds + \int\limits_0^t H_{02}(s)\|\theta^{(k+1)*}(s) - \theta^{k*}(s)\|ds \le \\ \le \delta_{1k}(t) + \int\limits_0^t H_{01}(s)\|\tau^*(s) - \tau^{(k+1)*}(s)\|ds, \quad (24)$$

где

$$\delta_{1k}(t) = M_0^{k+1}\left|\int\limits_0^t H_{01}(s)ds\right|^k \frac{1}{k!} + 2\int\limits_0^t H_{02}(s)q_{k+1}(s)ds. \quad (25)$$

В силу оценки (22), из формулы (25) следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \delta_{1k}(t) = 0. \quad (26)$$

Применяя неравенства Гронуолла — Беллмана к (24), получаем

$$\|\tau^*(t) - \tau^{(k+1)*}(t)\| \le \delta_{1k}(t)\exp\left\{\int\limits_0^t H_{01}(s)ds\right\}. \quad (27)$$

В силу выражения (26) отсюда следует соотношение (23). Теорема доказана. ♦

Теперь оценим допускаемую погрешность по состоянию $u^*(t,\ x)$.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (21), (22) *и*:

1) $f(t,\ x,\ u,\ \tau) \in Bnd(\Delta) \cap Lip\{H_{11}(t,\ x)_{|u};\ H_{12}(t)\|_{\tau}\}$, *где*

$$0 < \int\limits_0^t \|H_{11}(s,x)\|_{L_2(D_l)} ds < \infty,\ 0 < \int\limits_0^t \|H_{12}(s)\|_{C(D_t)} ds < \infty;$$

2) $\|\omega(t)\|_{B_2(T)} < \infty,\ M_1^{k+1} M_2^{2k+1} l^{(k+1)/2} < 1.$

Тогда справедливо соотношение

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ k\to\infty}} |u^*(t,\ x) - u^{Nk*}(t,\ x)| = 0.\ \blacklozenge \quad (28)$$

Доказательство см. в Приложении.

5. СХОДИМОСТЬ ФУНКЦИОНАЛА КАЧЕСТВА

Теперь покажем сходимость функционала (20). Здесь справедлива

Теорема 4. *Пусть выполняются условия теорем 2 и 3. Если*

$$g(t,\ x,\ u,\ \tau,\ P,\ \theta) \in \\ \in Lip\{H_{21}(t)_{|u};\ H_{22}(t)_{|\tau};\ H_{23}(t)_{|P};\ H_{24}(t)_{|\theta}\},$$

где $0 < \int\limits_0^T H_{2i}(t)dt < \infty,\ i = \overline{1,4}$, *то справедливо соотношение*

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ k\to\infty}} |J[p_i^*,\ \theta^*] - J[p_i^{Nk*},\ \theta^{k*}]| = 0. \quad (29)$$

Доказательство. В силу условий теоремы из выражений (6) и (20) имеем

$$|J[P^*] - J[P^{Nk*}]| \le \int\limits_0^T [H_{21}(t)|u^*(t,\ x) - u^{Nk*}(t,\ x)| + \\ + H_{22}(t)|\tau^*(t) - \tau^{k*}(t)| + H_{23}(t)|P^*(t,\ x) - P^{Nk*}(t,\ x)| +$$

$$+ H_{24}(t)|\theta^*(t) - \theta^{k*}(t)|]dt \le \int_0^T H_{21}(t)V_{Nk}(t)dt +$$
$$+ \int_0^T H_{22}(t)\delta_{1k}(t)\exp\left\{\int_0^t H_{01}(s)ds\right\}dt +$$
$$+ \int_0^T H_{23}(t)Q_{Nk}(t)dt + \int_0^T H_{24}(t)q_k(t)dt. \qquad (30)$$

С учетом соотношений (21)—(23) и (28) переход к пределу в выражении (30) при $N \to \infty$, $k \to \infty$ дает соотношение (29). Теорема доказана. ♦

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аналитическое решение нелинейных задач оптимального управления очень сложно. На практике широко применяются различные приближенные методы построения программного и синтезирующего оптимального управления. В данной работе решение смешанной задачи (1)—(3) ищется в виде ряда Фурье по собственным функциям $b_i(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_i x$, $\lambda_i = \frac{i\pi}{l}$, $i = 1, 2, \ldots$. Предполагается, что управляющая функция $P(t, x)$ разлагается в ряд Фурье по собственным функциям $b_i(x)$. В результате смешанная задача (1)—(3) сводится к изучению счетной системы нелинейных интегральных уравнений (8) при фиксированных значениях управляющих функций. Вместо счетной системы (8) исследуется однозначная разрешимость конечной системы нелинейных интегральных уравнений (11), для чего применяется метод последовательных приближений. Для конечной системы (11) рассматривается итерационный процесс Пикара (12).

В предположении выполнения оценок (21) и (22) доказывается сходимость решения итерационного процесса (12) к решению счетной системы (8) при $N \to \infty$, $k \to \infty$ для известных, в том числе оптимальных, управляющих функций $P^*(t, x)$ и $\theta^*(t)$. Далее доказывается сходимость функционала качества (6), для чего используются последовательности функций (17)—(19) и последовательность функционала (20).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 3. Сначала докажем, что

$$\lim_{k\to\infty} \|a^{N*}(t) - a^{N(k+1)*}(t)\|_{B_2^N(T)} = 0. \qquad (31)$$

Аналогично оценкам (14) и (15) из выражения (18) получаем оценку

$$\|a^{N*}(t) - a^{N(k+1)*}(t)\|_{B_2^N(T)} \le$$
$$\le \|a^{N(k+2)*}(t) - a^{N(k+1)*}(t)\|_{B_2^N(T)} +$$
$$+ \|a^{N*}(t) - a^{N(k+2)*}(t)\|_{B_2^N(T)} \le$$
$$\le M_1 M_2^2 l^{1/2}\int_0^t \Big[\|H_{11}(s,x)\|_{L_2(D_l)} \|a^{N(k+1)*}(s) - a^{Nk*}(s)\|_{B_2^N(t)} +$$
$$+ \|H_{12}(s)\|_{C(D_l)} \|\tau^{(k+1)*}(s) - \tau^{k*}(s)\|_{C(D_l)} \Big] ds +$$
$$+ M_1 M_2^2 l^{1/2}\int_0^t \Big[\|H_{11}(s,x)\|_{L_2(D_l)} \|a^{N*}(s) - a^{N(k+1)*}(s)\|_{B_2^N(t)} +$$
$$+ \|H_{12}(s)\|_{C(D_l)} \|\tau^{*}(s) - \tau^{(k+1)*}(s)\|_{C(D_l)} \Big] ds \le \delta_{0k}(t) +$$
$$+ M_1 M_2^2 l^{1/2}\int_0^t \Big[\|H_{11}(s,x)\|_{L_2(D_l)} \|a^{N*}(s) - a^{N(k+1)*}(s)\|_{B_2^N(t)} +$$
$$+ \|H_{12}(s)\|_{C(D_l)} \|\tau^{*}(s) - \tau^{(k+1)*}(s)\|_{C(D_l)} \Big] ds, \qquad (32)$$

где

$$\delta_{0k}(t) = M_1^{k+1} M_2^{2k+1} l^{\frac{k+1}{2}} \left[\Delta \left| \int_0^t \|H_{11}(s,x)\|_{L_2(D_l)} ds \right|^k \frac{1}{k!} + \right.$$
$$\left. + M_0 \left| \int_0^t \|H_{12}(s)\|_{C(D_l)} ds \right|^k \frac{1}{k!} \right].$$

Теперь, подставляя неравенства (27) в оценку (32), имеем

$$\|a^{N*}(t) - a^{N(k+1)*}(t)\|_{B_2^N(T)} \le \delta_{0k}(t) +$$
$$+ M_1 M_2^2 l^{1/2}\int_0^t \|H_{12}(s)\|_{C(D_l)}\, \delta_{1k}(t)\exp\left\{\int_0^t H_{01}(s)ds\right\} ds +$$
$$+ M_1 M_2^2 l^{1/2}\int_0^t \|H_{11}(s,x)\|_{L_2(D_l)} \times$$
$$\times \|a^{N*}(s) - a^{N(k+1)*}(s)\|_{B_2^N(t)}\, ds. \qquad (33)$$

Применяя к оценке (33) неравенства Гроноулла — Беллмана, получаем

$$\|a^{N*}(t) - a^{N(k+1)*}(t)\|_{B_2^N(T)} \le \Big[\delta_{0k}(t) +$$
$$+ M_1 M_2^2 l^{\frac{1}{2}} \int_0^t \|H_{12}(s)\|_{C(D_l)}\, \delta_{1k}(t)\exp\left\{\int_0^t H_{01}(s)ds\right\} ds \Big] \times$$
$$\times \exp\left\{ M_1 M_2^2 l^{1/2}\int_0^t \|H(s,x)\|_{L_2(D_l)} ds \right\}. \qquad (34)$$

Так как в силу теоремы $\lim\limits_{k\to\infty}\delta_{0k}(t) = 0$, то в силу соотношения (26), из выражения (34) получаем соотношение (31).

Теперь оценим величину

$$V_{Nk} = |u^*(t, x) - u^{Nk*}(t, x)|. \quad (35)$$

С этой целью оценим разности: $u^*(t, x) - u^{N*}(t, x)$ и $u^{N*}(t, x) - u^{Nk*}(t, x)$. Сначала рассмотрим следующее соотношение

$$|u^*(t, x) - u^{N*}(t, x)| \le \eta_N,$$

где

$$\eta_N = \int_0^l \left| \left(\varphi(y) - \sum_{i=1}^N \varphi_i^N b_i^N(y) \right) [\Phi(t, y)]_{t=0} \right| dy +$$

$$+ \int_0^T \int_0^l \left| \Phi(t, y) \left[P^*(t, y) - \sum_{i=1}^N \int_0^l P^{N*}(t, z) b_i^N(z) dz \right] b_i^N(y) \right| dydt +$$

$$+ \int_0^T \int_0^l \left| \Phi(t, y) \left[f\left(t, y, \sum_{j=1}^\infty a_j^*(t) b_j(y)\right) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sum_{i=1}^N \int_0^l f\left(t, z, \sum_{j=1}^N a_j^{N*}(t) b_j^N(y)\right) b_i^N(z) dz \right] b_i^N(y) \right| dydt. \quad (36)$$

Если $a^{N*}(t) \in B_2^N(T)$ является решением КСНИУ (18), то покажем, что

$$\lim_{N \to \infty} \eta_N = 0. \quad (37)$$

Действительно, так как $a^{N*}(t) \in B_2^N(T)$, то из равенства

$$\lim_{N \to \infty} u^{N*}(t, x) = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^N a_i^{N*}(t) \cdot b_i^N(x) = u^*(t, x)$$

в силу условий теоремы следует, что

$$\lim_{N \to \infty} f(t, x, u^{N*}(t, x)) = f(t, x, u^*(t, x)) \quad (38)$$

в смысле метрики $L_2(D)$.

Тогда первый интеграл в выражении (36) стремится к нулю при $N \to \infty$. Сходимость второй разности в выражении (36) при $N \to \infty$, в силу оценки (21), следует из соотношения

$$\lim_{N \to \infty} P^{N*}(t, x) = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^N p_i^{N*}(t) b_i^N(x) = P^*(t, x).$$

Сходимость последней разности в выражении (36) при $N \to \infty$ следует из соотношения (38). Следовательно, имеет место формула (37). Отсюда следует, что

$$\lim_{N \to \infty} |u^*(t, x) - u^{N*}(t, x)| = 0. \quad (39)$$

В силу того, что

$$|u^{N*}(t, x) - u^{Nk*}(t, x)| \le \sum_{i=1}^N |a_i^{N*}(t) - a_i^{Nk*}(t)| \cdot |b_i^N(x)| \le$$

$$\le M_2 \left\| a^{N*}(t) - a^{Nk*}(t) \right\|_{B_2^N(T)},$$

из соотношения (31) получаем

$$\lim_{k \to \infty} |u^{N*}(t, x) - u^{Nk*}(t, x)| = 0. \quad (40)$$

В силу условий теоремы, соотношений (39) и (40), из выражений (7) и (17) следует, что

$$\lim_{\substack{N \to \infty \\ k \to \infty}} V_{Nk} = \lim_{\substack{N \to \infty \\ k \to \infty}} |u^*(t, x) - u^{Nk*}(t, x)| \le \lim_{N \to \infty} |u^*(t, x) -$$

$$- u^{N*}(t, x)| + \lim_{k \to \infty} |u^{N*}(t, x) - u^{Nk*}(t, x)| = 0,$$

т. е. получаем соотношение (28). Теорема доказана. ♦

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А.Г.* Оптимальные и адаптивные системы. — М.: Высшая школа, 1989. — 263 с.
2. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976. — 424 с.
3. *Вязгин В.А., Федоров В.В.* Математические методы автоматизированного проектирования. — М.: Высшая школа, 1989. — 184 с.
4. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1973. — 448 с.
5. *Куропаткин П. В.* Оптимальные и адаптивные управления. — М.: Наука, 1980. — 288 с.
6. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1965. — 474 с.
7. *Евтушенко Ю.Г.* Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. — М.: Наука, 1982. — 432 с.
8. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978. — 464 с.
9. *Лионс Ж.Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. — М.: Мир, 1972. — 412 с.
10. *Лурье К.А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. — М.: Наука, 1975. — 480 с.
11. *Рапопорт Э.Я.* Оптимальное управление системами с распределенными параметрами. — М.: Высшая школа, 2009. — 680 с.
12. *Срочко В.А.* Итерационные методы решения задач оптимального управления. — М.: Физматлит, 2000. — 160 с.
13. *Тятюшкин А.И.* Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем. — Новосибирск: Наука, 1992. — 193 с.
14. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978. — 488 с.
15. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967. — 736 с.
16. *Мазья В.Г.* Пространства С. Л. Соболева. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. — 416 с.
17. *Соболев С.Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988. — 336 с.
18. *Юлдашев Т.К.* Смешанная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с параболическим оператором высокой степени // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. — 2012. — Т. 52, № 1. — С. 112—123.
19. *Юлдашев Т.К.* Развитие теории нелинейных дифференциальных уравнений с максимумами: дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Бишкек: Институт математики НАН Кыргызской Республики, 1993. — 121 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Е.Я. Рубиновичем.

Юлдашев Турсун Камалдинович — канд. физ.-мат. наук,
Сибирский государственный аэрокосмический университет
им. академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск,
☎ (391) 291-91-19, ✉ tursunbay@rambler.ru.