УДК 004.722,519.248

ОЦЕНКА ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТИ ВЫСОКОСКОРОСТНОЙ БЕСПРОВОДНОЙ ТАНДЕМНОЙ СЕТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КАНАЛОВ САНТИМЕТРОВОГО И МИЛЛИМЕТРОВОГО ДИАПАЗОНОВ РАДИОВОЛН В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ БЕЗОПАСНОСТЬЮ ДОРОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ[1]

В.М. Вишневский, А.А. Ларионов, О.В. Семенова

Рассмотрен метод оценки производительности широкополосной беспроводной сети в системах управления безопасностью дорожного движения. Предложена и исследована модель тандемной сети массового обслуживания с коррелированными входными потоками и кросс-трафиком, адекватно описывающая передачу данных по беспроводным каналам миллиметрового E-диапазона, а также каналам, функционирующим под управлением протокола IEEE 802.11n. Разработан алгоритм вычисления характеристик производительности рассматриваемой тандемной сети.

Ключевые слова: автоматизированная система, контроль, безопасность автодорог, многофазная стохастическая модель, MAP-поток, RFID-считыватель, радар.

ВВЕДЕНИЕ

Аварийность на автодорогах — одна из острейших социально-экономических проблем, стоящих перед большинством стран мира. Один из наиболее действенных путей ее решения заключается в создании АСУ для фиксации нарушений правил дорожного движения.

В ЗАО НПФ «Информационные и сетевые технологии» разработана автоматизированная система контроля безопасности на автодорогах с использованием RFID-технологии, обладающая рядом преимуществ перед применяемыми в настоящее время АСУ бесконтактной идентификации автомобилей. Одно из таких преимуществ, в частности, состоит в применении RFID-технологии, позволяющей идентифицировать номерной знак транспортного средства в любых погодных условиях. Применение этой технологии обеспечивает повышение вероятности обнаружения нарушителей правил дорожного движения до 0,9 [1]. Значительное повышение качества управления в интеллектуальных транспортных системах достигается также благодаря разработке высокоскоростной беспроводной связи вдоль автодорог для передачи в реальном масштабе времени мультимедийной информации от систем видеофиксации нарушений правил дорожного движения в центр управления и контроля.

В данной работе описан метод оценки производительности широкополосной беспроводной сети, положенный в основу разработанной АСУ для контроля безопасности на автодорогах. Предложена математическая модель тандемной (многофазной) сети массового обслуживания с коррелированными входными потоками и дополнительными потоками на узлы (кросс-трафиком), адекватно описывающая передачу данных по беспроводным каналам сантиметрового диапазона, функционирующим под управлением протокола IEEE 802.11n [2, 3], или по сверхвысокоскоростным каналам миллиметрового диапазона радиоволн [4]. Сущес-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (госконтракт № 14.514.11.4071).

твенное отличие этой модели от хорошо изученных в литературе [5] состоит в более сложном характере входного потока от RFID-считывателей и радаров и наличии кросс-трафика. Предполагается, что поток пакетов от RFID-считывателей и радаров в центр управления системы является потоком типа MAP (Markovian Arrival Process, марковский входной поток). Модель марковского входного потока, по сравнению с традиционно используемой в литературе моделью стационарного пуассоновского потока, учитывающей только среднее значение длин интервалов между соседними моментами поступления запросов, позволяет отражать не только среднее значение, дисперсию, эксцесс и асимметрию длин интервалов между соседними моментами поступления запросов, но и возможную корреляцию длин последовательных интервалов [6]. Поток типа MAP позволяет более точно описывать входные потоки пакетов в телекоммуникационных системах [7].

Рассматриваемая тандемная система состоит из произвольного конечного числа фаз (станций), представленных однолинейными системами с ограниченными буферами, на первую фазу которого поступает MAP-поток запросов, каждый из которых должен получить последовательное обслуживание на всех станциях тандема. Кроме того, на каждую из станций поступает дополнительный MAP-поток запросов (кросс-поток), которые должны обслужиться на этой станции и на всех последующих станциях тандема. В силу ограниченности числа мест для ожидания на станциях, запросы из любого потока могут быть потеряны. Для обнаружения и предотвращения так называемых узких мест в тандемной сети важно определить вероятности потерь запросов, поступающих на каждую из станций тандема.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассматривается тандемная система массового обслуживания, состоящая из R, $R > 1$, станций типа $MAR^{(1)}/M/1/N_1 \to \cdot/M/1/N_2 \to \ldots \to \cdot/M/1/N_R$.

Станция номер r, $r = 1, \ldots, R$, имеет один обслуживающий прибор и N_r мест для ожидания. Время обслуживания запроса на приборе r-й станции распределено по экспоненциальному закону с параметром μ_r.

На вход первой станции поступает марковский поток запросов, который мы обозначим как MAP_1. Пространство состояний управляющего процесса этого потока определим как $\{0, 1, \ldots, W_1\}$. Каждый из запросов должен последовательно обслужиться на всех станциях тандема. Кроме потока запросов, поступающих на r-ю, $r > 1$, станцию из $(r - 1)$-й станции, на нее поступает дополнительный MAP-поток запросов, который мы обозначим как MAP_r. Пространство состояний управляющего процесса этого потока определим как $\{0, 1, \ldots, W_r\}$. Запросы из этого потока идентичны запросам, поступающим из $(r - 1)$-й станции и должны обслужиться на r-й, $(r + 1)$-й, ..., R-й станциях.

Обозначим матрицы, задающие MAP_1, как D_0 и D_1, а аналогичные матрицы, задающие MAP_r, как $H_0^{(r)}$ и $H_1^{(r)}$. Интенсивность поступления запросов в MAP_1 обозначим как $\tilde{\lambda}_1$, а интенсивность поступления запросов в MAP_r, $r > 1$, — как h_r.

Если запрос, поступающий на r-ю, $r = 1, \ldots, R$, станцию тандема, застает все места для ожидания занятыми, то он покидает тандем навсегда (теряется).

Далее изучим выходящие потоки со станций тандема, рассмотрим расчет стационарного распределения тандема и его фрагментов и вероятностей потерь на отдельных станциях системы.

2. ПРОБЛЕМА РАСЧЕТА СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ ТАНДЕМА. ВЫХОДЯЩИЕ ПОТОКИ ИЗ СТАНЦИЙ ТАНДЕМА

Процесс изменения состояний системы описывается в терминах неприводимой многомерной цепи Маркова с непрерывным временем $\xi_t = \{n_t^{(1)}, n_t^{(2)}, \ldots, n_t^{(R)}, \nu_t\}$, $t \geq 0$, где $n_t^{(r)}$ — число запросов на r-й станции, $n_t^{(r)} \in \{0, \ldots, N^{(r)} + 1\}$, $r \in \{1, \ldots, R\}$; ν_t — состояние управляющего процесса MAP-потока в момент времени t, $\nu_t \in \{0, \ldots, W\}$.

Пространство состояний цепи Маркова ξ_t, $t \geq 0$ задается как $S = \{0, 1, \ldots, N_1 + 1\} \times \ldots \times \{0, 1, \ldots, N_{R+1}\} \times \{0, 1, \ldots, W_1\} \times \ldots \times \{0, 1, \ldots, W_R\}$. Вектор-строка $\mathbf{p}$ стационарных вероятностей состояний цепи имеет размерность $\prod_{r=1}^{R} (N_R + 2)(W_R + 1)$ и вычисляется как единственное решение системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{p}Q = \mathbf{0}$, $\mathbf{pe} = 1$, где матрица Q является инфинитезимальным генератором цепи Маркова ξ_t, $t \geq 0$, $\mathbf{0}$ — нулевой вектор-строка, $\mathbf{e}$ — вектор-столбец, состоящий из единиц.

Построение этой матрицы может быть выполнено с помощью стандартной методики, используемой в теории сетей массового обслуживания, и представляет собой не слишком трудную задачу. Но эта работа в случае более или менее большого значения R достаточно трудоемкая. Поэтому представляется интересным найти способ для расчета стационарного распределения состояний тандема в целом или его частей (фрагментов) или маргинальных стационарных распределений состояний любой станции, не записывая явное выражение генератора Q. Отметим, что функционирование фрагмента тандема, состоящего из любого количества станций и расположенного в начале тандема, не зависит от состояний остальных станций. Таким образом, интуитивно ясно, что какая-либо декомпозиция может быть применена для расчета стационарного распределения тандема и его фрагментов без полного построения генератора.

В данном исследовании разрабатывается простой, точный и удобный метод вычисления маргинальных стационарных распределений вероятностей фрагментов тандема, а также всего тандема и соответствующих вероятностей потерь.

Этот метод основан на анализе выходящих и входящих потоков на станциях тандема, в результате которого доказано, что такие потоки принадлежат классу MAP-потоков. Соответствующие результаты сформулированы в теореме 1 и ее следствии.

Теорема 1. *Выходящий поток из r-й станции тандема, $r \in \{1, 2, ..., R\}$, принадлежит классу MAP-потоков. Этот MAP-поток задается матрицами $D_0^{(r)}$ и $D_1^{(r)}$, которые вычисляются по рекуррентным формулам:*

$$D_0^{(r)} = -\mu_r \mathrm{diag}\{0, 1, ..., N_r + 1\} \otimes I_{K_r} +$$

$$+ \begin{pmatrix} D_0^{(r-1)} \oplus H_0^{(r)} & D_1^{(r-1)} \oplus H_1^{(r)} & O & \dots & O & O \\ O & D_0^{(r-1)} \oplus H_0^{(r)} & D_1^{(r-1)} \oplus H_1^{(r)} & \dots & O & O \\ O & O & D_0^{(r-1)} \oplus H_0^{(r)} & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O & O & O & \dots & D_0^{(r-1)} \oplus H_0^{(r)} & D_1^{(r-1)} \oplus H_1^{(r)} \\ O & O & O & \dots & O & (D_0^{(r-1)} + D_1^{(r-1)}) \oplus (H_0^{(r)} + H_1^{(r)}) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$D_1^{(r)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_r & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_r & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_r & 0 \end{pmatrix} \otimes I_{K_r}, \quad r = 1, 2, ..., R, \quad (2)$$

с начальным условием $D_0^{(1)} = D_0$, $D_1^{(1)} = D_1$, $H_0^{(1)} = H_1^{(1)} = 0$.

Здесь 0 — нулевая квадратная матрица размера K_r, I_{K_r} — тождественная матрица порядка K_r, $K_r = \prod_{r'=1}^{r-1} (N_{r'} + 2) \prod_{r'=1}^{r-1} (W_{r'} + 1)$, $r = 1, 2, ..., R$, $\otimes$ и $\oplus$ — символы кронекерова произведения и суммы матриц, соответственно, $\mathrm{diag}\{0, 1, ..., N_r + 1\}$ — диагональная матрица с диагональными элементами, перечисленными в скобках.

Доказательство. Пусть $r = 1$. Очевидно, что процесс $\{n_t^{(1)}, \nu_t\}$, $t \leqslant 1$, описывающий работу первой станции, является цепью Маркова. Перенумеруем состояния этой цепи в лексикографическом порядке, т. е. следующим образом: (0, 0), (0, 1), ..., (0, W), (1, 0), (1, 1), ..., (1, W), ..., (N_1 + 1, 0), (N_1 + 1, 1), ..., (N_1 + 1, W). Тогда, как легко видеть, переходы цепи, которые не приводят к завершению обслуживания на первой станции, определяются матрицей $D_0^{(1)}$, которая рассчитывается по формуле (1). Переходы цепи, ведущие к завершению обслуживания на первой станции, определяются матрицей $D_1^{(1)}$. Теперь полагаем $r = 2$. Входящий на вторую станцию поток представляет собой суперпозицию двух независимых MAP-потоков: потока, выходящего из первой станции, и дополнительного MAP-потока на вторую станцию. Первый из этих потоков задается матрицами

$D_0^{(1)}$, $D_1^{(1)}$, а второй, как следует из описания рассматриваемой системы, — матрицами $H_0^{(2)}$, $H_1^{(2)}$. Тогда, по свойству суперпозиции независимых MAP-потоков, суммарный поток запросов, поступающий на вторую станцию, является также MAP-потоком и задается матрицами $D_0^{(1)} \otimes H_0^{(2)}$, $D_1^{(1)} \oplus H_1^{(2)}$. Тогда, используя те же рассуждения, что и при рассмотрении случая $r = 1$, приходим к выводу, что выходящий из второй станции поток определятся как MAP и задается матрицами $D_0^{(2)}$, $D_1^{(2)}$, вычисляемыми по формуле (1). Доказательство для произвольного значения r проводится по аналогии.

Следствие 1. Входящий на r-ю, станцию $r \in \{2, ..., R\}$, поток тандема принадлежит классу MAP-потоков и задается матрицами

$$\tilde{D}_0^{(r)} = D_0^{(r-1)} \oplus H_0^{(r)}, \quad \tilde{D}_1^{(r)} = D_1^{(r-1)} \oplus H_1^{(r)}, \quad r \in \{2, ..., R\}, \tag{3}$$

которые вычисляются по рекуррентным формулам (1) и (2).

Замечание 1. В дальнейшем мы будем обозначать суммарный входящий на r-ю станцию MAP-поток как $MAP^{(r)}$, $r = 1, ..., R$. Заметим, что обозначение $MAP^{(1)}$ означает то же, что и ранее введенное обозначение MAP_1. Оба этих обозначения используются для входящего на первую станцию потока. ♦

Используя результаты теоремы 1, можно рассчитать маргинальное стационарное распределение r-й станции тандема как стационарное распределение системы массового обслуживания $MAP^{(r)}/M/1/N_r$, $r = 1, ..., R$.

В следующем разделе приведем алгоритмы вычисления стационарного распределения такого типа систем. Для краткости опустим индекс r в обозначении матриц, описывающих MAP-поток, и интенсивности обслуживания, а также в обозначениях числа обслуживающих приборов.

3. СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СИСТЕМЫ MAP/M/1/N

Функционирование системы MAP/M/1/N описывается цепью Маркова $\eta_t = \{n_t, \nu_t\}$, $t \geqslant 1$, где n_t — число заявок в системе, а ν_t, $\nu_t \in \{0, ..., W\}$, — состояние управляющего процесса MAP в момент времени t.

Перенумеруем состояния цепи в лексикографическом порядке. Тогда инфинитезимальный генератор этой цепи определяется как

$$A = \begin{pmatrix} D_0 & D_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mu I & D_0 - \mu I & D_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \mu I & D_0 - \mu I & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_0 - \mu I & D_1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu I & (D_0 + D_1) - \mu I \end{pmatrix}.$$

Пусть $\mathbf{q}$ — вектор-строка стационарного распределения вероятностей состояний цепи. Он определяется как единственное решение системы линейных алгебраических уравнений $\mathbf{q}A = \mathbf{0}$, $\mathbf{qe} = 1$. В случае большой размерности данной системы для ее решения целесообразно применять специальные алгоритмы. Наиболее известные из них описаны далее.

Представим вектор $\mathbf{q}$ как $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1, ..., \mathbf{q}_{N+1})$, где векторы $\mathbf{q}_i$, $i = 0, ..., N + 1$, имеют порядок $W + 1$.

Алгоритм 1. Векторы $\mathbf{q}_i$, $i = 0, ..., N + 1$, вычисляются как $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_0 F_i$, $i = 0, ..., N + 1$, где матрицы F_i вычисляются рекуррентно по формулам:

$$F_0 = I,\ F_i = \frac{1}{\mu}[F_{i-1}(\mu I - D_0) - (1 - \delta_{i,1})F_{i-2}D_1], \quad i = 1, ..., N + 1,$$

а вектор $\mathbf{q}_0$ — единственное решение системы уравнений

$$\mathbf{q}_0(F_{N-1}D_1 + F_N(D_0 + D_1 - \mu I)) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{q}_0 \sum_{i=0}^{N+1} \Phi_i e = 1.$$

Здесь $\delta_{i,1}$ — символ кронекера.

Более подробную информацию об этом алгоритме можно найти в работе [8].

Как видно, рекурсия для матриц F_i включает в себя операцию вычитания. Это означает, что в случае, когда значение N большое, описанный алгоритм может быть численно неустойчивым. В такой ситуации может быть применен алгоритм, основанный на вероятностном смысле матрицы A [6]. Этот алгоритм существенно учитывает структуру матрицы A и описывается следующим образом.

Алгоритм 2. Векторы стационарного распределения q_i, $i = 0, ..., N + 1$, вычисляются как

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_0\Phi_i, \quad i = 0, ..., N + 1,$$

где матрицы Φ_i вычисляются по рекуррентным формулам:

$$\Phi_0 = I, \Phi_i = \Phi_{i-1}D_1(\mu I - D_0 - (1 - \delta_{1, N})D_1D_i)^{-1},$$
$$i = 1, ..., N + 1,$$

а матрицы G_i, $i = 0, ..., N$, вычисляются с помощью обратной рекурсии

$$G_i = \mu_i[\mu I - D_0 - D_1G_{i+1}]^{-1},$$
$$i = N - 1, N - 2, ..., 0,$$

при начальном условии $G_N = \mu(\mu I - D_0 - D_1)^{-1}$ вектор $\mathbf{q}_0$ — единственное решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{q}_0(D_0 + D_1G_0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{q}_0\sum_{i}^{N+1}\Phi_i\mathbf{e} = 1.$$

Обратим внимание на то, что операции вычитания не присутствуют в данном алгоритме, а все обратные матрицы существуют и неотрицательны, поэтому алгоритм численно устойчив.

4. РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТАНДЕМА И ЕГО ФРАГМЕНТОВ

Рассмотрим расчет стационарного распределения тандема и его фрагментов на основе результатов исследования выходящих потоков, представленных в теореме 1. Пусть $\langle r, r + 1, ..., r'\rangle$ — фрагмент тандема, состоящий из r-й, $(r + 1)$-й, ..., r'-й станций, $1 \leqslant r \leqslant r' \leqslant R$.

Теорема 2. *Стационарное распределение фрагмента* $\langle r, r + 1, ..., r'\rangle$ *рассматриваемого тандема может быть рассчитано как стационарное распределение тандема* $MAR^{(r)}/M/1/N_r \to \cdot/M/1/N_{r+1} \to \to ... \to \cdot/M/1/N_{r'}$, *где* $MAP^{(r)}$ *определяется по формулам* (1)—(3).

Следствие 2. Вектор $\mathbf{p}^{(r)}$ маргинального стационарного распределения r-й станции тандема вычисляется как стационарное распределение системы массового обслуживания $MAR^{(r)}/M/1/N_r$, $r = 1, ..., R$, и может быть рассчитан с помощью одного из алгоритмов, описанных в § 3.

Теорема 3. *Совместное стационарное распределение* $\mathbf{p}^{(1, ..., r)}$ *вероятностей состояний первых* r *станций тандема может быть вычислено как стационарное распределение управляющего процесса выходящего из* r*-й станции* $MAR^{(r)}$*-потока, т. е. имеет место формула* $\mathbf{p}^{(1, ..., r)} = \boldsymbol{\theta}^{(r)}$, *где вектор* $\boldsymbol{\theta}^{(r)}$ *— единственное решение системы линейных алгебраических уравнений*

$$\boldsymbol{\theta}^{(r)}(D_0^{(r)} + D_1^{(r)}) = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\theta}^{(r)}\mathbf{e} = 1, \quad r = 1, ..., R,$$

а матрицы $D_0^{(r)}$ *и* $D_1^{(r)}$ *вычисляются по рекуррентным формулам* (1) *и* (2).

В случае большой размерности эта система может быть успешно решена с помощью устойчивого алгоритма, предложенного в работе [6]. Очевидно, что вектор $\mathbf{p}$ стационарного распределения всего тандема совпадает с вектором $\mathbf{p}^{(1, ..., R)}$.

Следствие 3. Вектор $\mathbf{p}$ стационарного распределения тандема вычисляется как единственное решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{p}(D_0^{(R)} + D_1^{(R)}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{pe} = 1. \qquad (4)$$

Заметим, что матрица $D_0^{(R)} + D_1^{(R)}$ совпадает, с точностью до постоянного множителя, с инфинитезимальным генератором Q цепи Маркова $\xi_t = \{n_t^{(1)}, n_t^{(2)}, ..., n_t^{(R)}, \nu_t\}$, $t \geqslant 0$, описывающей функционирование тандема, более того, $Q = D_0^{(R)} + D_1^{(R)}$.

5. ВЕРОЯТНОСТИ ПОТЕРЬ

Рассчитав стационарные распределения тандема и его фрагментов, можно найти ряд важных стационарных характеристик производительности системы. Важнейшие из них — вероятности потерь на станциях тандема.

Теорема 4. *Вероятность потери* $P_{loss}^{(r)}$ *произвольного запроса на* r*-й станции тандема вычисляется как*

$$P_{loss}^{(r)} = (\tilde{\lambda}_r - \lambda_r)/\tilde{\lambda}_r, \quad r = 1, ..., R. \qquad (5)$$

Здесь $\tilde{\lambda}_r$ *— интенсивность суммарного* $MAR^{(r)}$*-потока, поступающего на* r*-ю станцию,* $\tilde{\lambda}_r = \tilde{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}\tilde{D}_1^{(r)}\mathbf{e}$, *где вектор* $\tilde{\boldsymbol{\theta}}^{(r)}$ *— единственное решение системы* *уравнений* $\tilde{\boldsymbol\theta}^{(r)}(\tilde{D}_0^{(r)} + \tilde{D}_1^{(r)}) = \mathbf{0}$, $\tilde{\boldsymbol\theta}^{(r)}\mathbf{e} = 1$, λ_r — *интенсивность выходящего с r-й станции потока,* $\lambda_r = \boldsymbol\theta^{(r)} D_1^{(r)}\mathbf{e}$, *где вектор* $\boldsymbol\theta^{(r)}$ — *единственное решение системы уравнений* $\boldsymbol\theta^{(r)}(D_0^{(r)} + D_1^{(r)}) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol\theta^{(r)}\mathbf{e} = 1$.

Доказательство. Согласно эргодической теореме для цепей Маркова (см., например, работу [9]) вероятность потери запроса на отдельной станции тандема может быть вычислена как отношение разности интенсивностей входящего и выходящего потоков на этой станции к интенсивности входящего потока.

Теорема 5. *Вероятность потери на r-й станции тандема произвольного запроса, поступившего с* $(r - 1)$*-й станции, вычисляется как*

$$P_{loss/1}^{(r)} = \tilde{\boldsymbol\theta}^{(r)}(D_1^{(r-1)} \otimes I_{W_r+1})\mathbf{e}/\lambda_{r-1},$$
$$r = 1, \ldots, R. \qquad (6)$$

Здесь $D_1^{(0)} = D_1$, λ_0 — *интенсивность входящего в тандем потока.*

Вероятность потери на r-й станции тандема произвольного запроса из дополнительного потока вычисляется по формуле

$$P_{loss/2}^{(r)} = \tilde{\boldsymbol\theta}^{(r)}(O_{K_r(N_r+1)} \otimes H_1^{(r)})\mathbf{e}/h_r,$$
$$r = 2, \ldots, R. \qquad (7)$$

Доказательство. Числитель правой части формулы (6) есть интенсивность потока запросов, поступающего на r-ю станцию из $(r - 1)$-й станции и застающих все приборы r-й станции занятыми, а знаменатель — интенсивность потока всех запросов, поступающих на r-ю станцию из $(r - 1)$-й станции. По известным эргодическим соображениям, отношение этих двух интенсивностей определяет искомую вероятность $P_{loss/1}^{(r)}$. Аналогичные рассуждения приводят к формуле (7) для вероятности $P_{loss/2}^{(r)}$. ♦

С помощью теоремы 5 можно получить альтернативное выражение для вероятности суммарных потерь $P_{loss}^{(r)}$ на r-й станции, ранее определенной формулой (5) в теореме 4. Альтернативную формулу, а также формулы для некоторых совместных вероятностей, ассоциированных с тандемом, дает

Следствие 4. Вероятность того, что произвольный запрос из суммарного потока на r-ю станцию принадлежит выходящему из $(r - 1)$-й станции потоку и будет потерян из-за отсутствия свободных приборов на r-й станции, вычисляется как

$$P_{loss,\,1}^{(r)} = P_{loss/1}^{(r)}\lambda_{r-1}/\tilde{\lambda}_r, \quad r = 1, \ldots, R.$$

Вероятность того, что произвольный запрос из суммарного потока на r-ю станцию принадлежит дополнительному потоку и будет потерян из-за отсутствия свободных приборов на станции, вычисляется как

$$P_{loss,\,2}^{(r)} = P_{loss/2}^{(r)} h_r/\tilde{\lambda}_r, \quad r = 2, \ldots, R,$$

а вероятность $P_{loss}^{(r)}$ потери запроса на r-й станции может быть вычислена как

$$P_{loss}^{(r)} = P_{loss,\,1}^{(r)} + P_{loss,\,2}^{(r)}.$$

Следствие 5. В случае $R = 2$ вероятность того, что запрос из входящего на первую станцию потока не будет потерян в системе, определяется как

$$P_{succ} = (1 - P_{loss,\,1}^{(r)})(1 - P_{loss,\,2}^{(r)}).$$

6. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПОТЕРЬ В ТАНДЕМНОЙ СИСТЕМЕ

Алгоритм предназначен для вычисления для каждой (r-й) станции:

— интенсивности λ_r поступления запросов на станцию:

$$\lambda_r = \boldsymbol\theta^{(r)} D_1^{(r)}\mathbf{e}, \qquad (8)$$

где вектор-строка $\boldsymbol\theta^{(r)}$ — единственное решение системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol\theta^{(r)}(D_0^{(r)} + D_1^{(r)}) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol\theta^{(r)}\mathbf{e} = 1$;

— коэффициента вариации $c_{\mathrm{var}}^{(r)}$ длин интервалов между моментами поступления запросов:

$$(c_{\mathrm{var}}^{(r)})^2 = 2\lambda_r\boldsymbol\theta^{(r)}(-D_0^{(r)})^{-1}\mathbf{e} - 1; \qquad (9)$$

— коэффициента корреляции $c_{cor}^{(r)}$ длин двух соседних интервалов между поступлениями запросов:

$$c_{cor}^{(r)} =$$
$$= [\lambda_r\boldsymbol\theta^{(r)}(-D_0^{(r)})^{-1}D_1^{(r)}(-D_0^{(r)})^{-1}\mathbf{e} - 1]/(c_{\mathrm{var}}^{(r)})^2; \qquad (10)$$

— распределения $q_i^{(r)}$, $i = 0, \ldots, N_r + 1$, числа запросов на станции;

— вероятности $P_{loss}^{(r)}$ потери произвольного запроса, поступающего на станцию, $r = 1, ..., R$.

Возможный вариант алгоритма.

Шаг 1. Полагаем $r = 1$, $D_0^{(1)} = D_0$, $D_1^{(1)} = D_1$. Вычисляем характеристики MAP-потока на первую станцию по формулам (8)—(10). Далее с помощью алгоритма 2 (см. § 3) вычисляем стационарное распределение числа запросов на первой станции.

Шаг 2. Полагаем $r = r + 1$.

Шаг 3. Вычисляем, воспользовавшись теоремой 1, матрицы $D_0^{(r)}$ и $D_1^{(r)}$, определяющие входящий на r-ю станцию поток.

Шаг 4. Вычисляем характеристики входящего на r-ю станцию MAP-потока (в случае $r = R + 1$ это будут характеристики выходного MAP-потока из тандема) по формулам (8)—(10).

Шаг 5. Если $r > R$, то шаг 6. В противном случае с помощью алгоритма 2 (см. § 3) вычисляем стационарное распределение числа запросов на r-й станции.

Шаг 6. Вычисляем вероятность потери запроса на $(r - 1)$-й станции по формуле (56).

Шаг 7. Если $r \leqslant R$, то шаг 2. В противном случае шаг 8.

Шаг 8. Вычисляем вероятность потери произвольного запроса в тандеме в целом по формуле $P_{loss} = \lambda_1 - \lambda_r/\lambda_1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан новый метод оценки производительности автоматизированных систем управления безопасностью дорожного движения, использующих RFID-технологию для идентификации транспортных средств. Предложена и исследована модель стохастической тандемной сети, адекватно описывающей передачу мультимедийных данных по беспроводным каналам миллиметрового Е-диапазона радиоволн, а также каналам, функционирующим под управлением протокола IEEE802.11n. Модель представляет собой обобщение известных в мировой литературе моделей многофазных систем массового обслуживания. Разработанный метод расчета базируется на доказанной в статье теореме о том, что выходящий с любой фазы тандемной сети поток является потоком типа MAP (Markovian Arrival Process). Описан вычислительный алгоритм для оценки основных характеристик производительности тандемной сети: стационарных вероятностей состояний сети; маргинальных длин очередей на фазах сети; вероятности потери сообщений; среднего времени пребывания сообщения в тандемной сети.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вишневский В.М., Минниханов Р.Н.* Автоматизированная система безопасности на автодорогах с использованием RFID-технологий и новейших беспроводных средств // Проблемы информатики. — 2012. — № 1. — С. 52—65.
2. *Part 11:* Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) specifications // IEEE P802.11—2012. — IEEE, March 2012.
3. *Vishnevsky V., Semenova O.* Polling Systems: Theory and Applications for Broadband Wireless Networks. LAMBERT Academic Publishing. — 2012. — 317 p.
4. *Vishnevsky V., Larionov A.* A novel approach for scheduling in STDMA for high-throughput backbone wireless mesh networks operating within 60—80 GHz // International Conference «Advances in Mesh Networks», Venice/Mestre, Italy, 18—25 July 2010.
5. *Balsamo S., Persone V.D.N., Inverardi P.* A review on queueing network models with finite capacity queues for software architectures performance prediction // Performance Evaluation. — 2003. — Vol. 51. — P. 269—288.
6. *Vishnevsky V.M., Dudin A.N., Semenova O.V., Klimenok V.I.* Performance analysis of the BMAP/G/1 queue with gated service and adaptive vacations // Performance Evaluation. — 2011. Vol. 68. — P. 446—462.
7. *Chakravarthy S.R.* The batch Markovian arrival process: a review and future work // Advances in Probability Theory and Stochastic Process: Proc. / Eds. Krishnamoorthy A. et al. — New Jersey: Notable Publications, 2001. — P. 21—49.
8. *Klimenok V.I.* Calculation of characteristics of a multiserver queue with rejections and burst-like traffic // Automatic Control and Computer Sciences. — 1999. — Vol. 33, N 6. — P. 35—43.
9. *Скороход А.В.* Теория вероятностей и случайных процессов. Киев: Высшая школа. — 1980.

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.С. Манделем.

Владимир Миронович Вишневский — д-р техн. наук, ген. директор, ✉ vishn@inbox.ru,

Андрей Алексеевич Ларионов — науч. сотрудник, ✉ larioandr@gmail.com,

Ольга Валерьевна Семенова — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник, ✉ olgasmnv@gmail.com,

Научно-производственная фирма «Информационные и сетевые технологии», г. Москва, ☎ (495) 720-51-29.