УДК 519.254

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ОДНОМЕРНЫМИ БЛОКАМИ НЕЧЕТКОГО ВЫВОДА

А.А. Усков

Предложено достаточное условие устойчивости замкнутых систем управления с одномерными блоками нечеткого логического вывода. Приведены случаи применения в системах управления наиболее распространенных алгоритмов нечеткого логического вывода Сугено — Такаги и Цукамото. Отмечено, что полученные результаты могут использоваться в инженерной практике при разработке нечетких систем управления рассматриваемого класса.

Ключевые слова: алгоритм нечеткого логического вывода, нечеткий регулятор, нечеткая система управления, асимптотическая устойчивость, критерий устойчивости.

ВВЕДЕНИЕ

Широкое распространение замкнутых систем управления с нечеткой логикой делает актуальной задачу анализа их устойчивости. Основная трудность аналитического исследования устойчивости систем управления, в которых используются блоки, реализующие алгоритмы нечеткого логического вывода (далее для краткости БНВ — блоки нечеткого вывода), определяется существенной нелинейностью характеристик данных блоков и их сложностью.

По мнению ряда специалистов, наиболее перспективные методы анализа устойчивости замкнутых систем управления с блоками нечеткого логического вывода, восходящие из идей В.М. Попова [1], базируются на применении критериев абсолютной устойчивости и гиперустойчивости [2]. Удовлетворительным результатом может быть признано получение достаточных условий устойчивости, позволяющих определять не менее 25 % истинной области устойчивости систем в пространстве параметров или переменных состояния, имеющих достаточно простой «обозримый» вид входящих в них выражений.

Настоящая статья продолжает серию работ автора [3—14], посвященных методам анализа систем управления с нечеткой логикой. В ней рассматривается достаточное условие устойчивости систем управления с одномерными БНВ, наиболее распространенными на практике благодаря простой алгоритмической реализации, с алгоритмами Сугено — Такаги (Sugeno — Takagi) [15] и Цукамото (Tsukamoto) [16], основанное на круговом критерии абсолютной устойчивости [17, 18]. Работа расширяет опубликованные ранее автором результаты, в частности, в статье [14] также рассматривались системы с одномерными блоками нечеткого вывода, но изучался лишь случай применения упрощенного алгоритма нечеткого логического вывода (алгоритма Сугено нулевого прядка) и нахождения БНВ в объекте управления. В настоящей статье эти ограничения сняты.

1. ПРОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ

Определенное распространение на практике получили системы управления с одномерными БНВ [2, 19].

Рассмотрим структурную схему системы управления (на рис. 1).

Система содержит нечеткий регулятор *НР* и объект управления *ОУ*. Линейные динамические

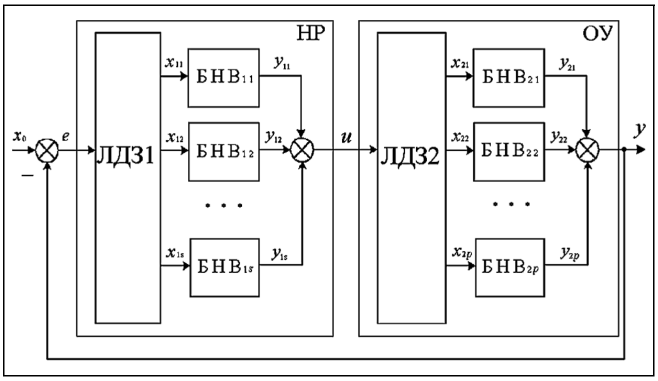

Рис. 1. Система с несколькими одномерными блоками нечеткого вывода

звенья *ЛДЗ*1 и *ЛДЗ*2 соответственно описываются импульсными передаточными функциями

$$\vec{W}_1(z) = \begin{bmatrix} W_{11}(z) \\ W_{12}(z) \\ \dots \\ W_{1s}(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{e(z)} \begin{bmatrix} x_{11}(z) \\ x_{12}(z) \\ \dots \\ x_{1s}(z) \end{bmatrix} \quad \text{и}$$

$$\vec{W}_2(z) = \begin{bmatrix} W_{21}(z) \\ W_{22}(z) \\ \dots \\ W_{2p}(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{u(z)} \begin{bmatrix} x_{21}(z) \\ x_{22}(z) \\ \dots \\ x_{2p}(z) \end{bmatrix}.$$

Блоки нечеткого вывода $БНВ_{ij}$ со скалярными входами x_{ij} и выходами y_{ij} реализуют функциональные зависимости

$$y_{ij} = y_{ij}(x_{ij}), \tag{1}$$

где i и j — индексы, соответствующие обозначениям на рис. 1 (в дальнейшем, где это не наносит ущерба ясности изложения, индексы будут опускаться).

Зависимости (1) определяются либо с помощью алгоритма нечеткого логического вывода Сугено — Такаги [15] с продукционными правилами вида

$$\Pi_r\text{: если } x \text{ есть } A_r, \text{ то } \; y = f_r(x), \tag{2}$$

в соответствии с выражением

$$y(x) = \frac{\sum\limits_{r=1}^{m} \mu_r(x) \cdot f_r(x)}{\sum\limits_{r=1}^{m} \mu_r(x)}, \tag{3}$$

где $\mu_r(x)$ — функции принадлежности нечетких множеств A_r, r — номер нечеткого продукционного правила, m — число нечетких продукционных правил, либо с помощью алгоритма нечеткого логического вывода Цукамото [16] с продукционными правилами вида

$$\Pi_r\text{: если } x \text{ есть } A_r, \text{ то } y \text{ есть } B_r, \tag{4}$$

в соответствии с выражением

$$y(x) = \frac{\sum\limits_{r=1}^{m} \mu_r(x) \cdot \omega_r^{-1}(\mu_r(x))}{\sum\limits_{r=1}^{m} \mu_r(x)}, \tag{5}$$

где $\omega_r(x)$ — функции принадлежности нечетких множеств B_r (согласно требованиям алгоритма функции $\omega_r(x)$ являются монотонными на R и, следовательно, имеют обратные функции $\omega_r^{-1}(\cdot)$).

Требуется для рассматриваемой системы определить достаточное условие асимптотической устойчивости в целом [18].

2. ХАРАКТЕРИСТИКА БЛОКОВ НЕЧЕТКОГО ЛОГИЧЕСКОГО ВЫВОДА

Далее рассмотрен подход к анализу устойчивости систем управления с БНВ, при котором нелинейность БНВ характеризуется одним параметром, что позволяет определить устойчивость для всех систем, принадлежащих заданному классу.

Предположим, что зависимость (1) является однозначной, находится в I и III квадрантах и обладает свойством: $y(0) = 0$ (в ряде случаев, добиться выполнения указанных требований удается линейным преобразованием переменных состояния).

Введем в рассмотрение коэффициент передачи БНВ, зависящий от входного сигнала x:

$$k(x) = \frac{|y(x)|}{|x|}. \tag{6}$$

Определение 1. Под максимальным коэффициентом передачи БНВ будем понимать параметр, характеризующий зависимость (6) и определяемый формулой:

$$K_H = \max_{\forall x \in R} k(x). \; \blacklozenge \tag{7}$$

Для определения максимального коэффициента передачи БНВ необходимо решить задачу одномерной безусловной оптимизации (7) с учетом выражений (3) и (6) (для алгоритма Сугено — Такаги) или (5) и (6) (для алгоритма Цукамото). При использовании современных систем компьютерной математики [20] решение данной оптимизационной задачи никаких сложностей не вызывает, кроме того, можно найти зависимости K_H от параметров функций принадлежности нечетких множеств, входящих в продукционные правила (2) и (4).

Для оценки максимального коэффициента передачи БНВ можно также воспользоваться приведенными далее теоремами.

Теорема 1. *Пусть система нечеткого логического вывода Сугено — Такаги описывается набором нечетких продукционных правил* (2)*, тогда для параметра* (7) *справедливо соотношение*:

$$K_H \le \hat{K}_H = \max\left[\max_{x \in C_1}\frac{|f_1(x)|}{|x|}, \max_{x \in C_2}\frac{|f_2(x)|}{|x|}, ..., \max_{x \in C_m}\frac{|f_m(x)|}{|x|}\right], \quad (8)$$

где C_1, C_2, ..., C_m — носители нечетких множеств A_1, A_2, ..., A_m соответственно.

Доказательство. Решая совместно уравнения (3), (6) и (7), получим:

$$K_H = \max_{x \in R}\frac{\left|\sum_{r=1}^{m} f_r(x)\cdot\mu_r(x)\right|}{|x|\cdot\left|\sum_{r=1}^{m}\mu_r(x)\right|}. \quad (9)$$

Воспользовавшись свойством модуля функции [21], из выражения (9) получим:

$$K_H \le \max_{x \in R}\frac{\sum_{r=1}^{m}|f_r(x)|\cdot\mu_r(x)}{|x|\cdot\sum_{r=1}^{m}\mu_r(x)}. \quad (10)$$

Заметим, что формула

$$\frac{\sum_{r=1}^{m}|f_r(x)|\cdot\mu_r(x)}{\sum_{r=1}^{m}\mu_r(x)} = X_C, \quad (11)$$

определяет координату центра масс X_C невесомого стержня с расположенными на нем грузами с массами $\mu_r(x)$ в точках с координатами $|f_r(x)|$ [21].

Очевидно, что координата центра масс X_C не может превышать координаты крайнего справа груза с массой, отличной от нуля. Таким образом,

$$X_C \le \max[|f_r(x)|\cdot 1_0(\mu_1(x)), |f_r(x)|\cdot 1_0(\mu_2(x)), ..., |f_r(x)|\cdot 1_0(\mu_m(x))], \quad (12)$$

где $1_0(t) = \begin{cases}1 \text{ при } t > 0,\\ 0 \text{ при } t = 0\end{cases}$ — единичная функция.

Сопоставляя соотношения (10)—(12), можно записать:

$$K_H \le \max_{x \in R}\frac{1}{|x|}\cdot\max[|f_r(x)|\cdot 1_0(\mu_1(x)), |f_r(x)|\cdot 1_0(\mu_2(x)), ..., |f_r(x)|\cdot 1_0(\mu_m(x))]. \quad (13)$$

Последнее выражение приводится к виду, дающему искомую оценку (8), что и доказывает теорему. ♦

Следствие 2.1. *Пусть в условиях теоремы 1 функции $f_r(x)$ имеют вид*:

$$f_r(x) = p_r x, \quad (14)$$

где p_r — вещественные константы, тогда

$$K_H \le \max_{r = 1, 2, ..., m}|p_r|. \quad (15)$$

Доказательство. Подстановка выражения (14) в формулу (13) дает:

$$K_H \le \max_{\vec{x} \in R}\frac{1}{|x|}\cdot\max[|p_r x|\cdot 1_0(\mu_1(x)), |p_r x|\cdot 1_0(\mu_2(x)), ..., |p_r x|\cdot 1_0(\mu_m(x))].$$

Последнее выражение приводится к виду:

$$K_H \le \max_{r = 1, 2, ..., m,\ x \in R}\frac{|p_r x|}{|x|}. \quad (16)$$

Воспользовавшись свойствами модуля функции [21] из выражения (16) можно получить неравенство (15). ♦

Следствие 2.2. *Пусть в условиях теоремы 1 функции $f_r(x)$ имеют вид*:

$$f_r(x) = w_r,$$

где w_r — вещественные константы, тогда

$$K_H \le \hat{K}_H = \max\left[\max_{x \in C_1}\frac{|w_1|}{|x|}, \max_{x \in C_2}\frac{|w_2|}{|x|}, ..., \max_{x \in C_m}\frac{|w_m|}{|x|}\right]. \ ♦ \quad (17)$$

Формула (20) ранее приводилась в работах автора [3, 4, 14].

Теорема 2. *Пусть система нечеткого логического вывода Цукамото описывается набором нечетких продукционных правил* (4)*, тогда для параметра* (7) *справедливо соотношение:*

$$K_H \le \hat{K}_H = \max\left[\max_{x \in C_1}\frac{|\omega_1^{-1}(\mu_1(x))|}{|x|}, \max_{x \in C_2}\frac{|\omega_2^{-1}(\mu_2(x))|}{|x|}, ..., \max_{x \in C_m}\frac{|\omega_m^{-1}(\mu_m(x))|}{|x|}\right], \quad (18)$$

где C_1, C_2, ..., C_m — носители нечетких множеств A_1, A_2, ..., A_m соответственно.

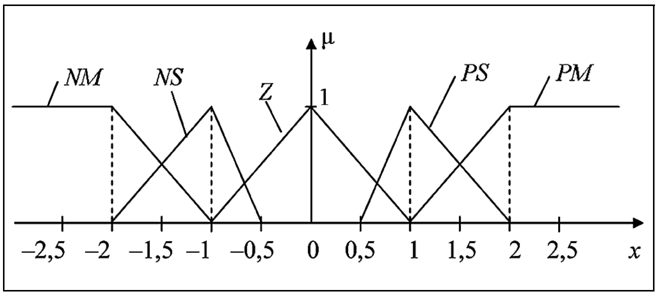

Рис. 2. Функции принадлежности нечетких множеств БНВ

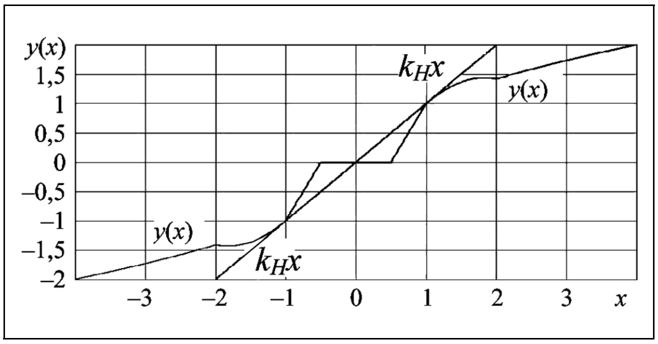

Рис. 3. Характеристика блока нечеткого вывода

Доказательство. Из сопоставления нечетких продукционных правил (2) и (4), а также соотношений (3) и (5) приходим к выражению $f_r(x) = \omega_r^{-1}(\mu_r(x))$, подставляя которое в соотношение (8), приходим к неравенству (18). ♦

Пример 1. Рассмотрим БНВ, имеющий набор нечетких продукционных правил:

$П_1$: если x есть Z, то $u = 0$;

$П_2$: если x есть PS, то $u = x$;

$П_3$: если x есть PM, то $u = x/|x|$;

$П_4$: если x есть NS, то $u = x$;

$П_5$: если x есть NM, то $u = x/|x|$.

На рис. 2 приведены функции принадлежности нечетких множеств Z, PS, PM, NS и NM.

Выходной сигнал БНВ в данном случае определяется формулой (3). Воспользуемся оценкой (8).

Для правила $П_1$ носитель нечеткого множества Z — $x \in [-1, 1]$, значение $f_1(x) = 0$, следовательно $\max\limits_{x \in C_1} \dfrac{|f_1(x)|}{|x|}$ $= = \max\limits_{x \in [-1, 1]} \dfrac{|0|}{|x|} = 0$.

Для правила $П_2$ носитель нечеткого множества PS — $x \in [0, 5, 2]$, значение $f_2(x) = x$, следовательно $\max\limits_{x \in C_2} \dfrac{|f_2(x)|}{|x|} = \max\limits_{x \in [0,5,\, 2]} \dfrac{|x|}{|x|} = 1$.

Для правила $П_3$ носитель нечеткого множества PM — $x \in [1, +\infty]$, значение $f_3(x) = x/|x|$, следовательно $\max\limits_{x \in C_3} \dfrac{|f_3(x)|}{|x|} = \max\limits_{x \in [1, +\infty]} \dfrac{|x|}{|x||x|} = 1$.

Для правила $П_4$ носитель нечеткого множества NS — $x \in [-2, -0{,}5]$, значение $f_4(x) = x$, следовательно $\max\limits_{x \in C_4} \dfrac{|f_4(x)|}{|x|} = \max\limits_{x \in [-2, -0,5]} \dfrac{|x|}{|x|} = 1$.

Для правила $П_5$ носитель нечеткого множества NM — $x \in [-1, -\infty]$, значение $f_5(x) = x/|x|$, следовательно $\max\limits_{x \in C_5} \dfrac{|f_5(x)|}{|x|} = \max\limits_{x \in [-\infty, -1]} \dfrac{|x|}{|x||x|} = 1$.

Подставляя данные частные результаты в выражение (8), получим $\hat{K}_H = \max(0, 1, 1, 1, 1, 1) = 1$.

На рис. 3 показаны зависимости $y = y(x)$ и $y = K_Hx$.

3. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим автономный режим работы системы ($x_0 = 0$), см. рис. 1. Представим структурную схему системы в виде, приведенном на рис. 4.

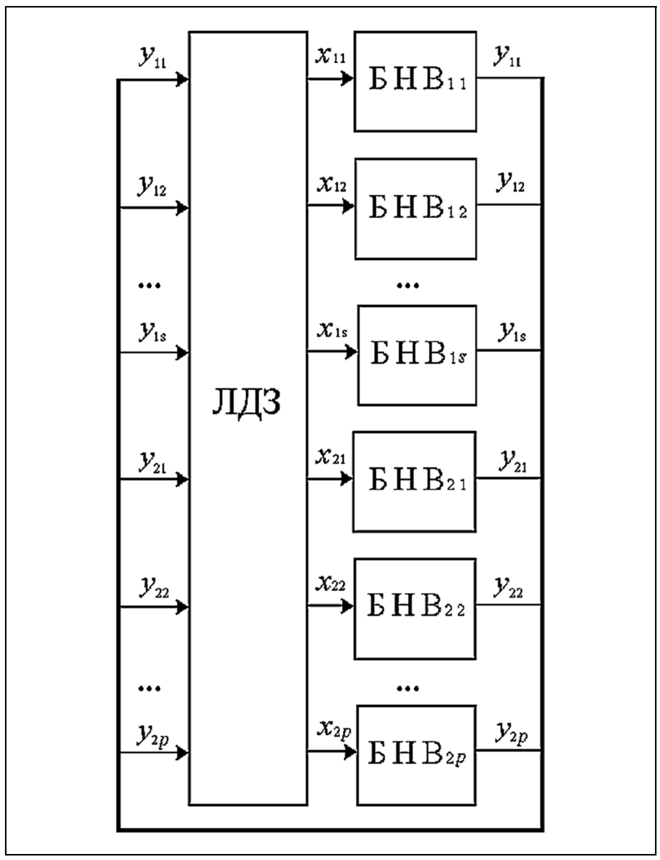

Рис. 4. Эквивалентная схема системы

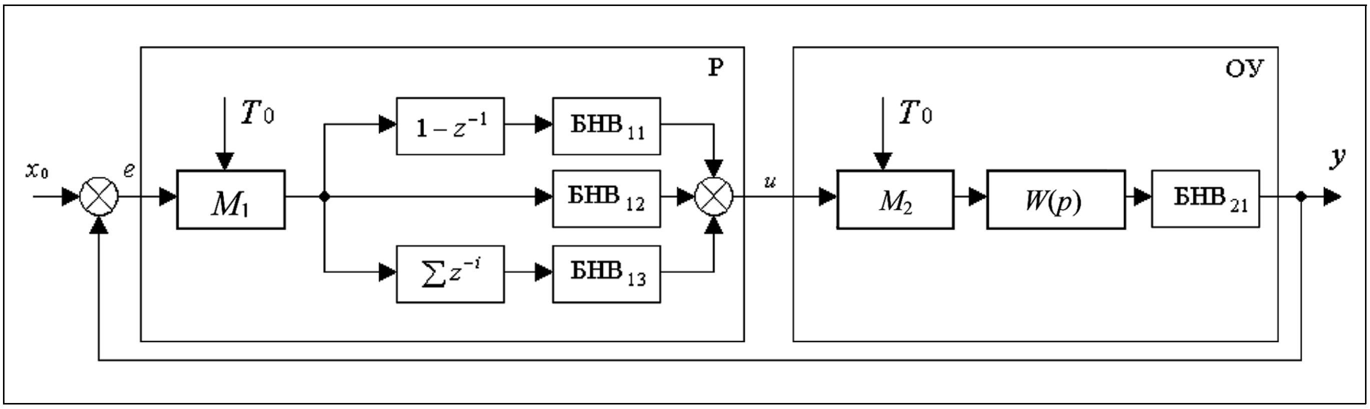

Рис. 5. Система управления с нечетким ПИД-регулятором

Линейное динамическое звено *ЛДЗ* системы описывается импульсной передаточной функцией

$$W(z) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \overbrace{\begin{matrix} -W_{11}(z) & -W_{11}(z) & \dots & -W_{11}(z) \\ -W_{12}(z) & -W_{12}(z) & \dots & -W_{12}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -W_{1s}(z) & -W_{1s}(z) & \dots & -W_{1s}(z) \end{matrix}}^{p} \\ \underbrace{\begin{matrix} W_{21}(z) & W_{21}(z) & \dots & W_{21}(z) \\ W_{22}(z) & W_{22}(z) & \dots & W_{22}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{2p}(z) & W_{2p}(z) & \dots & W_{2p}(z) \end{matrix}}_{s} & 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Допустим, что характеристики всех БНВ описываются наборами нечетких продукционных правил и находятся в I и III квадрантах. Для каждого из БНВ определены максимальные статические коэффициенты передачи, которые представлены в виде матрицы

$$K_H = \begin{bmatrix} K_{H11} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K_{H12} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & K_{H1s} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & K_{H21} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & K_{H22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & K_{H2p} \end{bmatrix}.$$

Согласно геометрическому критерию абсолютной устойчивости для импульсных систем с несколькими нелинейными блоками [17], если ЛДЗ системы (см. рис. 4) устойчиво и существует действительное число θ такое, что выполняется соотношение

$$\frac{1}{2}\left[\hat{K}_H^{\theta} \cdot W(j\bar{w}) + W(-j\bar{w}) \cdot \hat{K}_H^{\theta}\right] + K_H^{\theta-1} > 0,$$

$$0 \le \bar{w} \le \pi, \quad (20)$$

где $W(z)$ — передаточная матрица (19), $z = \exp(-j\bar{w})$, «>0» — обозначает положительную определенность матрицы; то рассматриваемая система будет асимптотически устойчива в целом.

Отметим, что области устойчивости, полученные с помощью геометрического критерия, не у́же областей, полученных с помощью второго метода Ляпунова с функцией Ляпунова в виде квадратичной формы от переменных состояния системы [17, 18].

Пример 2. Рассмотрим систему управления с нечетким ПИД-регулятором, содержащим одномерные блоки нечеткого логического вывода (рис. 5). Система с таким нечетким регулятором рассматривается в работе [19].

На рис. 5 приняты M_1 и M_2 — амплитудно-импульсные модуляторы с фиксаторами нулевого порядка, работающие синхронно и синфазно с периодом квантования T_0. Динамическое звено $W(p)$ описывается передаточной функцией $W(p) = \dfrac{k_0}{(1+pT_1)(1+pT_2)}$.

В качестве блоков нечеткого вывода $БНВ_{11}$ — $БНВ_{13}$ и $БНВ_{21}$ используются БНВ из примера 1.

Передаточная функция (19) в рассматриваемом случае принимает вид:

$$W(z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -(1-z^{-1}) \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{z}{z-1} \\ W_{21}(z) & W_{21}(z) & W_{21}(z) & 0 \end{bmatrix},$$

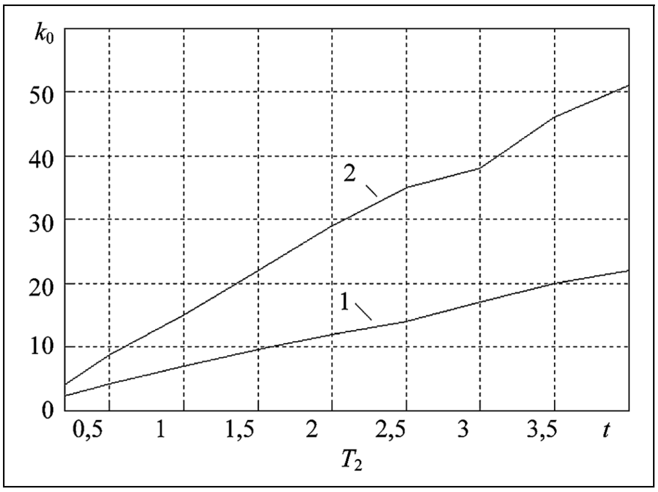

Рис. 6. Области устойчивости системы в целом

где

$$W_{21}(z) =$$
$$= \frac{[T_2 - T_1 - T_1\exp(-T_0/T_1) + T_2\exp(-T_0/T_2)]k_0 z +}{(T_1 - T_2)z^2 + [(T_2 - T_1)\exp(-T_0/T_1) +} \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{+\left[-T_1\exp\left(-\frac{T_0}{T_2}\right) + T_1\exp\left[-T_0\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}\right] +\right.}{+(T_2 - T_1)\exp(-T_0/T_2)] +} \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{\left. + T_2\exp\left(\frac{T_0}{T_1}\right) - T_2\exp\left[-T_0\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}\right]\right]k_0}{+(T_1 - T_2)\exp(-T_0/T_1)\exp(-T_0/T_2)}.$$

Достаточное условие асимптотической устойчивости в целом рассматриваемой системы определяется соотношением (20).

Приняв $\theta = 0$ (простейший случай), $K_H = 1$ (из примера 1) и $T_0 = T_1 = 0{,}1$ определим область асимптотической устойчивости в целом рассматриваемой системы, что отображено на рис. 6 (область ниже линии *1*). Для сравнения на данном рисунке показана также действительная область устойчивости системы, полученная путем численного моделирования (ниже линии *2*).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены достаточные условия асимптотической устойчивости в целом систем с одномерными блоками нечеткого логического вывода с алгоритмами Сугено — Такаги и Цукамото. Они достаточно просты и могут найти применение в инженерной практике.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов В.М.* Гиперустойчивость автоматических систем. — М.: Наука, 1970. — 456 с.
2. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление / 2-е изд. — М.: Бином; Лаборатория знаний, 2013. — 798 с.
3. *Kruglov V.V., Uskov A.A.* A sufficient stability condition for closed-loop control systems with fuzzy logic controllers // Journal of Computer and Systems Sciences International. — 2004. — № 4 (43). — P. 537—541.
4. *Круглов В.В., Усков А.А.* Достаточное условие устойчивости замкнутых систем управления с нечеткими логическими регуляторами // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2004. — № 4. — С. 47—51.
5. *Усков А.А., Круглов В.В.* Устойчивость систем с блоками нечеткого логического вывода в объекте управления // Вестник Московского энергетического института. — 2003. — № 3. — С. 108—110.
6. *Усков А.А.* Подход к анализу устойчивости систем управления с нечеткой логикой // Вестник Московского энергетического института. — 2004. — № 2. — С. 76—81.
7. *Усков А.А., Киселев Е.В.* Анализ систем управления с нечеткими комплексными моделями. I. Применение теории линейных интервальных динамических систем // Вестник Московского энергетического института. — 2004. — № 4. — С. 98—103.
8. *Усков А.А., Киселев Е.В.* Анализ систем управления с нечеткими комплексными моделями. II. Применение частотных методов // Там же. — 2004. — № 5. — С. 53—57.
9. *Усков А.А.* Устойчивость замкнутых систем управления с нечеткой логикой // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. — 2003. — № 9. — С. 8—9.
10. *Усков А.А., Киселев Е.В.* Системы управления с нечеткими супервизорными ПИД-регуляторами // Там же. — 2005. — № 9. — С. 31—33.
11. *Усков А.А., Киселев Е.В.* Системы управления с нечеткими комплексными моделями и их устойчивость // Автоматизация и современные технологии. — 2005. — № 2. — С. 45—48.
12. *Усков А.А.* Устойчивость систем управления с гибридными (нечеткими) нейронными сетями // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. — 2003. — № 3—4. — С. 23—26.
13. *Усков А.А., Круглов В.В.* Интеллектуальные системы управления на основе методов нечеткой логики. — Смоленск, 2003. — 177 с.
14. *Усков А.А.* Устойчивость систем с блоками нечеткого логического вывода в объекте управления // Управление большими системами. — 2012. — Вып. 39. — С. 155—164.
15. *Осовский С.* Нейронные сети для обработки информации. — М.: Финансы и статистика, 2002. — 344 с.
16. *Круглов В.В., Дли М.И.* Интеллектуальные информационные системы: компьютерная поддержка систем нечеткой логики и нечеткого вывода. — М.: Издательство Физматлит, 2002. — 256 с.
17. *Цыпкин Я.З., Попков Ю.С.* Теория нелинейных импульсных систем. — М.: Наука, 1973. — 416 с.
18. *Видаль П.* Нелинейные импульсные системы. — М.: Энергия, 1974. — 336 с.
19. *Интеллектуальные* системы автоматического управления / Под. ред. И.М. Макарова, В.М. Лохина. — М.: Физматлит, 2001. — 576 с.
20. *Дьяконов В.П.* Энциклопедия компьютерной алгебры. — М.: ДМК Пресс, 2009. — 1264 с.
21. *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике. — М.: АСТ. Астрель, 2006. — 991 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.Ю. Рутковским.

Усков Андрей Александрович — д-р техн. наук, профессор, Российский университет кооперации, г. Мытищи, Моск. обл., ✉prof.uskov@gmail.com.