УДК 519.83 + 519.86

DOI: http://doi.org/10.25728/pu.2019.2.3

# МЕТОДОЛОГИЯ И ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ УСТОЙЧИВЫМ РАЗВИТИЕМ АКТИВНЫХ СИСТЕМ[1]

Г.А. Угольницкий

Представлена концепция управления устойчивым развитием произвольных сложных динамических систем с участием людей (активных систем). Отмечено, что устойчивое развитие означает выполнение требований гомеостаза и системной согласованности. В основу математической формализации задач управления устойчивым развитием активных систем положен аппарат дифференциальных игр в нормальной форме, форме характеристической функции и с иерархической структурой. Даны постановки задач управления устойчивым развитием для активных систем с независимым поведением агентов, их кооперацией и иерархическим управлением. Рассмотрены частные классы моделей стимулирования и моделей сочетания общественных и частных интересов, дан обзор ряда других прикладных задач, решенных в рамках предлагаемой концепции. Приведен иллюстративный пример. Основное внимание уделено методологическим аспектам развиваемой концепции.

**Ключевые слова:** активные системы, дифференциальные игры, иерархическое управление, кооперация, устойчивое развитие.

## ВВЕДЕНИЕ

Понятие активной системы предложено В.Н. Бурковым, и его дальнейшие исследования совместно с коллегами и учениками привели к созданию теории активных систем [1—5]. Новый импульс эти исследования получили в теории управления организационными системами, развиваемой Д.А. Новиковым и его соавторами [6, 7]. Близкие подходы применяются в российской научной литературе в информационной теории иерархических систем [8, 9], а в зарубежной — в рамках теории контрактов и дизайна механизмов [10, 11].

Концепция устойчивого развития первоначально возникла при анализе воздействия человека на окружающую природную среду и изложена в огромном количестве научных и политических публикаций, например, [12—16]. В основе этой концепции лежит понятие гомеостаза, т. е. выполнения определенных требований к состоянию эколого-экономических систем на протяжении длительного времени. Математическая формализация этого понятия нашла наиболее развитое отражение в теории живучести Ж.-П. Обена [17] и работах его последователей [18, 19].

Авторская концепция управления устойчивым развитием активных систем [20—22] расширяет предметную область на произвольные сложные системы с участием людей и дополняет условие гомеостаза требованием учета интересов активных агентов, которые должны обеспечивать гомеостаз (системная согласованность). Тем самым, развиваемая теория синтезирует два указанных направления исследований. В качестве математического аппарата применяется аппарат дифференциальных игр в нормальной форме [23], в форме характеристической функции [24] и с иерархической структурой [9, 25], а также лежащие в их основе задачи оптимального управления [26, 27].

В § 1 приведены динамические задачи управления устойчивым развитием активных систем в различных постановках: независимое поведение равноправных агентов, их кооперация и метод убеждения, иерархическое управление посредством принуждения и побуждения. Здесь основное внимание уделяется методологии исследования. В § 2 рассматриваются динамические модели стимулирования как частный случай задач управления ус-

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 17-19-01038.

тойчивым развитием, дается обобщение известных результатов для статических постановок в динамической версии. В § 3 предложена постановка динамической задачи сочетания общественных и частных интересов (СОЧИ-модели). В § 4 дан обзор приложений разрабатываемой теории управления устойчивым развитием активных систем к ряду предметных областей. В § 5 рассмотрен иллюстративный пример. Итоги обсуждаются в Заключении.

## 1. КОНЦЕПЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ УСТОЙЧИВЫМ РАЗВИТИЕМ АКТИВНЫХ СИСТЕМ

Под *активной системой* понимается структурированная совокупность активных элементов. Примерами активных систем служат организационные, экономические, социальные и иные сложные динамические системы с участием людей.

*Активный элемент* (*агент*) — субъект, имеющий собственные интересы (цели) и возможности их достижения. Активный агент способен к стратегическому поведению, т. е. выбору действий, направленных на достижение цели, что может быть связано с сознательным искажением передаваемой другим активным агентам информации (манипуляцией). Примеры активных агентов с учетом принципа системной относительности: предприниматель, фирма, избиратель, партия, муниципальное образование, страна, член семьи и др.

Активные агенты действуют в соответствии с собственными интересами. Наряду с этим, существуют цели и требования, важные для активной системы в целом, но совсем не обязательно совпадающие с интересами отдельных агентов. Эти условия назовем *гомеостазом* активной системы. Например, расположенное на берегу водного объекта предприятие заинтересовано в максимизации прибыли, а не в соблюдении экологических требований к состоянию этого объекта. Сотрудник организации в большей степени заинтересован в повышении зарплаты и экономии усилий, чем в достижении долгосрочных целей развития этой организации. Поэтому обычно возникает *Центр (принципал, ведущий)* — выделенный активный элемент, выражающий интересы активной системы в целом и отвечающий за выполнение условий гомеостаза. Примеры: правительство (парламент, президент) страны, руководство организации, администрация региона, партийный лидер, глава семьи и др.

Анализ проблемы управления устойчивым развитием активных систем позволяет сформулировать следующие эмпирические принципы.

- *Принцип экономической рациональности:* интересы каждого активного агента, в том числе Центра, целиком и полностью характеризуются стремлением к максимизации выигрыша с учетом имеющихся ограничений. Отметим, что ряд авторов (Д. Канеман и А. Тверски, Г. Саймон и др.) развивают более общую концепцию ограниченной рациональности, учитывающую неполноту информации принимающего решения субъекта и ряд других факторов.
- *Принцип ответственности Центра:* главная цель Центра заключается в обеспечении условий гомеостаза, при этом он может иметь дополнительные частные интересы.
- *Принцип необходимости управления:* в общем случае интересы отдельных агентов не совпадают с требованиями гомеостаза.

Основная трудность обеспечения гомеостаза состоит именно в том, что активные агенты далеко не всегда заинтересованы в выполнении его условий, в силу чего формулирование требований гомеостаза в официальных документах по устойчивому развитию остается простой декларацией. Поэтому устойчивое развитие наряду с условиями гомеостаза обязательно должно предполагать учет интересов обеспечивающих его активных агентов (системную согласованность). Совместное выполнение условий гомеостаза и системной согласованности и означает *устойчивое развитие* активной системы.

Идеальным способом достижения устойчивого развития выступает *убеждение* — добровольная и осознанная интериоризация требований гомеостаза всеми агентами. Примерами убеждения могут служить экологическое сознание, социально ответственный бизнес, благотворительность, волонтерство, разоружение и др.

Однако на практике убеждение пока остается в основном делом будущего, поэтому приходится применять иерархическое управление Центра путем принуждения и/или побуждения. *Принуждение* включает в себя административно-законодательные механизмы управления, явно ограничивающие множества возможных действий агентов так, чтобы они не могли нарушить гомеостаз. *Побуждение* состоит в использовании экономических механизмов, делающие желательные для Центра гомеостатические действия более выгодными для агентов.

Рассмотрим постановки задач управления устойчивым развитием с применением методов принуждения, побуждения и убеждения для активных систем различной структуры.

### 1.1. Независимое поведение равноправных агентов

В исходной модели множество независимых агентов одновременно и независимо друг от друга воздействуют на некоторый динамический объект в своих интересах. Вместе с тем, существуют объективные требования (условия гомеостаза), которым должно удовлетворять состояние объекта в смысле активной системы в целом. Такая ситуация формализуется как дифференциальная игра нескольких лиц в нормальной форме вида

$$J_i(u(\cdot)) = \int_0^\infty e^{-\rho t} g_i(x(t),\ u(t),\ t)dt \to \max; \quad (1)$$

$$u_i(t) \in U_i, \quad i \in N; \quad (2)$$

$$\dot{x} = f(x(t),\ u(t),\ t), \quad x(0) = x_0. \quad (3)$$

Здесь $N = \{1, ..., n\}$ — множество активных агентов; $g_i$ и $J_i$ — мгновенная функция и интегральный функционал выигрыша агента $i \in N$; $u_i(t)$ — управляющее действие (управление) агента $i \in N$ в момент $t$; $U_i$ — множество допустимых управлений агента $i \in N$; $u(t) = (u_1(t), ..., u_n(t))$ — набор управляющих воздействий агентов; $U = U_1 \times ... \times U_n$; $x(t)$ — значение переменной состояния в момент $t$; $x_0$ — начальное состояние; $f$ — заданная функция, определяющая изменение состояния во времени; $\rho \in [0, 1]$ — коэффициент дисконтирования. В общем случае фазовая переменная и управление могут быть векторными величинами. Бесконечный период времени более адекватен для концепции устойчивого развития, хотя возможны и постановки при $T < \infty$. Предполагаются выполненными условия [8]: множества $U_i$ компактны в соответствующих векторных пространствах; вектор-функция $f$ непрерывна по $t$ и непрерывно дифференцируема по остальным параметрам; существует константа $\kappa > 0$ такая, что при любых $x$, $t \ge 0$, $u \in U$ имеет место неравенство $\|f(x,\ u,\ t) \le \kappa(1 + \|x\|)$; функции $g_i$ непрерывны по всем аргументам; классам допустимых позиционных стратегий принадлежат кусочно-непрерывные по $t$ и гладкие по $x$ при всех $t \ge 0$ функции, удовлетворяющие ограничению (2).

Условие гомеостаза можно записать в виде

$$x(t) \in X^* \subseteq R^n, \quad t \in [0, \infty). \quad (4)$$

Подчеркнем, что в исходной постановке условие (4) внешнее для множества агентов, поэтому изначально модель нельзя рассматривать как дифференциальную игру (1)—(3) с дополнительными фазовыми ограничениями (4).

Будем считать решением игры (1)—(3) множество равновесий Нэша $NE$, считая $NE \ne \varnothing$ (иначе нечего обсуждать). В частности, $NE \ne \varnothing$, если множества $U_i$ выпуклы и компактны, а функции $g_i(u_i,\ u_{-i})$ вогнуты по $u_i$ на множествах $U_i$ для всех $u_{-i} \in U_{-i}$, $i \in N$, где $u_{-i} = (u_1, ..., u_{i-1}, u_{i+1}, ..., u_n)$, $U_{-i} = U_1 \times ... \times U_{i-1} \times U_{i+1} \times ... \times U_n$.

Обозначим $U^* = \{u \in U{:}\ \forall t\ x(t) \in X^*\}$ — множество управлений, обеспечивающих гомеостаз, и вновь предположим, что $U^* \ne \varnothing$, иначе рассмотрение теряет смысл.

Если $U_{DG} = NE \cap U^* \ne \varnothing$, то задача управления устойчивым развитием (1)—(4) имеет решение. Управления $u \in U_{DG}$ обеспечивают гомеостаз, при этом интересы агентов также учитываются через равновесие Нэша в их игре.

Для более детального анализа проблемы согласования интересов введем функционал общественного благосостояния

$$J(u(\cdot)) = \sum_{i \in N} J_i(u(\cdot)).$$

Тогда, если выполняется условие

$$\forall u^{NE} \in NE \backslash U_{DG}\ \exists u \in U_{DG}{:}\ J(u) \ge J(u^{NE}), \quad (5)$$

то требования гомеостаза (4) полностью совместимы с общественным благосостоянием. Если же верно противоположное утверждение

$$\exists u^{NE} \in NE \backslash U_{DG}\ \forall u \in U_{DG}{:}\ J(u) < J(u^{NE}), \quad (6)$$

то требования гомеостаза не полностью совместимы с общественным благосостоянием. Далее, если справедливо утверждение

$$\forall i \in N\ \forall u^{NE} \in NE \backslash U_{DG}\ \exists u \in U_{DG}{:}\ J_i(u) \ge J_i(u^{NE}), \quad (7)$$

то требования гомеостаза полностью совместимы с частными интересами всех агентов, а если верно противоположное утверждение

$$\exists i \in N\ \exists u^{NE} \in NE \backslash U_{DG}\ \forall u \in U_{DG}{:}\ J_i(u) < J_i(u^{NE}), \quad (8)$$

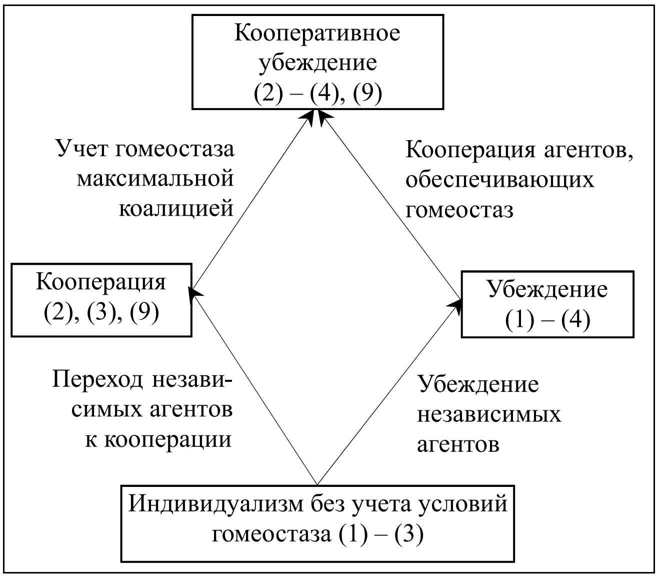
то требования гомеостаза несовместимы с частными интересами некоторых агентов. Очевидно, что (7) $\to$ (5), (6) $\to$ (8).

Если $U_{DG} = NE \cap U^* = \varnothing$, то задача управления устойчивым развитием (1)—(4) в исходной постановке неразрешима.

Если $U_{DG} \ne \varnothing$, но справедливо утверждение (6) или хотя бы утверждение (8), то задача разрешима, но общественное благосостояние в целом или, по крайней мере, интересы некоторых агентов при выполнении условий гомеостаза пострадают. В этих случаях возможны два способа изменения постановки задачи, рассмотренные в п. 1.2 и 1.3.

### 1.2. Кооперация агентов и метод убеждения

Независимые агенты могут вступить в кооперацию, образовать коалицию и совместно максимизировать суммарный функционал выигрыша (общественное благосостояние) по всем управляющим переменным. Тогда вместо дифференци-




**Пути модификации исходной модели управления устойчивым развитием**

альной игры в нормальной форме (1)—(3) возникает задача оптимального управления

$$J(u(\cdot)) \to \max \tag{9}$$

с ограничениями (2), (3).

Введем множество $\bar{U} = \operatorname{Arg}\max\limits_{u(\cdot)\in U} J(u(\cdot))$. Если $U_{OC} = U^* \cap \bar{U} \ne \varnothing$, то задача управления устойчивым развитием активных систем в кооперативной постановке имеет решение. Заметим, что здесь всегда $U_{OC} \ne \varnothing \Rightarrow \forall \bar{u} \in \bar{U} \setminus U_{OC}\ \exists u \in U_{OC}$: $J(u) = J(\bar{u})$, т. е. условие $U_{OC} \ne \varnothing$ обеспечивает согласованность гомеостаза с общественным благосостоянием.

Метод убеждения заключается в том, что все агенты добровольно и осознанно соглашаются обеспечивать условие гомеостаза (4). В этом и только в этом случае задача управления устойчивым развитием активных систем при независимых агентах описывается дифференциальной игрой в нормальной форме с фазовыми ограничениями (1)—(4).

Наконец, возможен комплексный вариант, при котором агенты кооперируются и соглашаются обеспечивать условие гомеостаза (4). Тогда для максимальной коалиции агентов возникает задача оптимального управления (9) с фазовыми ограничениями (2)—(4). Указанные пути модификации исходной модели представлены на рисунке.

При кооперации агентов возникает дополнительная задача распределения выигрыша максимальной коалиции между игроками. Она решается путем построения дифференциальной игры в форме характеристической функции на основе исходной дифференциальной игры, выбора некоторого кооперативного принципа оптимальности ($C$-ядро, вектор Шепли и др.) и обеспечения динамической устойчивости этого решения с помощью предложенной Л.А. Петросяном процедуры распределения дележа [24].

### 1.3. Иерархическое управление для достижения устойчивого развития

Если задача управления в исходной постановке неразрешима, а метод убеждения на практике неприменим, то вводится Центр, основная цель которого — обеспечение гомеостаза посредством воздействия на множества допустимых управлений агентов (принуждение) или их функционалы выигрыша (побуждение). В этом случае возникает иерархическая дифференциальная игра

$$J_0(p(\cdot),\, q(\cdot),\, u(\cdot)) =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\rho t} g_0(x(t),\, p(t),\, q(t),\, u(t),\, t)dt \to \max, \tag{10}$$

$$p(t) \in P, \quad q(t) \in Q; \tag{11}$$

$$J_i(p(\cdot),\, q(\cdot),\, u(\cdot)) =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\rho t} g_i(x(t),\, p_i(t),\, u(t),\, t)dt \to \max, \tag{12}$$

$$u_i(t) \in U_i(q_i(t)), \quad i \in N, \tag{13}$$

в силу ограничений (3) и (4). Здесь $g_0$ и $J_0$ — мгновенная функция и интегральный функционал выигрыша Центра; $p(t) = (p_1(t), \ldots, p_n(t))$ — вектор управлений побуждения; $q(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t))$ — вектор управлений принуждения. Важно, что в данном случае модель представляет собой дифференциальную игру с фазовыми ограничениями, поскольку выполнение условия гомеостаза (4) есть основная цель Центра. Отметим также, что теперь множество равновесий Нэша в игре агентов есть $NE(p, q)$, так как решения зависят от действий Центра. Предполагаются выполненными те же математические требования, что и для модели (1)—(3).

Введем множества управлений агентов:

$U^{\max} = \operatorname{Arg}\max\limits_{p\in P,\, q\in Q}\ \max\limits_{u\in NE(p,q)} J_0(p, q, u)$ — доставляющих глобальный максимум функционалу выигрыша Центра;

$U_{NE}^{\max} = \operatorname{Arg}\max\limits_{p\in P,\, q\in Q}\ \max\limits_{u\in NE(p,q)} J_0(p, q, u)$ — обеспечивающих согласование интересов агентов с интересами Центра без учета гомеостаза;

$U_{\max}^{*} = \operatorname{Arg}\max\limits_{p\in P,\, q\in Q}\ \max\limits_{u\in U^*} J_0(p, q, u)$ — обеспечивающих гомеостаз при учете интересов Центра, но не агентов;

$U^*_{NE}(p, q) = NE(p, q) \cap U^*$ — обеспечивающих гомеостаз при учете интересов агентов, но не Центра;

$U_{HDG}(p, q) = U^{\max}_{NE} \cap U^*_{\max} \cap U^*_{NE}(p, q)$ — обеспечивающих гомеостаз при полной системной согласованности интересов.

Если $\exists(p, q) \in P \times Q$: $U_{HDG} \neq \varnothing$, то задача управления устойчивым развитием (3), (4), (10)—(13) имеет решение в иерархической постановке. Непустота множеств $U^*_{\max}$, $U^*_{NE}(p, q)$ дает теоретическую возможность решения задачи, но на практике эта возможность сомнительна, поскольку не учитываются либо интересы агентов, либо интересы Центра.

Остановимся на некоторых моментах, связанных с описанной концепцией.

**Методы решения задачи управления устойчивым развитием.** К *аналитическим* методам решения дифференциальных игр относятся принцип максимума Понтрягина и применение уравнений Гамильтона — Якоби — Беллмана [23—27]. Эти методы позволяют найти решение игры (равновесие Нэша или Штакельберга) в явном виде, но в силу высокой сложности задачи они реально применимы лишь для ограниченных классов игр (например, линейных по состоянию, линейно-квадратических и т. п.). Для иерархических дифференциальных игр в работе [9] предложен метод нахождения ε-оптимальной гарантирующей стратегии Центра, основанный на применении поощрения агентов, когда они выбирают желательные для него стратегии, и наказания в противном случае, что обобщает известную теорему Гермейера для статической модели [8]. Однако этот метод требует дополнительной модификации для случая нескольких агентов с учетом требований гомеостаза, предложенной в работе [28]. В зарубежной литературе близкий подход связан с применением триггерных стратегий [23].

В общем случае для решения задачи управления устойчивым развитием по сравнению с аналитическими методами более эффективны *численные методы и имитационное моделирование.* В статье [29] рассматривается применение алгоритмов эволюционного моделирования для решения задач распределения ресурсов в организационных системах. Особенности предлагаемого подхода:

— явно описывается динамика ресурса в зависимости от управления Центра;

— Центр распределяет ресурс между агентами пропорционально их действиям, что побуждает агентов к выбору более напряженного плана;

— управление Центра не может меняться резко, что формализуется как липшицево свойство функции управления; представляется, что это предположение выполняется для большинства реальных организационно-экономических систем;

— на основе предыдущей гипотезы разрабатывается генетический алгоритм нахождения оптимальной стратегии Центра в иерархической дифференциальной игре.

В работе [30] описан метод качественно репрезентативных сценариев (КРС) имитационного моделирования, который состоит в следующем. Обозначим в модели (10)—(13) через $v(t)$ вектор управляющих воздействий Центра (принуждения $q(t)$ или побуждения $p(t)$). Пусть $\Omega = V_1 \times \ldots \times V_n \times U_1 \times \ldots \times U_n$ — множество исходов игры. Метод КРС исходит из предположения $U_i = U_i^{QRS}$, $V_i = V_i^{QRS}$ $\forall i = 1, 2, \ldots, n$, где множества $U_i^{QRS}$ и $V_i^{QRS}$ содержат качественно репрезентативные стратегии агента $i$ и Центра по отношению к агенту $i$ соответственно. Предположим дополнительно, что мощность множеств $V_i^{QRS}$ и $U_i^{QRS}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, достаточно мала, так что они содержат по $K$ элементов, т. е. $|U_i^{QRS}| = |V_i^{QRS}| = K$. Тогда $V_1^{QRS} \times \ldots \times V_n^{QRS} \times U_1^{QRS} \times \ldots \times U_n^{QRS} = QRS$ есть множество КРС данной игры, которое включает в себя $m = |QRS| = \prod_{i=1}^{n} |V_i^{QRS}| |U_i^{QRS}| = K^{2n}$ элементов. Каждый репрезентативный сценарий игры $(v, u)^{(k)} \in QRS$, $k = 1, 2, \ldots, m$, имеет вид:

$$(v, u)^{(k)} = (v_1^{(k)}, v_2^{(k)}, \ldots, v_n^{(k)}, u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, \ldots, u_n^{(k)});$$

$$v_i^{(k)} \in V_i^{QRS}; \quad u_i^{(k)} \in U_i^{QRS}; \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

**Определение.** Множество $QRS = \{(v, u)^{(1)}, (v, u)^{(2)}, \ldots, (v, u)^{(m)}\}$ называется *множеством КРС иерархической дифференциальной игры с точностью* $\Delta$, если:

(а) для любых двух элементов этого множества $(v, u)^{(i)}, (v, u)^{(j)} \in QRS$ справедливо

$$|J_0^{(i)} - J_0^{(j)}| / J_0^{\max} > \Delta;$$

(б) для любого другого элемента $(v, u)^{(l)} \notin QRS$ найдется элемент $(v, u)^{(j)} \in QRS$ такой, что $|J_0^{(l)} - J_0^{(j)}| / J_0^{\max} \leq \Delta$. ♦

Здесь $J_0^{(i)}$, $J_0^{(j)}$, $J_0^{(l)}$ — соответствующие выигрыши Центра (в смысле выражения (10)); $J_0^{(s)} = J_0(v_1^{(s)}, v_2^{(s)}, \ldots, v_n^{(s)}, u_1^{(s)}, u_2^{(s)}, \ldots, u_n^{(s)})$, $s = i, j, l$; $J_0^{\max}$ — глобальный максимум функционала выигрыша Центра (10) на множестве КРС игры по $2n$ функциям $v_i \in V_i^{QRS}$; $u_i \in U_i^{QRS}$; $i = 1, 2, ..., n$; $\Delta > 0$ — константа, определяющая точность. Таким образом, КРС ведут к существенному различию в выигрышах Центра, а различие между одним из репрезентативных и любым другим сценарием в этом смысле несущественно. Метод КРС эвристический, выбирать сценарии следует, исходя из специфики конкретной задачи таким образом, чтобы выполнялось приведенное определение.

**Информационные регламенты дифференциальных игр** определяются следующими парами классификационных признаков:

— программные стратегии $v(t) = \varphi(t)$ или позиционные стратегии $v(t) = \varphi(t, x(t))$;

— стратегии без обратной связи по управлению $v(t) = \varphi(t)$ или с таковой: $v(t) = \varphi(t, u(t))$. В первом случае возникают игры Гермейера типа $\Gamma_{1t}$ или $\Gamma_{1x}$ (игры Штакельберга), во втором — игры Гермейера типа $\Gamma_{2t}$ или $\Gamma_{2x}$ (обратные игры Штакельберга) [9, 31];

— принуждение $v(t) = q(t)$ или побуждение $v(t) = p(t)$;

— детерминированная или стохастическая модель.

**Индекс системной согласованности.** Условия согласованности интересов (5), (7) можно проверять в более слабой форме с помощью индекса системной согласованности

$$SCI = J_0^{\max} - J_0^{NE},$$

где $J_0^{\max} = \max\limits_{p \in P, q \in Q} \max\limits_{u \in U(q)} J_0(p, q, u)$,

$J_0^{NE} = \max\limits_{p \in P, q \in Q} \max\limits_{u \in NE(p, q)} J_0(p, q, u)$.

Тогда системная согласованность имеет место при $SCI = 0$. Условие $SCI \approx 0$ говорит о некотором приближении к системной согласованности.

**Некоторые частные типы Центра.** Иногда при решении задачи (3), (4), (10)—(13) удобно выделять:

— бескорыстный Центр $J_0(\cdot) \equiv J_0$, заинтересованный только в обеспечении условия гомеостаза (4). Тогда множество $U^{\max}$ не нужно и остается проверка условия $\exists(p, q) \in P\times Q$: $U(p, q) \neq \varnothing$;

— максимизирующий общественное благосостояние Центр $J_0(\cdot) = J(\cdot) = \sum\limits_{i \in N} J_i(u(\cdot))$. Тогда интересы Центра и агентов сонаправлены.

## 2. ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СТИМУЛИРОВАНИЯ

Частным случаем задачи управления устойчивым развитием можно считать модель стимулирования

$$J_0 = \int\limits_0^{\infty} e^{-\rho t}\left[H(x(t), u(t)) - \sum_{i \in N} p_i(x(t), u(t))\right]dt \to \max_{p(\cdot)},$$

$$J_i = \int\limits_0^{\infty} e^{-\rho t}[p_i(x(t), u(t)) - h_i(x(t), u(t))] \to \max_{u_i(\cdot)}, \quad i \in N,$$

в силу ограничений (3) и (4), где $H(x, u)$ — функция дохода Центра, возрастающая и вогнутая по обоим аргументам, $H(0, 0) = 0$; $h_i(x, u)$ — функция затрат $i$-го агента, возрастающая и выпуклая по обоим аргументам, $h_i(x, u) = 0$; $p_i(x, u)$ — неотрицательная функция компенсации затрат агента Центром, $J_0$, $J_i$ — функционалы выигрыша Центра и агента соответственно.

Исходя из результата, полученного в работе [6] для статической модели стимулирования, естественно ожидать, что оптимальный механизм стимулирования должен иметь вид

$$p_i^*(x^*(t), u^*(t)) = \begin{cases} h_i(x^*(t), u_i^*(t), u_{-i}(t)) + \varepsilon_i(t), & u_i(t) = u_i^*(t), \\ 0, & \text{иначе}, \quad i \in N, \end{cases}$$

где $u^*(t)$ — решение вспомогательной задачи оптимального управления

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\rho t}\left[H(x(t), u(t)) - \sum_{i \in N} h_i(x(t), u(t))\right]dt \to \max$$

в силу ограничений (2)—(4), $\varepsilon_i(t)$ — неотрицательная мотивирующая надбавка $i$-му агенту как функция времени.

Пока в работе [32] изучена динамическая версия базовой задачи стимулирования «Центр — агент» на бесконечном периоде с дискретным временем и функционалами выигрыша Центра и агента в виде математических ожиданий. Показано, что ε-оптимальная стратегия Центра основана на решении задачи оптимального управления с целевым функционалом, равным разности функций дохода ведущего (Центра) и затрат ведомого, т. е. действительно получено непосредственное обобщение соответствующего результата для статической модели стимулирования [6]. При этом в доказательстве явно не используется построение механизма поощрения-наказания, как в статье [33] или работах из обзора [34]. Теорема первоначально доказана для полунепрерывных сверху функций и затем распространена на универсально измеримые функции. Отметим, что ε-добавка в определении найденной ε-оптимальной стратегии Центра может трактоваться как мотивирующая надбавка, которая тем больше, чем ниже дальновидность исполнителя.

## 3. ДИНАМИЧЕСКИЕ СОЧИ-МОДЕЛИ

Представляет интерес динамическое обобщение моделей сочетания общественных и частных интересов (СОЧИ-моделей) [35, 36] с учетом требований гомеостаза. В статической версии модели агенты распределяют имеющиеся у них ресурсы $r_i > 0$ между инвестициями в производство некоторого общественного блага в размере $0 \le u_i \le r_i$ и частной деятельностью в размере соответственно $r_i - u_i$. Частная деятельность приносит агенту доход в размере $p_i(r_i - u_i)$, а совокупные инвестиции всех агентов влекут производство общественного блага в объеме $c(u_1, ..., u_n)$, из которого потом агент получает долю $s_i c(u_1, ..., u_n)$, $0 \le s_i \le 1$, $i \in N$. Таким образом, функция выигрыша агента есть $g_i(u) = p_i(r_i - u_i) + s_i c(u)$, $u = (u_1, ..., u_n)$.

Динамическая СОЧИ-модель управления устойчивым развитием имеет вид

$$J_0 = \int_0^{\infty} e^{-\rho t}[s_0(t)x(t) - D(q(t))]dt \to \max, \quad (14)$$

$$\sum_{i=0}^{n} s_i(t) = 1, \quad s_i(t) \ge 0, \quad 0 \le q_i(t) \le r_i, \quad i \in N; \quad (15)$$

$$J_i = \int_0^{\infty} e^{-\rho t}[p_i(r_i - u_i(t)) + s_i(t)x(t)]dt \to \max, \quad (16)$$

$$q_i(t) \le u_i(t) \le r_i, \quad i \in N; \quad (17)$$

$$\dot{x} = c(u(t)) - \mu x(t), \quad x(0) = x_0 \quad (18)$$

с учетом требования гомеостаза (4).

Здесь $q(t) = (q_1(t), ..., q_n(t))$; $u(t) = (u_1(t), ..., u_n(t))$; $q_i(t)$ — управление принуждения Центра, ограничивающее снизу индивидуализм $i$-го агента; $D(q)$ — возрастающая выпуклая функция затрат Центра на принуждение, $D(0) = 0$; $s_i(t)$ — управление побуждения Центра (доля соответствующего агента или самого Центра при $i = 0$ в общественном благе); $x$ — величина общественного блага (переменная состояния); $\mu$ — коэффициент амортизации общественного блага. Более адекватна, но и более сложна версия модели (14)—(18) с динамическими ресурсами, когда $r_i = r_i(t)$, $\dot{r}_i = k_i g_i(x(t), u(t))$, $r_i(0) = r_{i0}$, $k_i \ge 0$ — заданная константа или $k_i = k_i(t)$, $0 \le k_i \le 1$ — еще одно управление агента, $i \in N$. Для решения поставленных задач целесообразно воспользоваться численными методами и имитационным моделированием.

## 4. ДРУГИЕ ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

Изложенная концепция управления устойчивым развитием активных систем применена к решению прикладных задач в ряде различных предметных областей. Задачи управления на сетях [37—39] развиты применительно к маркетингу с учетом требований устойчивого развития в статье [40].

В работах [41, 42] построена статическая трехуровневая теоретико-игровая модель системы контроля водяного балласта судов. Применяются методы иерархического управления (побуждение и принуждение) при одновременном учете условий поддержания системы в заданном состоянии. Проводится сравнение результатов исследования модели в смысле игр Гермейера $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$. Приведены примеры численных расчетов в ряде характерных случаев.

В статье [43] представлена математическая модель, описывающая деятельность субъектов вертикальной маркетинговой системы с учетом экологических требований. В роли субъектов управления выступают: производитель, посредник, с которым у производителя заключен договор комиссии, и торговое предприятие, реализующее в розничной сети продукцию производителя. Предполагается, что основная цель производителя состоит в выполнении экологических требований. Предложен алгоритм построения равновесия Штакельберга в игре трех лиц с учетом требования гомеостаза экологической подсистемы. В качестве метода иерархического управления применяется метод побуждения. Приведен ряд характерных примеров с последующей интерпретацией полученных результатов.

Построению и исследованию дифференциально-игровой модели предотвращения заморов в мелководных водоемах посвящена статья [44]. Предложены алгоритмы исследования модели в случае информационных регламентов динамических игр Гермейера $\Gamma_{1x}$ и $\Gamma_{2x}$. Задача решается численно с помощью разработанного параллельного алгоритма, учитывающего архитектуру супер-ЭВМ с распределенной памятью. Предлагаемый алгоритм численного решения поставленной задачи на супер-ЭВМ с помощью метода $k$-средних позволяет существенно сократить время работы программного комплекса, численно реализующего модельную задачу динамики взаимодействующих популяций в Азовском море. Разработанные модели применяются для прогнозирования изменения биомассы биологических популяций в мелководных водоемах с учетом требований устойчивого развития.

Статья [45] демонстрирует применение концепции управления устойчивым развитием борьбы с эвтрофикацией мелководных водоемов (на примере Азовского моря). Динамика состояния водоема описывается уравнениями в частных производных, которые решаются численно методом конечных разностей. Решается динамическая задача минимизации затрат на поддержание экосистемы водоема в заданном состоянии, которое интерпретируется как требование гомеостаза. Приведены примеры численных расчетов, проведен анализ полученных результатов.

Динамические теоретико-игровые модели двухуровневых систем управления с учетом условий устойчивого развития исследуются в статье [46]. В качестве механизмов иерархического управления рассматриваются методы принуждения и побуждения. Даны определения равновесий и приведены алгоритмы их построения на основе имитационного моделирования для различных информационных регламентов. Проведен сравнительный анализ эффективности указанных механизмов управления для модели экосистемы мелководного водоема (на примере Азовского моря).

Статья [47] посвящена исследованию динамических СОЧИ-моделей с помощью метода имитационного моделирования. Для игр Гермейера описаны и реализованы следующие регламенты иерархического управления: программные стратегии, побуждение; программные стратегии, принуждение; программные и позиционные стратегии, побуждение; программные и позиционные стратегии, принуждение.

Исследована двухуровневая модель оптимального рыболовства при неопределенности параметров в статье [48]. Изучен случай двух иерархически упорядоченных агентов: государства (регулятор) и рыболовного предприятия (рыбак). Регулятор считается дальновидным, а рыбак — близоруким. Динамика рыбной популяции описана нелинейным разностным уравнением. Предполагается, что это уравнение и функция выигрыша рыбака содержат параметры, неизвестные регулятору. Доказано, что функция значения этой задачи удовлетворяет уравнению Айзекса — Беллмана, описана оптимальная стратегия регулятора. Приведены два иллюстративных примера.

В статье [49] рассматривается применение системного подхода к управлению устойчивым развитием региона на базе теоретико-игровых моделей и информационных технологий. Определяется понятие региональной активной системы. Понятие устойчивого развития региона дополняется требованием системной согласованности. Устойчивое развитие означает, что хозяйственная деятельность должна обеспечивать достаточно высокие значения социально-экономических индикаторов, не нарушая в то же время требований экологического равновесия. Формально, все показатели состояния региональной социо-эколого-экономической системы должны находиться в заданных диапазонах. В свою очередь, системная согласованность означает, что при достижении своих целей Центр должен максимально учитывать интересы активных агентов. Для количественной оценки системной согласованности применяется соответствующий индекс. Описаны административные и экономические механизмы управления, обеспечивающие системную согласованность.

В работах [50, 51] исследуется задача управления, которая заключается в распределении двумя соседними субъектами средств между развитием своей и общей (трансграничной) территории. Для координации деятельности вводится специальный орган управления (координатор, Центр). Экономический механизм исследуется в двух вариантах (управление долей участия в доходе от развития общей территории и распределение ресурса). Приводится детальный анализ указанных механизмов, а также организационно-экономическая интерпретация для конкретных задач территориального управления.

Динамические СОЧИ-модели инновационного развития корпорации исследуются в статье [52]. Динамика системы описывается нелинейным разностным уравнением. Для исследования предложенной модели инновационного развития применяются имитация и метод перебора областей допустимых управлений субъектов с некоторым шагом. Основной результат работы — сравнительный анализ эффективности методов иерархического управления для информационных регламентов Штакельберга/Гермейера при принуждении/побуждении (четыре регламента) с помощью индексов системной согласованности. Относительно информационного регламента иерархической игры приняты предположения: все игроки применяют программные стратегии; ведущий выбирает и сообщает ведомым экономические либо административные управления, которые могут быть только функциями времени (игры Гермейера $\Gamma_{1t}$) либо зависеть также от управлений ведомых (игры Гермейера $\Gamma_{2t}$); при известных стратегиях ведущего ведомые одновременно и независимо выбирают свои стратегии, что приводит к равновесию Нэша в игре ведомых. За конечное число итераций предложенный алгоритм имитационного моделирования позволяет построить приближенное решение модели или сделать вывод, что равновесия не существует. Достоверность и эффективность предложенного алгоритма следуют из свойств методов сценариев и прямого упорядоченного перебора с постоянным шагом. Предлагаемая модель носит универсальный характер и может быть полезна для научно обоснованной поддержки программ инвестиционного развития компаний всех отраслей экономики. Специфика конкретной компании учитывается в ходе идентификации модели. Получен ряд содержательных выводов относительно сравнительной эффективности методов иерархического управления инновациями.

В работах [53, 54] описывается междисциплинарная методология исследования социального партнерства на примере дополнительного профессионального образования. Математический аппарат дифференциальных игр позволяет провести количественный сравнительный анализ эффективности различных способов организации социального партнерства (изоляция, иерархия, кооперация), учесть необходимость согласования частных и общественных интересов. Обсуждаются методика идентификации математических моделей с учетом данных социологических опросов и сценарный подход к решению дифференциальных игр на базе компьютерной имитации.

## 5. ПРИМЕР

Рассмотрим упрощенный пример, иллюстрирующий введенные в статье понятия. Пусть имеется множество $N = \{1, ..., n\}$ агентов-природопользователей, для определенности эксплуатирующих рыбную популяцию. Динамика популяции с учетом вылова описывается уравнением

$$\dot{x} = \left[a - \sum_{j \in N} u_j(t)\right] x(t), \quad x(0) = x_0. \qquad (19)$$

Здесь $x(t)$ — биомасса популяции в году $t$; $x_0$ — начальное значение биомассы; $a > 0$ — коэффициент естественного прироста популяции; $u_i(t)$ — доля вылова $i$-м агентом,

$$0 \le u_i(t) \le 1, \quad i \in N. \qquad (20)$$

Интересы каждого агента описываются стремлением к максимизации выигрыша

$$J_i = \int_0^T e^{-\rho t} u_i(t) x(t) dt \to \max, \qquad (21)$$

где $T$ — период рассмотрения, $0 \le \rho \le 1$ — коэффициент дисконтирования. Условие гомеостаза для рыбной популяции имеет вид

$$\forall t \; x(t) \ge x^*, \qquad (22)$$

где $x^*$ — критическое значение биомассы популяции.

Вообще говоря, агенты не заинтересованы в выполнении условия гомеостаза (22). Найдем равновесие Нэша в игре агентов (19)—(21). Функция Гамильтона для $i$-го агента

$$H_i(x, u_i, \lambda_i) = u_i x + \lambda_i\left(a - \sum_{j \in N} u_j\right), \quad i \in N.$$

В силу линейности модели

$$\frac{\partial H_i}{\partial u_i} = (1 - \lambda_i)x,$$

т. е. оптимальные управления могут быть $u_i = 0$ или $u_i = 1$. Поскольку при $u_i = 0$ выигрыш агента $J_i = 0$, то имеет смысл рассматривать случай $u_i = 1$. Тогда уравнение динамики (19) принимает вид

$$\dot{x} = (a - n)x(t), \; x(0) = x_0,$$

откуда

$$x(t) = x_0 e^{(a-n)t},$$

$$J_i = x_0 \int_0^T e^{(a-\rho-n)t} dt = \frac{x_0(e^{(a-\rho-n)T} - 1)}{a - \rho - n} > 0.$$

Таким образом, действительно $NE = \{(1, ..., 1)\}$. Для нахождения множества $U^*$ надо решить неравенство

$$x_0 \exp\left(\left(a - \sum_{j \in N} u_j(t)\right)t\right) \le x^*,$$

откуда получаем условие

$$\forall t \left(a - \sum_{j \in N} u_j(t)\right) t \ge \ln\frac{x^*}{x_0}.$$

Логарифм в правой части всегда не положителен, поскольку по биологическому смыслу $x_0 \ge x^*$ (начальная численность биомассы не меньше критической). Поэтому удобнее переписать полученное условие в виде

$$\forall t \left(\sum_{j \in N} u_j(t) - a\right) t \le \ln\frac{x_0}{x^*}.$$

Если скобка в левой части отрицательна, то всегда $U^* \ne \varnothing$, иначе непустота этого множества зависит от соотношения параметров.

Наконец, рассмотрим множество $U_{DG} = NE \cap U^*$. Оно не пусто, если выполняется условие

$$\forall t \; (n - a)t \le \ln\frac{x_0}{x^*}. \qquad (23)$$

Таким образом, вопрос о непустоте множества $U_{DG}$ и тем самым о разрешимости задачи управления устойчивым развитием (19)—(22) зависит от соотношения значений параметров модели. Вероятность выполнения условия (23) тем выше, чем больше коэффициент естественного прироста рыбной популяции, меньше число рыбаков и больше отношение начальной численности биомассы популяции к ее критическому значению.

Кооперация агентов приводит к задаче оптимального управления

$$J = \sum_{i \in N} J_i \to \max \qquad (24)$$

с ограничениями (19), (20). Поскольку функция Гамильтона для этой задачи имеет вид

$$H(x, u, \lambda) = x \sum_{j \in N} u_j + \lambda\left(a - \sum_{j \in N} u_j\right)x,$$

то ее решение совпадает с решением игры (19)—(21), т. е. $\bar{U} = NE = \{(1, ..., 1)\}$, и непустота множества $U_{OC} = U^* \cap \bar{U}$ вновь определяется условием (23).

Теперь введем Центр, который интерпретируется как орган управления некоторого уровня, отвечающий за выполнение экологических требований. Пусть функционал выигрыша Центра определяется формулой (24). Тогда экономические интересы Центра и агентов совпадают и заключаются в максимизации вылова, однако главная цель Центра — обеспечение требования гомеостаза (22). Для выполнения этого условия Центр применяет метод принуждения, а именно, назначает квоты на вылов рыбы

$$0 \le u_i(t) \le q_i(t) \le 1, \quad i \in N. \tag{25}$$

Очевидно, тогда равновесие Нэша в игре агентов (19), (21), (25) примет вид

$$NE = \{(q_1(t), \dots, q_n(t))\}.$$

Имеем также $U^{\max} = U_{NE}^{\max} = NE$. Множества $U_{\max}^*$ и $U_{NE}^*(q)$ определяются условиями

$$\forall t \left(\sum_{j \in N} q_j(t) - a\right) t = \ln\frac{x_0}{x^*}.$$

Наконец,

$$U_{HDG}(q) = U_{NE}^{\max} \cap U_{\max}^* \cap U_{NE}^*(q) =$$

$$= \left\{(q_1(t), \dots, q_n(t)) \colon \forall t \left(\sum_{j \in N} q_i(t) - a\right) t = \ln\frac{x_0}{x^*}\right\}.$$

Таким образом, для выполнения требования гомеостаза суммарный вылов придется со временем уменьшать.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена концепция управления устойчивым развитием активных систем. Под активными системами понимаются произвольные динамические системы с участием людей, состоящие из активных элементов. Активные элементы способны к самостоятельному целеполаганию, стратегическому поведению и сознательному искажению информации в собственных интересах. Устойчивое развитие предполагает выполнение требований гомеостаза (некоторых динамических условий на состояние объекта управления) и системной согласованности (учета интересов активных агентов, призванных обеспечивать гомеостаз).

Математическая формализация задачи управления устойчивым развитием активных систем осуществляется с помощью дифференциальных игр в нормальной форме, форме характеристической функции и с иерархической структурой, где условие гомеостаза отражается через фазовые ограничения. Приведены постановки таких задач и указаны методы их решения.

Рассмотрены два частных класса задач управления устойчивым развитием: динамические модели стимулирования и динамические модели сочетания общественных и частных интересов (СОЧИ-модели). Обсуждены соответствующие постановки задач, для динамической модели стимулирования приведен результат, обобщающий известный аналог для статической версии. Основная область применения моделей стимулирования — организационное управление, СОЧИ-модели полезны при распределении ресурсов. Дан обзор ряда прикладных задач в различных предметных областях, решаемых на основе предлагаемой концепции. Приведен упрощенный иллюстративный пример, демонстрирующий введенные в статье понятия, в частности, показывающий возможность непустоты различных множеств управлений.

Описанная концепция образует теоретический фундамент создания современных систем управления научно-технологическим развитием, продвижением инноваций, подготовкой кадров для науки и экономики, охраной окружающей среды и рациональным использованием природных ресурсов.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Burkov V.N., Lerner A.Ya.* Fairplay in control of active systems // Differential games and related topics. — Amsterdam, London: North-Holland Publishing Company, 1971. — P. 164—168.
2. *Бурков В.Н., Опойцев В.И.* Метаигровой подход к управлению иерархическими системами // Автоматика и телемеханика. — 1974. — № 1. — С. 103—114.
3. *Бурков В.Н.* Основы математической теории активных систем. — М.: Наука, 1977. — 255 с.
4. *Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К.* и др. Большие системы: моделирование организационных механизмов. — М.: Наука, 1989. — 245 с.
5. *Бурков В.Н., Новиков Д.А.* Теория активных систем: состояние и перспективы. — М.: СИНТЕГ, 1999. — 128 с.
6. *Новиков Д.А.* Теория управления организационными системами. — М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2007. — 584 с.
7. *Механизмы* управления / Под ред. Д.А. Новикова. — М.: Ленанд, 2011. — 192 с.
8. *Горелик В.А., Кононенко А.Ф.* Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. — М.: Радио и связь, 1982. — 144 с.
9. *Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф.* Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. — М.: Радио и связь, 1991. — 288 с.
10. *Laffont J.-J., Martimort D.* The Theory of Incentives: The Principal-Agent Model. — Princeton University Press, 2002. — 421 p.
11. *Algorithmic* Game Theory / ed. by N. Nisan, T. Roughgarden, E. Tardos, V. Vazirani. — Cambridge University Press, 2007. — 754 p.
12. *Данилов-Данильян В.И., Лосев К.С.* Экологический вызов и устойчивое развитие. — М.: Прогресс-Традиция, 2000. — 416 с.
13. *Переход* к устойчивому развитию: глобальный, региональный и локальный уровни. Зарубежный опыт и проблемы России / Рук. авт. колл. Н.Ф. Глазовский. — М., 2002. — 444 с.
14. *Adams W.M., Jeanrenaud S.J.* Transition to Sustainability: Towards a Humane and Diverse World. — Gland: International Union for Conservation of Nature and Natural Resources, 2008. — 107 p.
15. *Clark W.C.* Sustainability Science: A Room of its Own // Proc. of the National Academy of Science. — 2007. — Vol. 104, N 6. — P. 1737—1738.
16. *Our* Common Future. World Commission on Environment and Development (WCED). — Oxford, 1987. — 416 p.
17. *Aubin J.-P.* Viability Theory. — Springer-Verlag, 1991. — 572 p.

18. *Cairns R.D., Martinet V.* An environmental-economic measure of sustainable development // European Economic Review. — 2014. — Vol. 69. — P. 4—17.
19. *Doyen L., Martinet V.* Maximin, viability and sustainability // J. of Econ. Dynamics and Control, 2012 (36). — P. 1414—1430.
20. *Угольницкий Г.А.* Управление устойчивым развитием активных систем. — Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального ун-та, 2016. — 940 с.
21. *Угольницкий Г.А.* Теоретико-игровое исследование некоторых способов иерархического управления // Изв. РАН. Теория и системы управления. — 2002. — № 1. — С. 97—101.
22. *Ougolnitsky G.* Game theoretic formalization of the concept of sustainable development in the hierarchical control systems // Annals of Operations Research. — 2014. — Vol. 220, N 1. — P. 69—86.
23. *Differential Games in Economics and Management Science* / Dockner E., Jorgensen S., Long N.V., Sorger G. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000. — 382 p.
24. *Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В.* Теория игр. — СПб.: БХВ-Петербург, 2012. — 432 с.
25. *Basar T., Olsder G.Y.* Dynamic Non-Cooperative Game Theory. — Philadelphia: SIAM, 1999. — 506 p.
26. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1983. — 393 с.
27. *Optimal* Control of Nonlinear Processes (with Applications to Drugs, Corruption, and Terror) / Grass D., Caulkins J.P., Feichtinger G., Tragler G., Behrens D.A. — Springer, 2008. — 529 p.
28. *Угольницкий Г.А., Усов А.Б.* Равновесия в моделях иерархически организованных динамических систем с учетом требований устойчивого развития // Автоматика и телемеханика. — 2014. — № 6. — С. 86—102.
29. *Белявский Г.И., Данилова Н.В., Угольницкий Г.А.* Эволюционное моделирование в задачах управления устойчивым развитием активных систем // Математическая теория игр и ее приложения. — 2016. — Т. 8, вып. 4. — С. 14—29.
30. *Ougolnitsky G.A., Usov A.B.* Computer Simulations as a Solution Method for Differential Games // Computer Simulations: Advances in Research and Applications. Eds. M.D. Pfeffer and E. Bachmaier. — N.Y.: Nova Science Publishers, 2018. — P. 63—106.
31. *Olsder G.J.* Phenomena in inverse Stackelberg games, part 2: Dynamic problems // Journal of Optimization Theory and Applications. — 2009. — Vol. 143, iss. 3. — C. 601—618.
32. *Рохлин Д.Б., Угольницкий Г.А.* Равновесие Штакельберга в динамической модели стимулирования с полной информацией // Автоматика и телемеханика. — 2018. — № 4. — С. 152—166.
33. *Gorelov M.A., Kononenko A.F.* Dynamic models of conflicts. III. Hierarchical games // Automation and Remote Control. — 2015. — Vol. 76, N 2. — P. 264—277.
34. *Li M., Cruz J.B., Simaan M.A.* An Approach to Discrete-Time Incentive Feedback Stackelberg Games // IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics. Part A: Systems and Humans. — 2002. — Vol. 32, N 4. — P. 472—481.
35. *Горбанева О.И., Угольницкий Г.А.* Цена анархии и механизмы управления в моделях согласования общественных и частных интересов // Математическая теория игр и ее приложения. — 2015. — Т. 7, вып. 1. — С. 50—73.
36. *Gorbaneva O.I., Ougolnitsky G.A.* System Compatibility, Price of Anarchy and Control Mechanisms in the Models of Concordance of Private and Public Interests // Advances in Systems Science and Applications. — 2015. — Vol. 15, N 1. — P. 45—59.
37. *Губанов Д.А., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г.* Социальные сети: модели информационного влияния, управления и противоборства. — М.: Физматлит, 2010. — 228 с.
38. *Белов М.В., Новиков Д.А.* Сетевые активные системы: модели планирования и стимулирования // Проблемы управления. — 2018. — № 1. — С. 47—57.
39. *Робертс Ф.* Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. — М.: Наука, 1986. — 497 с.
40. *Агиева М.Т.* Модели управления на социальных сетях в маркетинге // Инженерный вестник Дона. — 2018. — № 1. — URL: http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2018/4670 (дата обращения: 22.11.2018).
41. *Угольницкий Г.А., Усов А.Б., Рыжкин А.И.* Метод побуждения в играх Гермейера при моделировании трехуровневой системы управления судовыми балластными водами // Компьютерные исследования и моделирование. — 2014. — Т. 6, № 4. — С. 535—542.
42. *Угольницкий Г.А., Усов А.Б., Рыжкин А.И.* Метод принуждения в играх Гермейера при моделировании трехуровневой системы управления судовыми балластными водами // Компьютерные исследования и моделирование. — 2015. — Т. 7, № 2. — С. 281—288.
43. *Назиров А.Э., Угольницкий Г.А., Усов А.Б.* Теоретико-игровая модель трехуровневой маркетинговой системы с учетом экологических требований // Управление большими системами. — 2015. — Вып. 55. — С. 326—342.
44. *Никитина А.В., Пучкин М.В., Семенов И.С.* и др. Дифференциально-игровая модель предотвращения заморов в мелководных водоемах // Управление большими системами. — 2015. — Вып. 55. — С. 343—361.
45. *Никитина А.В., Сухинов А.И., Угольницкий Г.А.* и др. Оптимальное управление устойчивым развитием при биологической реабилитации Азовского моря // Математическое моделирование. — 2016. — Т. 28, № 7. — С. 96—106.
46. *Угольницкий Г.А., Усов А.Б., Пучкин М.В.* и др. Теоретико-игровые регламенты механизмов управления устойчивым развитием мелководных экосистем // Автоматика и телемеханика. — 2017. — № 6. — С. 122—137.
47. *Оноприенко А.Н., Угольницкий Г.А., Усов А.Б.* Имитационное моделирование иерархических регламентов управления (на примере рыболовства) // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. — 2016. — № 4. — С. 25—29.
48. *Rokhlin D.B., Ougolnitsky G.A., Usov A.B.* A two-level model of optimal harvesting under parameter uncertainty // Far East Journal of Mathematical Sciences. — 2017. — Vol. 102, N 7. — P. 1365—1380.
49. *Ougolnitsky G.A.* A System Approach to the Regional Sustainable Management // Advances in Systems Science and Applications. — 2017. — Vol. 17, N 2. — P. 52—62.
50. *Анопченко Т.Ю., Мурзин А.Д., Угольницкий Г.А.* Моделирование согласования интересов в задачах управления устойчивым развитием территорий // Экономика природопользования. — 2017. — № 6. — С. 35—47.
51. *Горбанева О.И., Мурзин А.Д., Угольницкий Г.А.* Механизмы согласования интересов при управлении проектами развития территорий // Управление большими системами. — 2018. — Вып. 71. — С. 61—97.
52. *Угольницкий Г.А., Усов А.Б.* Теоретико-игровая модель согласования интересов при инновационном развитии корпорации // Компьютерные исследования и моделирование. — 2016. — Т. 8, № 4. — С. 673—684.
53. *Dyachenko V.K., Ougolnitsky G.A., Tarasenko L.V.* Computer Investigation of a Game Theoretic Model of Social Partnership in the System of Continuing Professional Education // Advances in Systems Science and Applications. — 2015. — Vol. 15, N 4. — P. 320—328.
54. *Нор-Аревян О.А., Тарасенко Л.В., Угольницкий Г.А.* Математическое моделирование социального партнерства: методология междисциплинарного исследования (на примере системы дополнительного профессионального образования) // Социологические исследования. — 2018. — № 4. — С. 15—24.


*Статья представлена к публикации членом редколлегии чл.-корр. РАН Д.А. Новиковым.*

**Угольницкий Геннадий Анатольевич** — д-р физ.-мат. наук, профессор, Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону, ✉ gaugolnickiy@sfedu.ru.

*Поступила в редакцию 03.05.2018, после доработки 18.06.2018.*
*Принята к публикации 27.09.2018.*